目　　录

第一章　静电学：电荷与场

1.1 电　　荷

在早期从事研究工作的人看来，电似乎是一种很不寻常的现象．为了从物体引出当时人们所说的“神秘火花”，或将物体引至高度带电状态，或产生稳定电流，都需要巧妙的装置．除了闪电之外，通常的大自然现象，从水结冰到树木生长，似乎都与带电体的奇异行为无关．但是，现今我们知道，从原子到活细胞这一广大物质领域的物理和化学性质，在很大程度上都依赖于电的作用力．我们能了解这些，不得不感谢那些发现电磁现象本质的十九世纪的科学工作者安培、法拉第、麦克斯韦和其他许多人．同样也不得不感谢那些揭示物质原子结构的二十世纪的物理学工作者和化学工作者．

经典电磁学在处理电荷、电流及其相互作用时，将所涉及的诸量均视为可无限精确地独立测量的．这里讲的“经典”，实际上仅仅是指“非量子的”而言．就象如今普通力学那样，在经典电磁理论中忽略了包含常量 h 的量子规律．事实上，在普朗克的发现之前，经典电磁学已很近于达到今天这样完善的程度了．它迄今仍然具有强大的生命力．无论是量子物理学所引起的革命，还是狭义相对论的发展，均未减弱百多年前就已写下的电磁场方程的光采．

当然，这个理论有着坚实的实验基础，并且，由于这一原因，在它原先的应用范围：线圈、电容器、振荡电流以及无线电波和光波中，这个理论是相当可靠的．但是，即使取得了如

此之大的成功，仍不足以保证它在另一领域依然有效，例如在分子的内部.

有两个事实有助于说明电磁学的经典描述在现代物理学中依然重要. 一个事实是，狭义相对论并不要求对经典电磁学作任何修正. 从历史上讲，狭义相对论来源于经典电磁学理论及其所引起的多种实验. 在洛仑兹和爱因斯坦的工作之前早已提出的麦克斯韦场方程组，已被证明是完全符合相对论的. 第二个事实是：已经证明，直到小于 10^{-10}厘米的距离范围(即原子直径的百分之一)，对电磁力的量子力学修正仍然是无关紧要的. 描写验电器箔片的那些定律，同样可用来描写原子内部粒子间的排斥和吸引，尽管在这些力作用下粒子的行为需要用量子力学才能预言. 在更小的距离内，电磁理论已与量子理论相当成功地融合成为一门新学科——量子电动力学. 在已探究过的最小范围内，量子电动力学看来都是和实验结果相符合的.

我们假定读者已对电学的一些基本事实有所了解. 因此，我们就无须去评述所有那些验证电荷存在的实验以及所有那些关于物质的电结构的证据. 然而，对于整个电学所依据的基本规律的实验基础，我们倒的确需要仔细地考查一番. 本章我们就来研究静止电荷的物理学——静电学.

无疑的，电荷的一种基本属性是存在两类电荷，很久以前它们就被命名为正电荷和负电荷了. 人们所观察到的事实是：所有带电粒子均可分成两类，其中同类粒子是相互排斥的，异类粒子是相互吸引的. 若分开某个距离的两个小带电体 A 与 B 相互排斥，又若 A 吸引第三个带电体 C，则我们总是发现，B 也吸引 C. 这个普遍规律为什么存在，我们尚不能确切地说明. 然而，当代的物理学家倾向于认为，从根本上讲，正电荷和负电荷是同一本质的两个对立方面，如同“左”和“右”是

双手的两个对立方面一样．事实上，涉及左、右对称性的问题，看来都与电荷的对偶性及另一种基本的对称性——时间的两种方向——有密切联系．基本粒子物理学有助于弄清这些问题．

我们所称的负电荷本来也可以称为正电荷；反之亦然[1]．我们对正、负电荷称呼上的这种选择是一种历史的偶然性．由于同种电荷相互排斥，我们的宇宙看来是个正、负电荷非常均匀混合的混合体，这一点也就不足为奇了．

所观察到的电荷的另外两个性质是电荷守恒和电荷的量子化．它们在物质的电结构方面极为重要．这些性质涉及电荷的量，因而也就包含着度量电荷方面的问题．不久我们要严谨地讲述如何用相隔一定距离的两个电荷之间的作用力来测量电荷等问题．目前我们姑且认为这类度量问题已经解决了，于是我们就可以从容地讨论电荷的这些基本性质了．

1.2 电 荷 守 恒

一个孤立系统的总电荷是不变的．所谓“孤立”系统，指的是不允许任何物质通过其边界的系统．因为光子不带电，故可以允许光线出、入该系统而不影响这个原理．例如，真空中的一个薄壁盒子受到 γ 射线的照射时，可能成为电子偶产生的地方．这时一个高能光子消失，产生一个正电子和一个负电子(图 1.1)．虽然新产生了两个带电粒子，但盒子内和盒子上的总电荷依然不变．可能破坏这个定律的，只有产生带正电的粒子而不同时产生带负电的粒子的事件．但从未观察到这样的事件．

---

1) 通常的电子其电荷并非内在就是负的．一旦定义了乘法法则，负整数与正整数的主要区别就在于，负整数的平方是一个与之反号的正整数．但两个电荷的乘积不是一个电荷，故二者无法类比．

当然，如果电子和正电子的电荷大小不精确相等，电子偶的产生仍然会破坏电荷守恒这个严格的规律．但是，在实验所能确定的精度内，电子与正电子的电荷大小是相等的．称为电子偶素的结构提供了一个有趣的实验验证．电子偶素是由一个电子和一个正电子组成的，而且除此而外，别无它物．这个奇异的“原子”能够存在大约十分之一微秒左右，这段时间已足够长了，足以仔细地研究它了．它的行为就象完全是电中性的一样．事实上，如果发现它们电荷的大小有任何差别的话，许多物理学家都会感到惊异，更不用说会多么怀疑了．因为我们知道，电子和正电子相互之间是粒子和反粒子的关系．它们的电荷和质量精确地相等是自然界一种普遍对称性——粒子、反粒子对偶性的反映．但是，人们可能要问，电荷守恒究竟只是支配粒子产生与湮灭的更为广泛的守恒律的必然结果呢，还是电荷守恒本身就是一个其它定律都必须与之符合的根本要求呢？或者，提出这类问题是否真有意义呢？我们现在并不确切地知道这些．

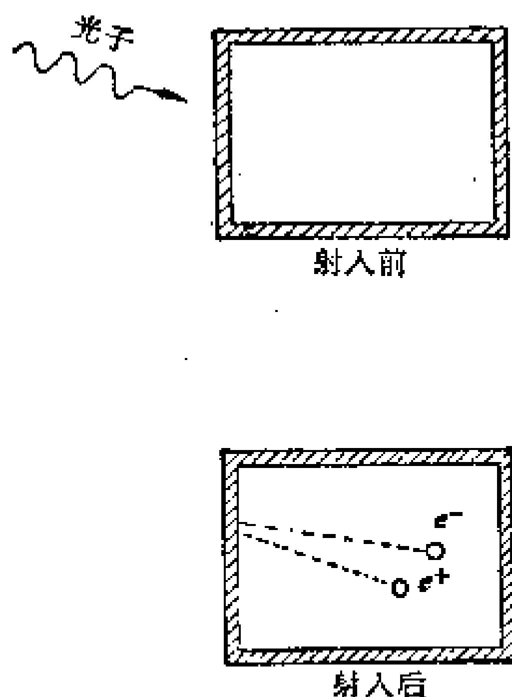


图1.1　电荷大小相等而符号相反的带电粒子成对产生．

在我们研究电磁学的过程中，有个问题将会清楚：电荷不守恒将与我们现行的电磁理论的结构完全矛盾．因此，我们可以把电荷守恒定律或者作为一种理论假设，或者作为已为迄今所有的观察结果无例外地完全证实的经验规律．电荷守恒定律是：

一个孤立系统的总电荷数不变，即在任一时刻存在于系统中的正电荷与负电荷的代数和不变.

我们迟早要问：这个定律是否经得起相对论不变性的检验？在第五章我们将透彻地讨论这个重要问题. 答案是肯定的. 上述电荷守恒定律的表述不仅在任一给定惯性系内成立，并且，在更广泛的意义下也成立，即在不同坐标系内对该电荷进行测量的观察者都会测得同样的数值. 换句话说，一个孤立系统的总电荷是一个相对论性的不变量.

1.3 电荷的量子化

密立根油滴实验和无数其它的实验表明，在自然界中，电荷总以一确定的量为单元出现的. 我们用 e 表示这个量，即电子的电荷. 我们已经指出过，正电子也精确地具有这么大的电荷. 看来更值得注意的是，其它一切带电粒子所带的电荷也都是这个量. 例如，质子带的正电荷量与电子带的负电荷量完全相等.

质子和电子的电荷完全相等这一点，很容易用很灵敏的实验来检验. 人们可以检验，正常氢原子或氢分子整体说来是电中性的. 因此，可以尝试用电场来偏转原子束或分子束. 为此目的设计，一个灵敏的实验，在高真空下使一界限鲜明的铯原子束通过强电场[1]. 由于没有观察到任何偏移，可以得出结论：铯原子上的净电荷必小于 $10^{-16}e$. 最近用不同方法做了一个更为灵敏的实验[2]，即把大量氢气压进一个与周围高

---

1) J. C. Zorn, G. E. Chamberlain and V. W. Hughes, *Phys. Rev.* **129**, 2566 (1963).

2) 过去做的关于电荷相等性的试验可以参考 J. G. King, *Phys. Rev. Letters* **5**, 562 (1960) 一文及 H. Y. Chiu and W. F. Hoffman 编的 "Gravitation and Relativity" 一书中 V. W. Hughes 写的那一章(第十三章). (W. A. Benjamin. Inc. New York. 1964).

度电绝缘的容器内，然后，在防止任何普通离子逸出的情况下让氢气从该容器逸出．若质子的电荷与电子的电荷，譬如说相差十亿分之一，那么由二质子与二电子组成的每个氢分子所带的电荷为 $2\times10^{-9}e$．因此，氢的大量逸出将改变容器的电荷与电势，并达到可测出的程度．事实上，这个实验是能够测出小至每个原子 $10^{-20}e$ 的剩余电荷的，然而并未观察到任何变化！我们可以得出结论：电子与质子电荷相等的精度达到10^{20}分之一．

按照现在的看法，电子和质子的差别大致和两种基本粒子的差别一样．迄今还没有人能理解为什么它们的电荷相等会达到这么惊人准确的程度．显然，电荷量子化是自然界一个深刻而又普遍的规律．一切迄今我们所能测定的带电基本粒子都带有精确的等量电荷．我们只能期待于某些未来的发现，或者通过理论的洞察力来揭示，为什么带有 $0.500e$ 或 $0.999e$ 电荷的带电粒子不能存在[1]．

自然，电荷量子化这一事实超出了经典电磁学的范围．通常我们将不考虑它，而将点电荷 q 作为可以具有任意的大小来处理．这并不会给我们带来麻烦．还应该记住，绝不能指望能用经典理论来解释基本粒子的结构（现在的量子理论是否都能解释也很难说！）．是什么把电子结合成整体的，正如是什么使电子保有这样精确固定的电荷值一样，令人迷惑不解．电子不同部分间的静电作用力是相互排斥的，所以电子内必定还包含一种比电作用力更强的作用．

研究电学和磁学时，我们把带电粒子简化为电荷携带者

1）最近提出了可能存在具有 $1/3e$ 和 $2/3e$ 电荷的基本粒子的理论推测．但是，随后在据信适于这些粒子产生与测定的条件下所做的研究中，并未发现它们．[L. B. Leipuner, W. T. Chu, R. C. Larsen, P. K. Adair, Particles with a charge of $1/3e$, *Phys. Rev. Letters* **12**, 423 (1964).] 然而，直到写这本书时，仍然有这样的推测．

来处理，令其线度很小，以致对多数问题，其大小与结构均无关紧要．例如，对于质子的情况，从高能散射的实验得知，它的电荷分布的半径不大会明显地超过10^{-13}厘米．我们还记得，卢瑟福对 α 粒子散射的分析表明，即使是重原子核，其电荷也只分布在小于 10^{-11}厘米的区域内．对十九世纪的物理学家说来，"点电荷"只是一个抽象的概念，带电的木髓小球是它不太好的一种实际表达．今天，我们已经熟悉原子微粒了．在现代对自然的描述中，电的粒子性是如此明显，以致我们觉得，点电荷比连续变化的电荷密度分布更为自然．当我们假定一些连续变化的电荷分布时，可以认为这是对大量基本带电粒子的平均值．这与我们定义液体的宏观密度（尽管在分子尺度，液体也是成团的）的办法是相同的．对于比密立根油滴大得多的物体，电荷的量子化不是很容易察觉出来的！

1.4 库 仑 定 律

读者可能已经知道，静止电荷间的相互作用是用库仑定律描述的：二静止电荷相互排斥或吸引之力，与二电荷数值之积成正比，而与其距离的平方成反比．

我们可以用矢量的形式简洁地将其表出

$$\mathbf{F}_2 = k\frac{q_1 q_2 \hat{\mathbf{r}}_{21}}{r_{21}^2}, \tag{1}$$

q_1、q_2是给出各电荷数值和符号的数（标量），$\hat{\mathbf{r}}_{21}$是沿电荷 1 指向电荷 2 方向的单位矢量[1]，$\mathbf{F}_2$是作用于电荷 2 的力．式(1)还表示出，同类电荷相互排斥，异类电荷相互吸引，并且此力符合牛顿第三定律，即 $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$．

单位矢量 $\hat{\mathbf{r}}_{21}$ 表明，作用力平行于二电荷之联线．此力不

---

1) 我们这里采用的规定，看来可能并不是自然的选择．但它和物理学上其它地方的用法比较一致，所以全书都这样用．

会取其它方向，除非空间本身具有某种内在的方向性．因为在真空并且各向同性的空间，仅存在这两个电荷时，不可能选取其它方向．若点电荷本身有以某确定方向为轴的内部结构，就不能仅仅用标量 q 来描述了．

在写出式(1)时，我们假定这两个电荷具有确定位置，他们本身所占的区域比 r_{21} 小得多．否则，r_{21} 就不能确定，从而不能使式(1)普遍有效．现在我们之所以要限于静止电荷，是为了排除运动电荷产生磁作用力的问题．以后我们再研究这问题．

式(1)中已引进常数 k，是为了照顾不同的单位制．通常我们以厘米度量 r_{21}，以达因度量 $\mathbf{F}$，以 CGS 静电单位制(即静电单位)来度量电荷，在这种情形，k 正好等于1．两个同为 1 静电单位的电荷，当相距为 1 厘米时，以 1 达因之力相互排斥；可以认为，$k = 1$ 时式(1)给出了在 CGS 静电单位制中单位电荷的定义．有时我们以库仑作为电荷的单位．通常在米-公斤-秒单位制系统中碰到它．其大小规定如下：若取库仑做电荷单位，米为距离单位，并取 k 为 8.9875×10^9，则式(1)给出之力以牛顿为单位．引入库仑是因为它与通常工程技术、实验室以及日常生活中所用的电学单位(安培、伏特、欧姆、瓦特)之间的关系很简单．1 库仑的电量等于 2.998×10^9 静电单位[1]．

我们检验和测量电荷的唯一方法，是观察带电体间的相互作用．这样，人们可能要问，库仑定律所表现的内容中有多大部分实质上只是一个定义．事实上，库仑定律重要的物理

1) 这里出现的 2.998 这个数以后在电学单位的其它换算中还将出现，它可能使人想起光速来．事实上它正是这么来的，但我们现在无需去探讨．常常可以发现，一些书和表上简单地就用系数 3 来代替它．严格说来，每个表示电学单位换算的系数3，都应该是 2.99792……，即米制中光速已确定了的有效数字部分．

内容是对平方反比关系的陈述和电荷在其效果上是可加的这个含意. 为了显示电荷可加性，我们必须考查多于两个电荷的情形. 如果世界上只有 q_1、q_2 两个电荷可供实验，自然我们绝对不能够分别测量它们. 我们只能证明 F 正比于 $1/r_{21}^2$. 如有各带电 q_1、q_2、q_3 的三个物体，q_2 距 q_1 10 厘米而 q_3 相距甚远时(见图 1.2)，我们可以测量出施加在 q_1 上的作用力. 然后，我们可以把 q_2 拿开，并将 q_3 放到原先 q_2 的位置，再测施加在 q_1 上的作用力. 最后，我们把 q_2、q_3 紧挨着放在一起，并将此联合体置于距 q_1 10 厘米之处. 由测量发现，此时对 q_1 的作用力，等于方才两次测得之力的和. 这是个很重要的结果. 它不能像我们前面证明两个点电荷间的作用力必沿其联线那样，由对称性逻辑地推理而预言出来. 两个电荷间的作用力不因第三个电荷的存在而改变.

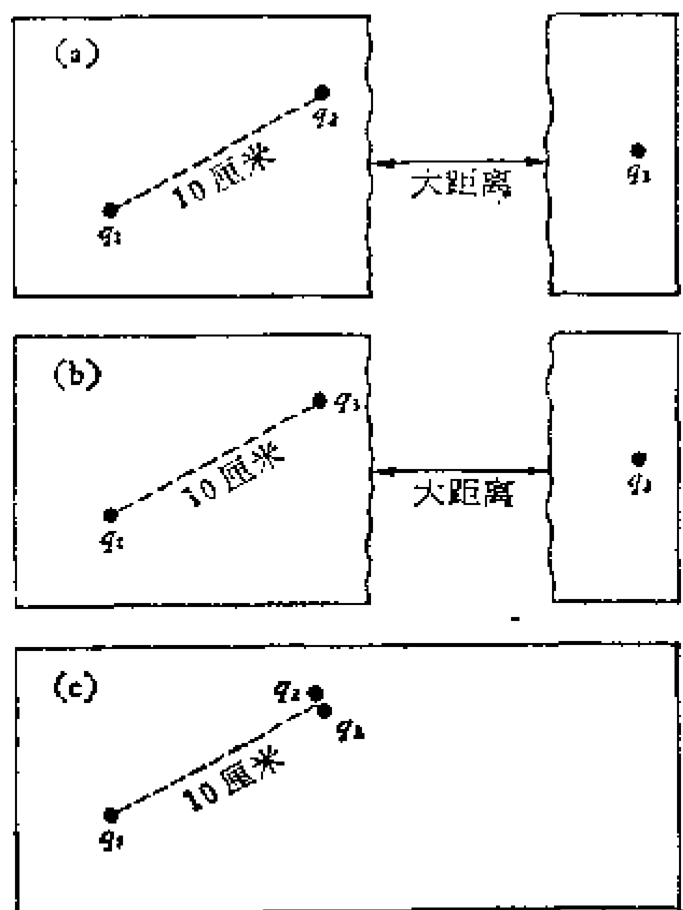


图 1.2 (c) 中对 q_1 的作用力，是 (a) 和 (b) 中对 q_1 的作用力之和.

不管系统中有多少个电荷，每对电荷之间的作用力都能够用库仑定律 [式(1)] 来计算. 这是**叠加原理**的基础. 电磁学中我们将一再求助于它. 叠加原理指的是，在把第二个系统加到第一个系统上去而不改变二系统位形的条件下，将二

源联合成一个系统．这一原理保证，对位于联合系统中任意点的电荷之作用力，是每组源电荷单独作用在该点电荷时的作用力的矢量和．绝对不可轻易地认为叠加原理是理所当然的．可能有一批涉及到极小距离或极强作用力的现象，在那里，叠加原理不再成立．事实上我们知道，从经典电磁理论的观点看来，电磁场中有一些量子现象，的确表明了叠加原理的失败．

只有在有两个以上的电荷时，电相互作用的物理学才能得到充分的研究．可以比式(1)那种清楚的表述更进一步，断言图 1.2 中的三个电荷无论占据什么位置，对其中任何一个，例如对于 q_3 的作用力，可以用下述方程正确地表出：

$$\mathbf{F}_3 = \frac{q_3 q_1 \hat{\mathbf{r}}_{31}}{r_{31}^2} + \frac{q_3 q_2 \hat{\mathbf{r}}_{32}}{r_{32}^2}, \tag{2}$$

式(2)可应用于譬如图 1.3 所示的情形．

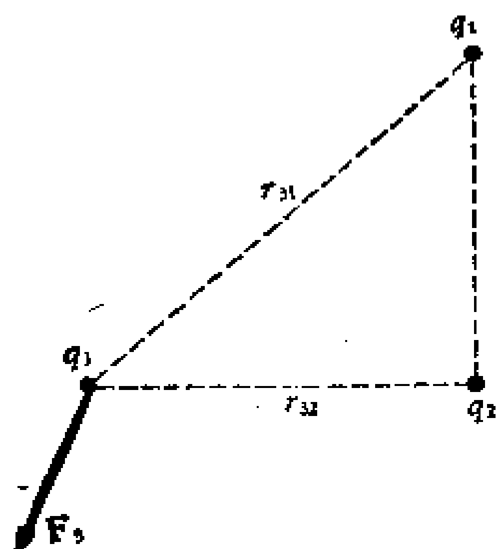


图 1.3　两个电荷对一个电荷的作用力由式(2)给出．

对于平方反比律，在某些距离范围，它的实验验证已经接近完备．1785 年库仑用扭秤测量了两个带电小球间的作用力．比库仑早得多，普里斯特利，与重力场类比，提出了一个中空带电球内不存在电的影响这一事实是平方反比力的证明．英国实验物理学家亨利·卡文迪什的许多工作均不为其同时代人所知．1772 年，他对平方反比律做了检验，精度达到大约百分之二．卡文迪什使一个球壳带电，然后将其分成两半，露出内球，内球不带电，这就证明了平方反比

律[1]. 近代重复了卡文迪什实验，在距离为英寸或英尺的范围核对平方反比律实际已精达10^9分之几[2].

有时这个实验结果被说成是对平方反比律的"指数"的检验. 然而真正的问题并不在于正确的指数是-2还是什么其它数，譬如-1.99998，问题在于二电荷相互在什么距离范围时——如果有这样的距离范围的话——平方反比律失效. 就目前能用的直接实验证明而言，有两个区域可能打破平方反比律. 一个是距离小于10^{-14}厘米的极小范围，如已讲过的，我们不能担保电磁理论在那里还适用；还有，在非常大的距离，譬如由地理上的距离到天文上的距离这个范围，我们尚未对库仑定律做过实验验证. 但现在我们并无特殊理由预料在大距离下库仑定律会遭到破坏. 实际上，现代的电磁场量子理论为我们提供了一些根据，表明在远比近代卡文迪什实验使用的距离还大得多时，库仑定律依然正确. 原因是大距离时平方反比律的中断意味着光量子(即光子)具有尽管很小却非零的静质量，因而随着波长的变化，真空中传播的电磁波的速度也会有个微小的改变. 从直接观测知道[3]，无线电短波与可见光以同样的速度在真空中传播，其实验精度至少可达10^6分之一. 因此可以从理论证明，至少在几公里的范围，库仑定律是足够准确的. 或许还可以作出更强有力的这类间接论证.

概括地讲，我们有一切理由相信，库仑定律在由10^{-13}厘

---

1) 在第二章我们会论及在任一导体壳内电场为零，不管这个壳体是否球形. 卡文迪什与普里斯特利一样，用同重力的类比来推论的. 所以，他似乎也没有发现平方反比律的这个更一般的结果.

2) S. J. Plimpton and W. E. Lawton, *Phys. Rev.* **50**, 1066 (1936).

3) 迄今最好的证明，是近来观察到离我们20光年的耀星 (flare-star) 爆发时，其光辐射与无线电辐射实际上同时到达地球(相差至多不过几分钟). [B. Lovell, F. L. Whipple and L. H. Solomon, *Nature* **202**, 377 (1964).]

米至若干公里的巨大范围——如果不是更大的话——都是可靠的，因而我们把它作为描述电磁学的基础.

1.5 电荷系的能量

原则上，库仑定律包含了静电学的所有内容. 给出电荷及其位置之后，就能求出所有的作用力. 或者，知道了一些在其他力作用下自由运动的电荷，我们就能找出保持电荷分布静止的平衡排列. 正如有了牛顿运动定律就有了力学的一切. 但是，在力学和电磁学中，通过引入一些其他概念，最值得注意的是能量概念，会增进我们洞察和解决问题的能力.

因为电力是保守力，所以在此能量是个很有用的概念. 首先考虑把带电体排成某特定排列时必须对系统做的功. 让我们由两个分开很远的带电体或粒子开始，它们各带电 q_1、q_2，如图 1.4 中最上头的图所示. 原先形成这两个电荷集中体需要多少能量，我们完全不去考虑它. 将此二粒子慢慢移近，直至他们的距离为 r_{12} 为止，这需作多少功?

不管让 q_1 移往 q_2 或是反过来 q_2 移往 q_1 均无区别. 无论在哪一种情形所做的功都是力与沿力方向的位移之积的积分. 将一电荷移向另一电荷所须施加的力，与库仑力大小相同而方向相反.

$$W=\int 力\times 距离=\int_{r=\infty}^{r_{12}}\frac{q_1q_2(-dr)}{r^2}=\frac{q_1q_2}{r_{12}}. \qquad (3)$$

因为 r 由∞变到 r_{12}，所以位移的增量为 $-dr$. 我们知道，电荷同性时对系统所做的功必为正. 这些电荷必定是被推到一起去的. 若 q_1、q_2 以静电单位为单位，r_{12} 以厘米为单位，则方程(3)所给出的功以尔格为单位.

我们由第一卷对保守力的研究获知，无论电荷移来的路径如何，其功相同. 我们再回顾一下这一论证，并将其应用于

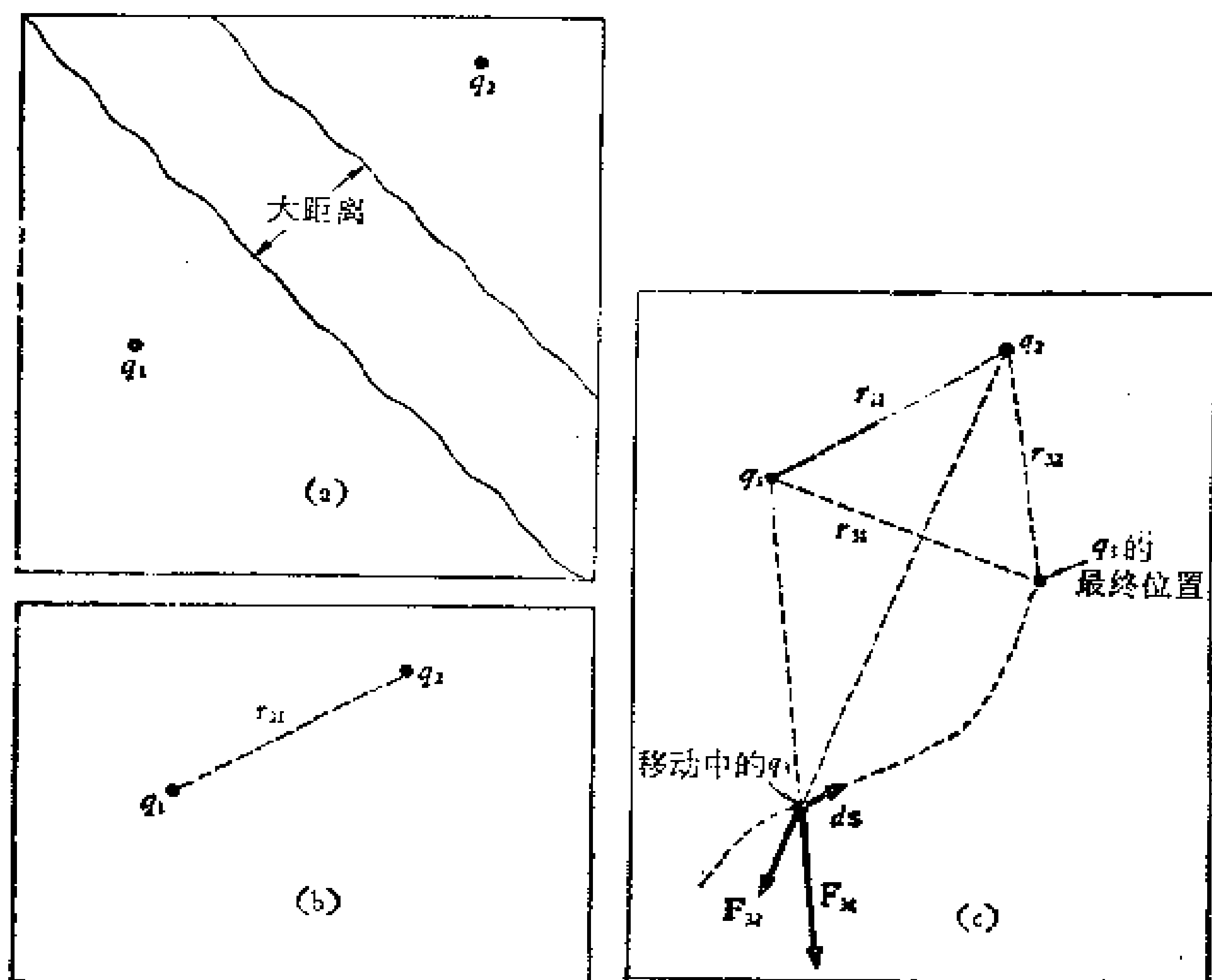


图 1.4 三个电荷彼此移近．首先移来 q_2；然后让 q_1、q_2 固定再移来 q_3．

图 1.5 中的二电荷 q_1、q_2．该图表明保持 q_1 固定，而将 q_2 沿两条不同的路径移到同一最终位置．每个球壳，例如图上的 r 与 $r+dr$ 之间的那个球壳，均必为此二路径所穿过．对此二路径，在 r 与 $r+dr$ 之间那个小段上，功的增量 $-\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ 相同．理由是两个位置的 $\mathbf{F}$ 的大小相同，并且均在 q_1 的径向方向上，因 $ds=dr/\cos\theta$，故 $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}=F dr$．沿一路径的功的每一增量与沿另一路径相对应的功的增量相同，故其总和亦必相等．即使对迂迴曲折的路径，象图 1.5 虚线所示的那种路径，这个结论也是正确的．（为什么呢？）

现在回到图 1.4b 那两个电荷的情形．让我们由远处将第

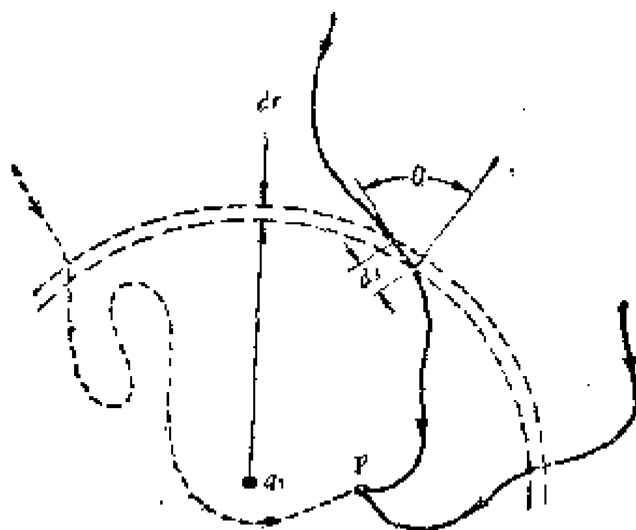


图 1.5 由于是中心力，在 r 与 $r+dr$ 之间的不同的路径段上，需要作相同的功。

三个电荷 q_3 移至 P_3 点，距电荷 1 r_{31} 厘米，距电荷 2 r_{32} 厘米。为此所需之功为

$$W_3 = -\int_{\infty}^{P_3} \mathbf{F}_3 \cdot d\mathbf{s} \tag{4}$$

根据电作用的可加性

$$-\int \mathbf{F}_3 \cdot d\mathbf{s} = -\int (\mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32}) \cdot d\mathbf{s}_1$$

$$= -\int \mathbf{F}_{31} \cdot d\mathbf{r} - \int \mathbf{F}_{32} \cdot d\mathbf{r},$$

即将 q_3 移至 P_3 所需之功为 q_1 单独存在时所需之功和 q_2 单独存在时所需之功的和。

$$W_3 = \frac{q_1 q_3}{r_{31}} + \frac{q_2 q_3}{r_{32}}, \tag{6}$$

把这三个电荷集合成上述分布时所做的总功，我们称之为 U，

$$U = \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}. \tag{7}$$

我们注意到，尽管 q_3 是后移来的，但 q_1、q_2 和 q_3 对称地出

现于上式．如果 q_3 是首先移来的，我们也会得到同样的结果（试试看）．因此，U 与电荷聚集的次序无关；又因它与每个电荷移来所经过的路径无关，故对电荷的最终排列，U 之值必具单一性．可称 U 为该特定系统的电势能．和通常一样，确定势能有相当的任意性．以上是选择三个电荷均已存在而相互距离无限远的状态势能为零．势能是属于组态整体的．将势能的某一部分归属于某个电荷的办法是无意义的．

显然，这个极简单的结果可以推广应用于任意多个电荷的情形．若有 N 个不同的电荷，在空间任意地排列着，该系统的势能可以象式（7）那样由对所有的各对电荷求和来计算．在这情形下，零电势能相应于各电荷都远远分离的情形．

作为例子，我们来计算八个负电荷位于边长为 b 的立方体的各顶角上，一个正电荷位于立方体中心的这种排列的电势能［如图 1.6（a）所示］．设每个负电荷为带 $-e$ 电荷的电子，而在中心的粒子带有两倍的正电荷 $2e$．将各个对加起来，可得

$$
\begin{aligned}
U &= \frac{8(-2e^2)}{(\sqrt{3}/2)b}+\frac{12e^2}{b}+\frac{12e^2}{\sqrt{2}b}+\frac{4e^2}{\sqrt{3}b}\\
&=\frac{4.32e^2}{b}.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

表明和中各项从何而来．能量是正的，表明把系统必须对它做功．当然，如果令电荷离散，此功可以回对某些外界物体施以作用力．或者，若电子只是由这组态飞散开，则所有粒子的总动能将等于 U．无论它们是同时并对称地离散，或是以任何顺序一次释放一个，结果都是如此．由此我们看到系统总势能这个简单概念的威力．试想，如果我们必须计算在聚集成组态的各步每个粒子所受力之矢量和，问题会怎样复杂！当然，在本例中，几何对称将会简化计算任务；即使如此，也仍然会比上面所做的简单计算复杂得

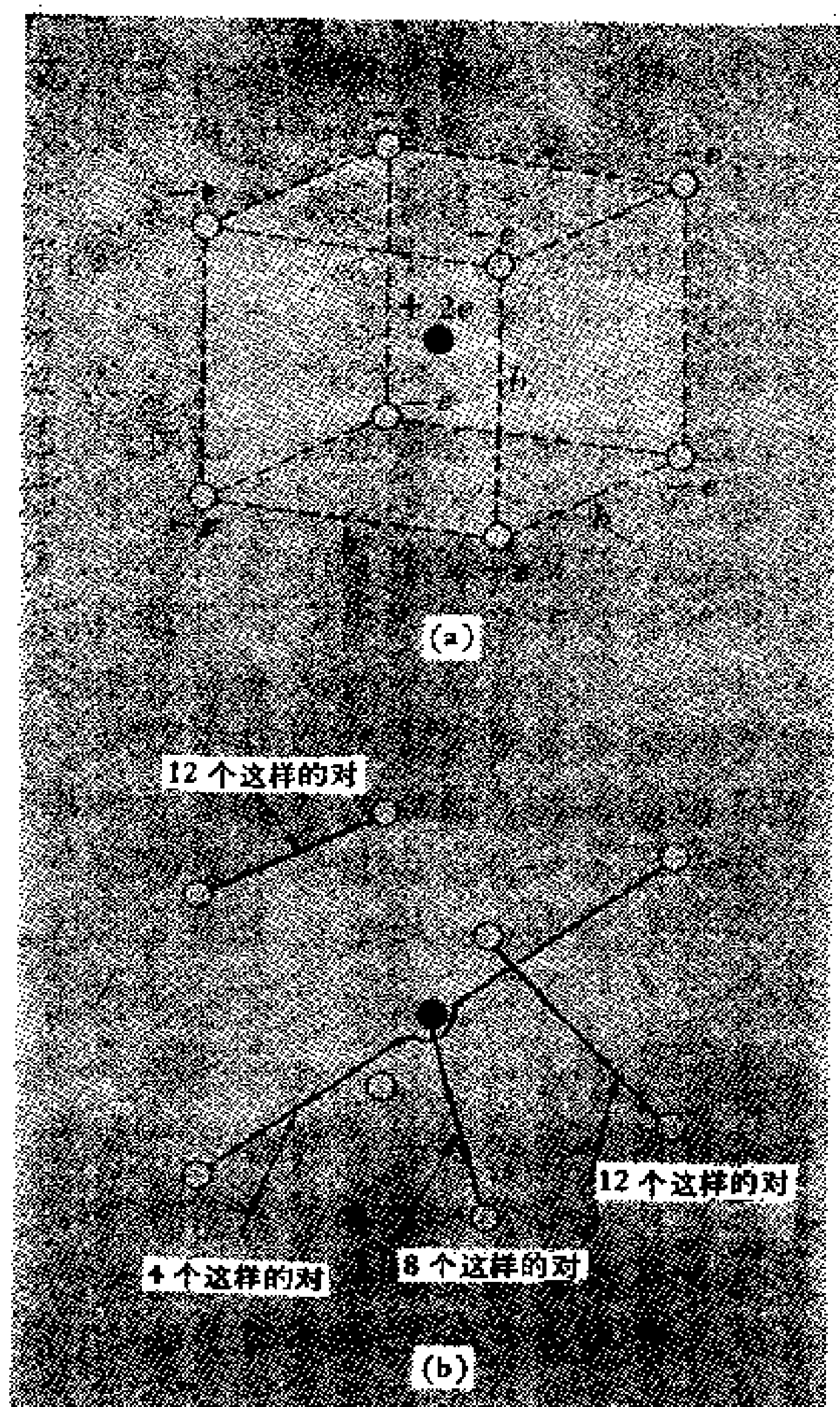


图 1.6 (a)这 9 个点电荷的排列，其势能由式(9)给出。(b) 在总和中含有四种类型的对。

多。

各对之和可用下述方式写出

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k \neq j} \frac{q_j q_k}{r_{jk}}. \tag{9}$$

双重和号 $\sum_{j=1}^{N} \sum_{k \neq j}$ 是指，取 $j = 1$ 而后对所有的 $k = 2$，3，4…N 求和；然后取 $j = 2$，对 $k = 1$，3，4…N 求和；如此等等，直到 $j = N$ 为止．显然，这就把每个对计算了两次，故需在总的求和号前加因子 1/2．

1.6 晶格的电势能

上面这些概念在晶体物理中有很重要的应用．我们知道，对象氯化钠那样的离子晶体，作为一种良好的近似，可以用正离子（Na^+）和负离子（Cl^-）在规则的三维点阵或晶格中的交替排列来描述．氯化钠的排列示于图 1.7 (a)．当然，离子不是点电荷，但它们的电荷则几乎是球对称分布的．所以假如每个离子以电量与之相等并位于其中心的点电荷代替时，他们之间相互的电作用力是一样的（我们不久将证明此点）．图 1.7 (b) 画出了这个等价的电学系统．电荷点阵的静电势

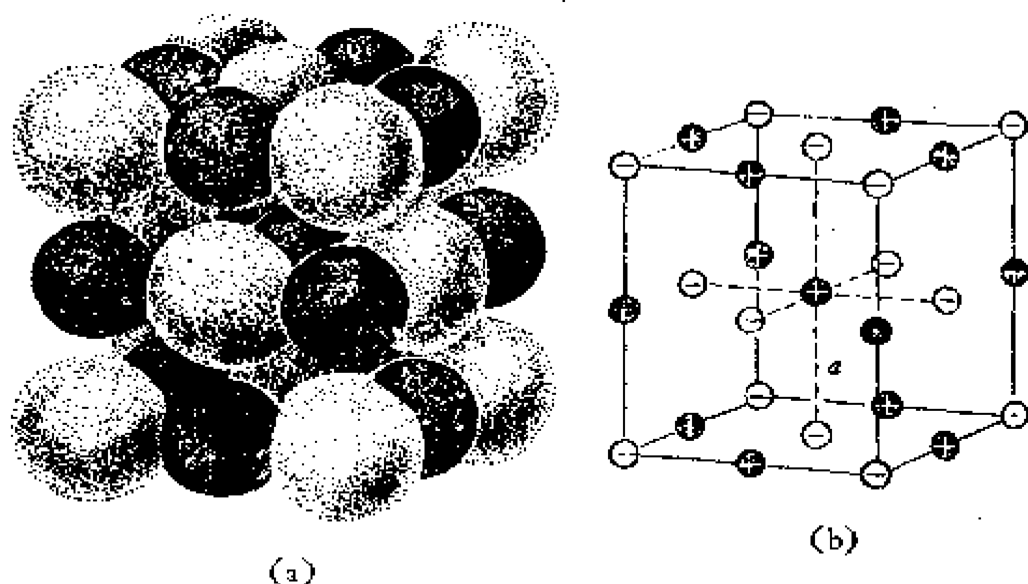


图 1.7 氯化钠晶体的一部分．(a) 表示 Na^+ 离子和 Cl^- 离子正确的相互比例；(b) 表示用等价的点电荷代替后的情形．

能对阐明离子晶体的稳定性和集聚力起着重要作用．试看我们能否估计其大小．

我们似乎马上就会碰到一个极多项的和，如果不是双重无限大的话．因为任何一个宏观晶体都至少含有 10^{20}个原子．这个和收敛吗？现在希望找出的是单位体积或单位质量晶体的势能．我们确信它与晶体的尺寸无关．根据一般的论断，宏观晶体一端对另一端的影响很小．只要晶体表面的原子仅仅是晶体原子总数的很小部分，两克氯化钠的势能就应该是一克氯化钠势能的两倍，而和晶体的形状关系不大．若晶体仅由一种符号的离子组成，这样的预断就错了．这时，一克晶体会带有极大数量的电荷，把两块这样的晶体放在一起形成一个两克的晶体，将会需要数量惊人的能量(读者可以估计一下这有多大！)．事实上晶体是等量反号电荷的交替排列结构，所以任何一块宏观晶体都几乎是中性的，因而可以避免前述情况．

为了计算势能，我们首先要注意到，每一正离子所处的位置与另一正离子所处的位置完全相当．而且氯化钠晶体中正离子围绕负离子的排列，与负离子围绕正离子的排列完全相同，这样交替不断地排列着，虽然这在图 1.7 上或许不能一下子就看出来．所以我们可以选取任一离子做中心，不管那种离子都行，把它与所有其他离子的相互作用都加起来，再简单地乘以这两类粒子的总数．这样式(9)的双重求和就化简为单重求和乘以因子N了．为了抵消每个对计及两次的重复，还需乘以因子 1/2．这样，由总共N个离子组成的氯化钠点阵的能量为

$$U=\frac{1}{2}N\sum_{k=2}^{N}\frac{q_1q_k}{r_{1k}}. \tag{10}$$

如图 1.7(b)，让正离子在中心，对它周围远近各处的全部离子

求和，开始的几项如下

$$U=\frac{1}{2}N\left[-\frac{6e^2}{a}+\frac{12e^2}{\sqrt{2}\,a}-\frac{8e^2}{\sqrt{3}\,a}+\cdots\right]. \quad (11)$$

第一项来自与正离子距离为 a 的六个最近的氯离子，第二项来自立方体边上的 12 个钠离子，如此等等．附带说说，这个级数显然不是绝对收敛的，如果我们想先求出所有正项之和就太蠢了，这和会是发散的．为了计算这样的总和，我们必须把它安排好，当向外扩展以包含更远处的离子时，要按照使离子构成一个个近于中性的物质壳层的方式来分组计算．这样一来，如果这个和在某处截断时，被我们略去的更远处的离子，将是混合得非常均匀的正负电荷，以致我们可以确信它们的贡献会是很小的．对于本来是更为细致的计算问题，这是一个粗略的描述方法．这样一个级数的数值计算现在是用电子计算机来处理的．这个例子的答案是

$$U=\frac{-0.8738Ne^2}{a}, \quad (12)$$

这里 N 是离子数，是 NaCl 分子数的两倍．

负号反映出最邻近的离子起着占优势的作用，并表明要把这种晶体分解成离子必须对它做功．换句话说，电势能有助于解释晶体的结合力．但是，如果这就是事情的全部，晶体将会解体的．因为很明显，当间距 a 全部缩减时电荷分布的势能是显然降低的．在这里我们又遇到了经典物理学（即非量子物理学）的人所熟知的困难．根据经典物理学的规律，在单是电力作用下，不可能有处于稳定平衡的系统．这会使我们前面的分析毫无用处吗？绝不是的．值得注意，并令人高兴的是，在晶体量子物理学中，对电势能仍可赋与意义，并能用和我们这里学到的很类似的办法作计算．

1.7 电　　场

设空间有由固定不动的电荷 $q_1, q_2, \cdots q_N$ 构成的排列．我们并不关心这些电荷之间的相互作用力，而只关心它们对某些可移至其近傍的电荷 q_0 的影响．给出电荷 q_0 的位置(可以用坐标 x、y、z 来标出)，我们就可知道如何计算作用在该电荷上的合力．作用于电荷 q_0 之力为

$$\mathbf{F}_0 = \sum_{j=1}^{N} \frac{q_0 q_j \hat{\mathbf{r}}_{0j}}{r_{0j}^2}, \tag{13}$$

$\hat{\mathbf{r}}_{0j}$ 是由该系统中第 j 个电荷指向点 (x、y、z) 的矢量．此力正比于 q_0．如果以 q_0 除 $\mathbf{F}$，可得一矢量，它只取决于原来电荷系中的电荷 $q_1 \cdots q_N$ 的结构和点 (x、y、z) 的位置．我们把这 x、y、z 的矢函数叫做由电荷 $q_1 \cdots q_N$ 产生的电场[1]，并以符号 $\mathbf{E}$ 来表示它．我们称 $q_1 \cdots q_N$ 为电场源．电荷分布在点 (x、y、z) 之电场 $\mathbf{E}$ 可定义为

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \sum_{j=1}^{N} \frac{q_j \hat{\mathbf{r}}_{0j}}{r_{0j}^2}. \tag{14}$$

图 1.8 画出了 +2 静电单位点电荷的电场和 −1 静电单位点电荷的电场在空间某点的矢量和．在 CGS 制中，电场强度用每单位电荷的达因数表示，即达因/静电单位制电荷．

到此为止，并没有任何真正的新东西．电场只是描写电荷系统的另一种方法．它的描述借助于检验电荷 q_0 在任一点所经受的力，以单位电荷所受的力的大小和方向表示．作这种解释时要注意，只有假定源电荷确实不动才行，否则引入某个有限电荷 q_0 可能使源电荷改变位置，这样一来，式 (14)

1) 通常应称之为电场强度．本书作者常将电场和电场强度混用，我们都按照原文译出，也未加区分，希读者注意．——译者注

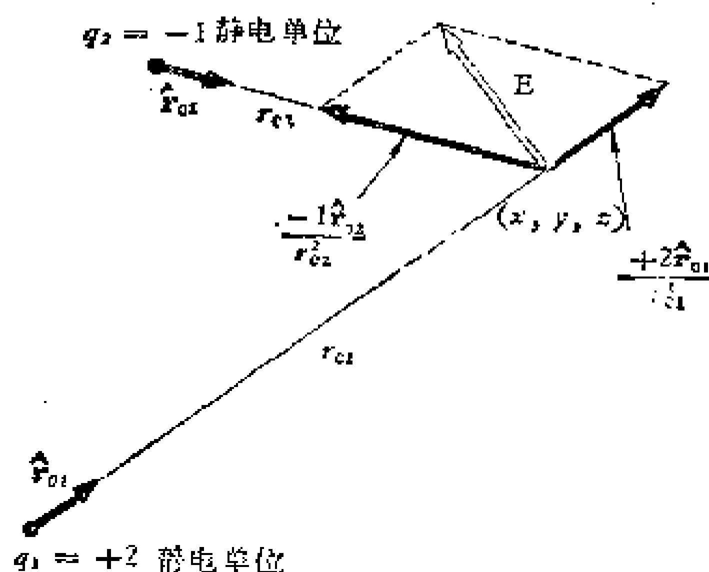


图 1.8　任一点的电场为系统中各电荷电场的矢量和.

所确定的场就不同了. 这就是为什么在开始讨论时，我们就假定电荷固定不动的原因. 有时人们这样定义电场：要求 q_0 是无限小的检验电荷，令 $\mathbf{E}$ 为 $q_0 \to 0$时，$\mathbf{F}/q_0$ 的极限. 但是，这样做所可能带来的任何严格意味都是幻想的. 要记住，在现实世界，我们从未见到过比 e 更小的电荷! 实际上，如果我们把式(14)当作 $\mathbf{E}$ 的定义，而不提检验电荷，倒无任何问题发生，而且不必要求场源固定不动. 但若因引进新电荷而使源电荷移动，则必会引起电场变化；如果我们还想预言对这新电荷的作用力，就必须用改变了的新电场去计算它.

读者可能还想问：电场是什么? 它是客观存在或仅仅是方程中一个因子的名称?——为了给出实验测得的作用力的数值，须将此因子乘上另外的什么东西. 这里从两个方面来考察可能是有用的. 首先，电场的概念是实际有用的，所以不管怎么说都行[1]. 这不是轻率的而是严肃的回答. 其次，要预言任意电荷在空间一点所受的力，只要知道空间某点的电场

1) 现在科学上已经肯定，电场是一种客观存在，是物质存在的一种形式. ——译者注

矢量就足够了．这一事实非常重要．也可能不是这样！如果没有先前做过实验，我们就不敢肯定，在两种情况中，只要单位电荷所受的力相同，则强度为 2 单位的电荷所受的力也应相同，与体系中其它电荷的性质无关．如果不是这样，用电场来描述就无意义了．

电场给系统的每一个点附加有如下意义的一种地域性质：若知道在某小邻域的 **E**，无需更多的要求，我们就可以知道任意电荷在这邻域将会如何．我们无需知道是什么产生了这个场．如果知道在空间所有点的电场，我们就有了对这整个系统的完整描述，并可由它揭示出所有电荷的位置和大小．

为了把电场形象化，需要把一个矢量，即一既有大小又有方向之量，和空间的每一点联系起来．在本书中我们将用不同的图样画出矢量场，但没有一种是完全令人满意的．

在两维图上画三维空间的矢函数图形是件难事．我们可以用在各该点近傍画小箭头（较大的 E 画较长的箭头）的方法[1]，表出在各不同点的 **E** 的大小和方向．我们用这样的图样，把 +3 单位的孤立点电荷的场示于图 1.9(a)，把 −1 单位的点电荷的场示于图 1.9(b)．这些图对于我们了解一个孤立点电荷的场显然没有增加任何新东西．任何人无须借助于图都能想象得出一个简单的径向平方反比的场．画出他们来为的是在图 1.10 中把两个场联合起来，在那图中用同样方法画出了这两个电荷相距为 a 时的场．图 1.10 所能表示的，只是在包含这两个电荷的平面上的场．为了得到完全的三维表示，我们须想像此图绕其对称轴旋转．在图 1.10 中，空间有

1）这至多不过是一种相当粗糙的表示方法．对空间的点标出其所应取的特定矢量值是困难的，而且 E 的数值范围通常都太大，以致使矢的长度正比于 E 是不能实现的．

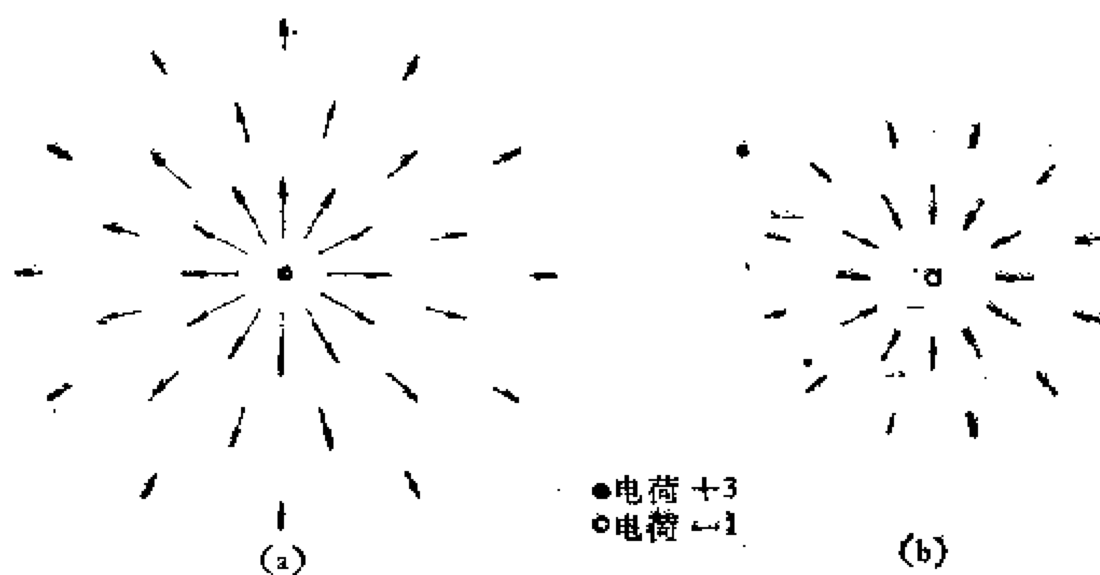


图 1.9 (a)电荷 $q_1=+3$ 的场;(b)电荷 $q_2=-1$ 的场. 这两个表示图都必然是粗糙的,且仅仅是粗略定量的.

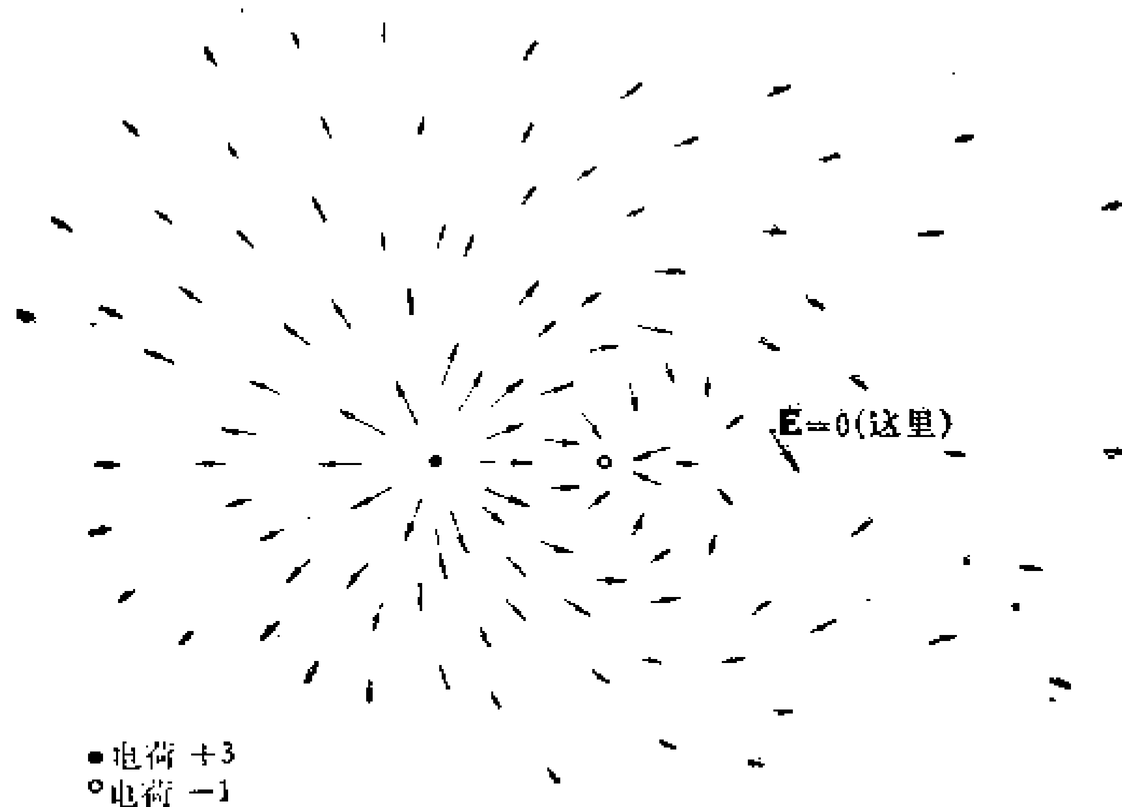


图 1.10 在 $q_1=+3$, $q_2=-1$ 近旁的场是图 1.9(a) 和 (b) 的场的叠加.

个 **E** 为零的点．这点距靠近它的电荷多远呢？还要注意到，在图边上，各处的电场大致都是向外指的．可以看到，在离电荷很远的地方，这场看起来很像一个正点电荷的场．这是预料之中的，因为对于离得很远的点，两个电荷的分离不会产生多大的区别．倘若将这两个场源叠在一点，所剩下的正是 +2 单位的点电荷．

另一种画出矢量场的方法是画出*电力线*．电力线即是这样的曲线，它任意点的切线都沿着该点的电场方向．这种曲线是平滑的、连续的，除了奇点，例如点电荷所在处和象例如图 1.10 中场强为零的那些点是例外．电力线图并不直接给出场强的大小，尽管我们将会看到，一般是在趋近强电场的区域，电力线集聚，而在弱电场区域，电力线分散．图 1.11 里画出

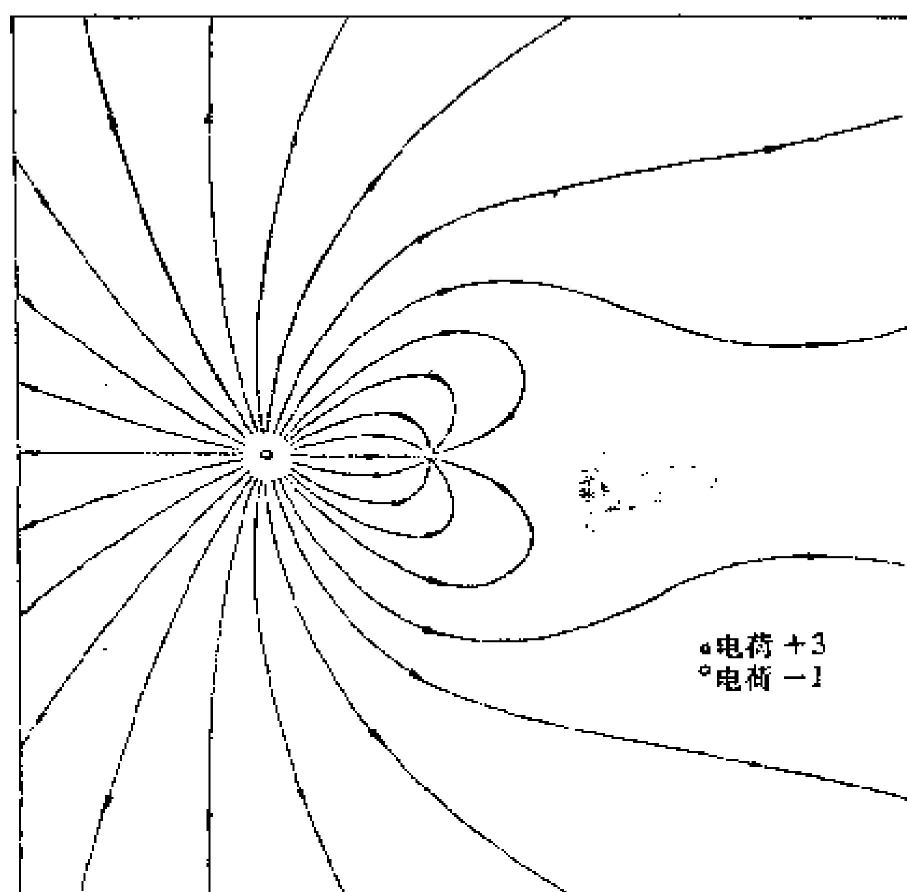


图 1.11 在电荷 $q_1 = +3$ 和 $q_2 = -1$ 周围的电场中的一些电力线．

了象在图 1.10 中那样排列的 3 单位正电荷和 1 单位负电荷系统的电力线. 我们依旧为纸和墨水的性质所限，只能作出三维曲线族的二维截面图.

1.8 电荷分布

现在是从点电荷推广到连续电荷分布的适当时候了. 电荷的体分布用标量函数电荷密度 ρ 来描述，它是位置的函数，具有电荷/体积的量纲. 即 ρ 乘上体元就得到该体元内所包含的电荷. 同一个符号也常常用来表示单位体积的质量. 但是在本书中，符号 ρ 总是首先用于表示单位体积的电荷. 若将 ρ 写作坐标 x, y, z 的函数，则 $\rho(x, y, z)\, dxdydz$ 就是位于 (x, y, z) 体积为 $dxdydz$ 的小盒内所包含的电荷.

当然，在原子的尺度范围，由一点到另一点的电荷密度变化很大. 即使如此，在这范围它仍被证明是有用的概念. 然而我们主要在处理大尺度系统时使用它，该系统的尺度很大，以致体元 $dv = dxdydz$ 与之相比较是十分小的，尽管这体元已大得足以包含许多原子或基本电荷. 正如我们在前面已经注意到的，我们面对着和定义通常的物质密度相似的问题.

如果电场源是连续电荷分布而不是点电荷，我们只须将式 (13) 的求和换为相应的积分即可. 该积分给出由 (x', y', z') 等其它点处的电荷在 (x, y, z) 处所产生的电场.

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \int \frac{\rho(x', y', z')\hat{\mathbf{r}}\, dx'dy'dz'}{r^2}, \qquad (15)$$

这是个体积分. 保持 (x, y, z) 固定，让积分变量 x', y', z' 遍及含有电荷的全部空间，这就把全部带电体的贡献都加起来了. 单位矢量 $\hat{\mathbf{r}}$ 由 (x', y', z') 指向 (x, y, z); 如将 $\hat{\mathbf{r}}$ 的取向反过来，我们就需要在积分号前加个负号. 想保持符号永不

错是困难的．让我们记住，电场的方向是由正电源向外指的(图 1.12)．

在一个真正的点电荷的近傍，当我们趋近该点时，它的电场强度以 $1/r^2$ 的方式增至无限大．因此，谈论点电荷处的场是毫无意义的．由于我们相信物理学上最终的电场源并不是电荷无限集中于零体积的点电荷而是一些有限大小的结构，所以我们完全不考虑点电荷这种提法所包含的数学奇点问题，并且不考虑基本电荷源的内部区域．但值得注意的是，连续电荷分布没有奇点的威胁，而且允许在电荷分布内部各点定义电场．这是因为在 $r=0$ 的邻域，体积元本身按 r^2dr 变化，这就使得式(1.5)中的体积分不致发散了．这就是说，只要 ρ 保持有限，电场就将处处保持有限，即使在电荷分布的内部和边界上也是如此．

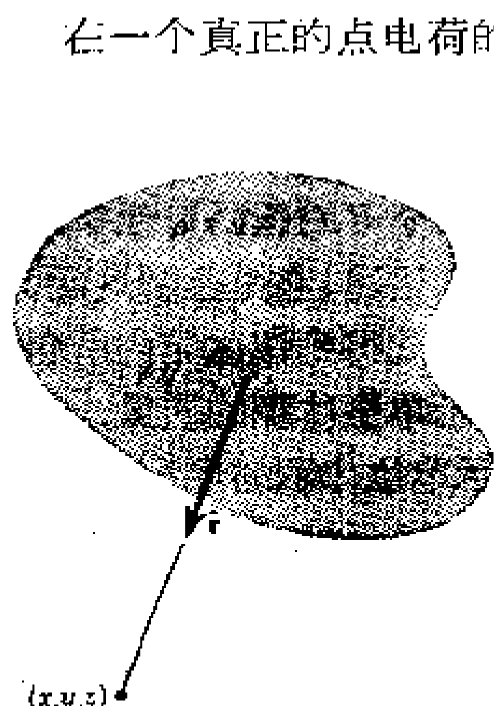


图 1.12 电荷分布 $\rho(x',y',z')$ 中的每个小元都对 (x,y,z) 点的电场 $\mathbf{E}$ 作出贡献．在这点的总电场是所有这些贡献之和[式(15)]．

1.9 通 量

电场和电场源的关系可以用一种特别简单的方法来表示，我们会发现这方法十分有用．为此，需要定义一个称为“通量”的量．

考虑在空间的某电场及该空间的一个任意封闭面，这个面像个任意形状的气球．图 1.13 (a) 画出了一个这样的面，几条电力线表示电场的存在．现在把这整个表面分成许多小

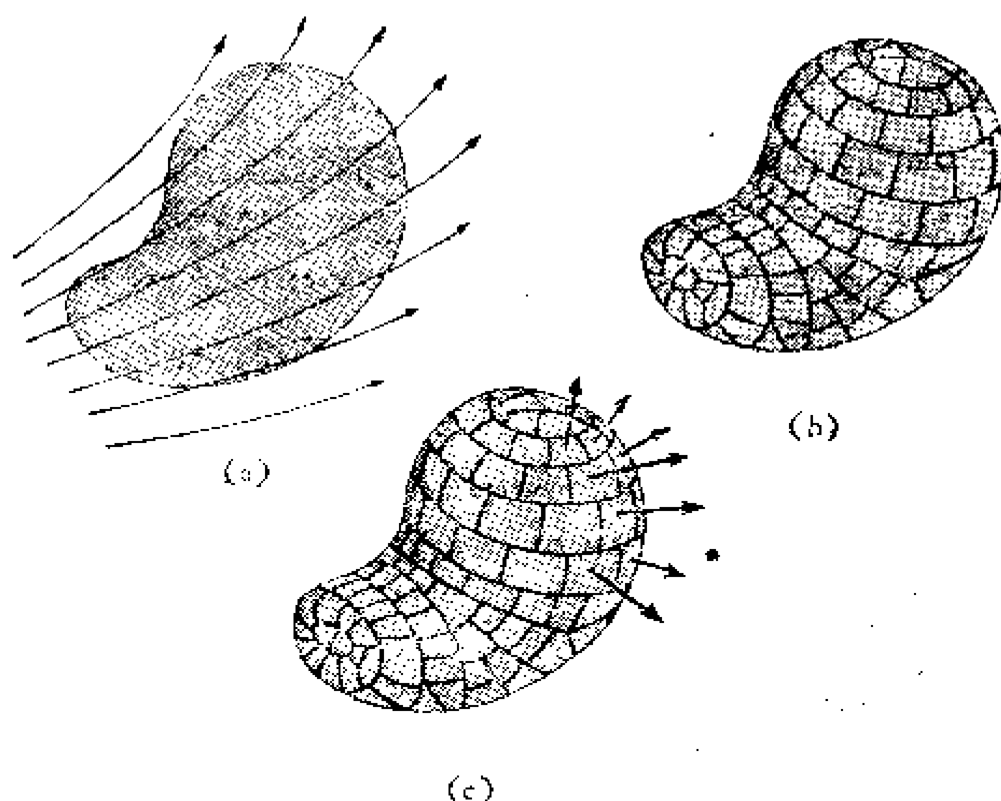


图 1.13 (a) 矢量场中的一个封闭表面；(b) 它被分割成小面积元；(c) 每个面积元用一向外的矢量表示.

片，它们是如此之小，以致于任一小片表面实际上都是平面，而且同一小片上各处的矢量场没有可被察觉的变化. 换句话说，不要让气球太皱，也不要让它正好通过电场的奇点[1]，例如不要通过点电荷. 每个小片的面积有确定的大小，以平方厘米为单位. 每个小片还确定一个单一方向——垂直于表面并从内向外指.（因为该表面是闭合的，故可区分该表面的外部与内部，而无不明确之处）. 用矢量表示这个大小和方向. 对于表面上分成的每个小片，例如第 i 个小片，用矢量 $\mathbf{a}_j$ 给出它的面积和方向. 我们所进行的步骤画在图 1.13(b) 和出

1) 所谓电场的奇点，通常我们不仅是指场强趋于无限大的点源处，而且还指任何场强的大小或方向不连续的地方，例如一个无限薄的电荷集中层. 实际上，后种情况是比较弱的奇点，在此不会引起困难，不过结果气球表面和这不连续表面在某有限面积上相重合那就会引起困难.

1.13(c) 上． 注意矢量 $\mathbf{a}_i$ 完全与小片的形状无关；不管我们怎样分割表面，只要小片足够小就行．

令 $\mathbf{E}_i$ 表示在第 i 个小片处的电场强度矢量．标积 $\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{a}_i$ 是一个数．我们把这个数叫做通过这一小块表面的通量．为了了解这个名称的源由，试想一个表示流体运动速度的矢函数．例如在一条河中，流体的速度各处不同，然而在任一处它都不随时间而变． 用 $\mathbf{v}$ 来表示这个矢量场，譬如说以英尺/秒计量． 设 $\mathbf{a}$ 为某浸没于水中的框架指向一定方向的面积，以平方英尺为单位，则 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}$ 是水通过该架之流量率，以立方英尺/秒为单位(图 1.14)．必须强调，这样的通量定义对于任

通量 $= va$　　通量 $= 0$　　通量 $= va\cos 60^\circ = 0.5va$

图 1.14 通过面积为 $\mathbf{a}$ 的框架的通量为 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}$． 如果 $\mathbf{v}$ 是流体的速度，通量就是单位时间流过框架的流体体积．

何矢函数都能应用，不管它可能代表什么样的物理量．

现在，让我们把通过所有小片的通量加起来以获得通过它表面的通量．它是个标量，以 Φ 表示

$$\Phi = \sum_{\text{全部 } i} \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{a}_i . \tag{16}$$

让这些小片变得无限小，无限多，我们就从式(16)的求和过渡到面积分了：

$$\Phi = \int_{\text{全部表面}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \tag{17}$$

一个任意函数 $\mathbf{F}$ 对表面 S 的面积分意思也正是如此：将 S 划分为小片，每片用一矢量来表示，其大小等于其面积，方向由

内向外指；对每一小片，取其面积矢量与该处$\mathbf{F}$的标积；再将所有这些积加起来，当小片变小时，此和之极限就是面积分．可以预计到要对象图 1.13 那样奇形怪状的表面做这种计算是很困难的，但不必为此担心．我们将要指出一个颇为惊人的性质，它使得我们无需做这样的计算！

1.10 高斯定律

选一种可以想像得出的最简单情形，设电场是一个孤立的正点电荷 q 形成的，表面是以此电荷为球心，半径为 r 的球面（图 1.15），通过这个球面的通量 Φ 是多大？这很容易回答，因为 $\mathbf{E}$ 的大小在球面各点均为 q/r^2，并且它的方向都是沿球面各点的外法线方向；故有：

$$\Phi = E \times \text{总面积} = \frac{q}{r^2} \times 4\pi r^2 = 4\pi q \text{，} \qquad (13)$$

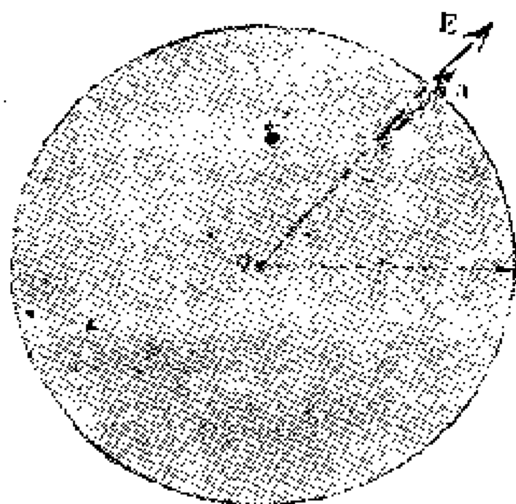


图 1.15 点电荷 q 的电场 $\mathbf{E}$ 中，在围绕 q 的球面上向外的通量是多少？



图 1.16 通过围绕 q 的任意闭曲面之通量，与通过围绕 q 之球面的通量相同．

通量与球之大小无关.

现在设想第二个面,即设想一个气球,非球形并包围着第一个面,如图 1.16 所示. 我们断言通过此面之总通量与通过球面的相同.为理解此点,我们来看一个由 q 处向外辐射的锥体, 它在球面上切出小面 $\mathbf{a}$ 然后继续向前到达外表面, 在那里切出一小面 $\mathbf{A}$, 距点电荷为 R. $\mathbf{A}$ 的面积比 $\mathbf{a}$ 的大两个因子: 第一个是 q 与二者距离的平方之比 $\left(\frac{R}{r}\right)^2$,第二个是由小面 $\mathbf{A}$ 的倾斜带来的因子 $1/\cos\theta$. 角 θ 是外法向与径向之间的夹角(见图 1.16). 在 $\mathbf{A}$ 的邻域, 电场的数值减小为球面上电场的 $\left(\frac{r}{R}\right)^2$倍, 方向仍沿径向. 令 $\mathbf{E}_{(R)}$ 表示外小片处的场, $\mathbf{E}_{(r)}$ 表示球面上的场, 则

$$\left.\begin{aligned}
&\text{通过外小片的通量} = \mathbf{E}_{(R)}\cdot\mathbf{A} = E_{(R)}A\cos\theta,\\
&\text{通过内小片的通量} = \mathbf{E}_{(r)}\cdot\mathbf{a} = E_{(r)}a,\\
&E_{(R)}A\cos\theta = \left[E_{(r)}\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]\left[a\left(\frac{R}{r}\right)^2\frac{1}{\cos\theta}\right]\cos\theta = E_{(r)}a.
\end{aligned}\right\}\quad(19)$$

这就证明了通过此二小片之通量相同.

用这种方法可将外表面的每一小片和球面的一部分对应起来,这样,通过这两个表面的总通量必定相同. 即通过这个新外表面的通量必定正好为 $4\pi q$. 但这个外表面是任意尺寸和形状的[1],于是得出结论: 通过包围点电荷 q 的任意表面的通量为 $4\pi q$. 作为一个推论,我们可以说, 若电荷在闭合曲面之外,则通过该曲面之总通量为零. 这个证明留给读者. 图 1.17 指示了一种可能的论证途径.

---

1) 诚然, 我们取的第二个面包围着球面, 但是并不一定要这样. 此外,球也可以取得任意地小.

有种观察办法使得上述结果显得很明显．假设 q 处有个源，它以稳恒的速率向各方发射粒子——例如子弹或光子．显然，通过单位面积窗口的粒子通量随 q 与窗口距离的平方成反比的减小．因此，我们可以把电场强度 E 与单位时间单位面积上子弹的粒子流强度类比．很明显，通过任何完全包围 q 的表面，子弹通量与该表面的尺寸和形状无关，因为这正是单位时间的发射总数．相应地，通过该闭合面的电场 E 的通量亦必与表面的形状和尺寸无关．使它们具有这种结果的共同特征是强度与距离的平方成反比的性质．

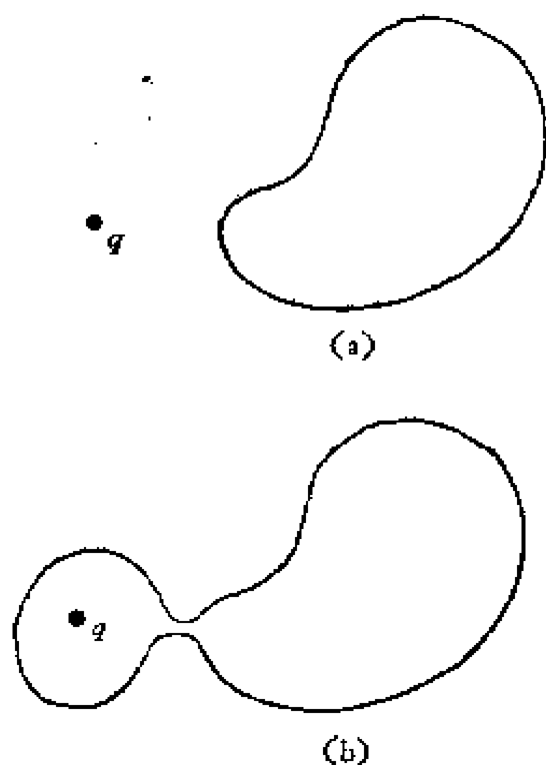


图 1.17　可以用(b)图说明在(a)图中通过 S 的通量为零．

现在该使用叠加原理了．任何电场都是各场源产生的电场之和．这种性质已为库仑定律的陈述式(13)所表达．很清楚，和电场一样，通量也是个可加量；因为如果有许多个源 q_1、$q_2 \cdots q_N$，若它们单独存在时，其场为 $\mathbf{E}_1$、$\mathbf{E}_2$、$\cdots \mathbf{E}_N$，则在实际电场中通过某表面 S 的通量 Φ 可写为

$$\Phi = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_S [\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \cdots + \mathbf{E}_N] \cdot d\mathbf{a}. \quad (20)$$

我们刚刚学过，当电荷 q_N 在 S 内时，$\int_S \mathbf{E}_N \cdot d\mathbf{a}$ 等于 $4\pi q_N$；当 q_N 不在 S 内时则等于零．所以在表面内的每个电荷 q 对式(20)的面积分的贡献恰好是 $4\pi q$，而表面外的电荷的贡献为零．这样，我们就得到了高斯定律

电场 $\mathbf{E}$ 通过任一闭曲面的通量，即对该曲面的积分 $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$，等于 4π 乘该曲面所包围的总电荷量：$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = 4\pi\Sigma_i q_i = 4\pi\int \rho dv.$$	(21)

我们之所以把在框内的陈述称为定律，是因为，当定义了电荷和电场之后，它和库仑定律等价，同样可以作为静电作用的基本定律。高斯定律与库仑定律不是两个独立的物理定律，而是用不同方式表达的同一个定律[1]。

回过头来看看上面的证明，我们看到，高斯定律取决于相互作用平方反比的性质，当然还取决于作用的可加性即可叠加的性质。因此这个定理可用于物理学中任何平方反比的场，例如用于第一卷讨论过的重力场。

容易看出，如果力的作用规律，譬如说，是立方反比的，则高斯定律不成立。因为在这种情况下，从点电荷 q 发出、通过以它为心，R 为半径的球面的电场通量为

$$\Phi = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{q}{R^3} \cdot 4\pi R^2 = \frac{4\pi q}{R}. \tag{22}$$

当球内总电荷保持不变时，只要使球足够大，就可使通过球面的通量任意地小。

这个值得注意的理论在两方面增进了我们的知识，第一，它揭示了场和场源间的联系，它是库仑定律的逆定理。库仑定律告诉我们电荷已知时如何求电场；而用高斯定律则可在电场已知时确定任一区域有多少电荷。第二，这里举出的数

1) 存在着一个区别，在这里不很重要，但是和我们后面对运动电荷的电场的研究有关。比静电场所能代表的类型更广的一些场，也遵从高斯定律。特别是那种与 r 平方成反比但并非球对称的场能满足高斯定律。换言之，高斯定律本身并不像库仑定律中隐含的那样要求点源场是对称场。

学关系是分析问题的一个有力工具，我们将看到，它能把复杂的问题化简。

1.11 球对称电荷分布的场

我们能用高斯定律求出球对称电荷分布（即电荷密度 ρ 只取决于与中心的距离的分布）的电场。图 1.18 画出了一个这种分布的截面图。在这一图上，球心处电荷密度高，随着与球心之间距离的增大，电荷密度先减后增，在 r_0 之外为零。在该电荷分布之外某点，例如 P_1，或其内某点，例如 P_2 的电场如

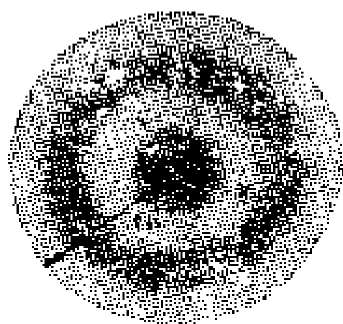


图 1.18 一个球对称的电荷分布.

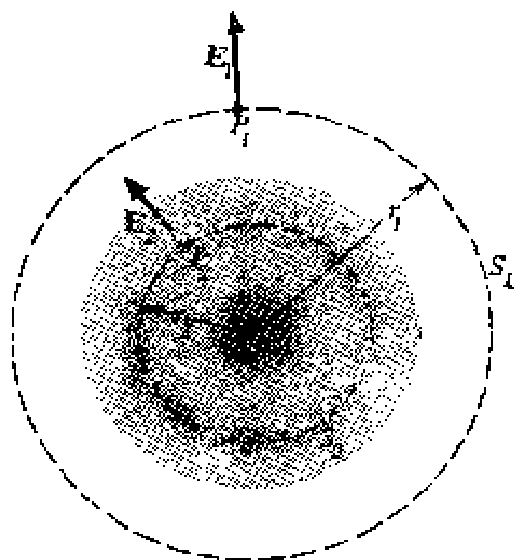


图 1.19 一个球形电荷分布的电场.

何（见图 1.19）？如果我们只能由库仑定律入手，就必须作积分以将电荷分布中各体元在 P_1 所引起的电场矢量加起来。让我们试试利用系统对称性和高斯定律的另一种方法。

由于球对称性，任意点的电场都必是径向的，这是满足对称要求的唯一方向，并且，在半径为 r_1 的球面 S_1 的所有点上，电场强度的数值 E 必均相同，因为这些点都是等价的。称此场强之值为 E_1。故通过表面 S_1 之通量为 $4\pi r_1^2 E_1$。根据高斯定律，它必定等于 4π 乘该表面所包围的电荷。即 $4\pi r_1^2 E_1 =$

$= 4\pi$(S_1 内的电荷)，或

$$E_1 = \frac{S_1\text{ 内的电荷}}{r_1^2} \tag{23}$$

将这与点电荷的场比较，可以看出，S_1 上各点的场强与将 S_1 内全部电荷集中于球心时的场强相同．同样一个球面在电荷分布内上面的论述也适用．S_2 上各点的场强和 S_2 内的全部电荷都处于球心，而 S_2 外之电荷均不存在时的场强相同．显然，在一个中空的球形电荷分布之内，场强为零（图 1.20）．

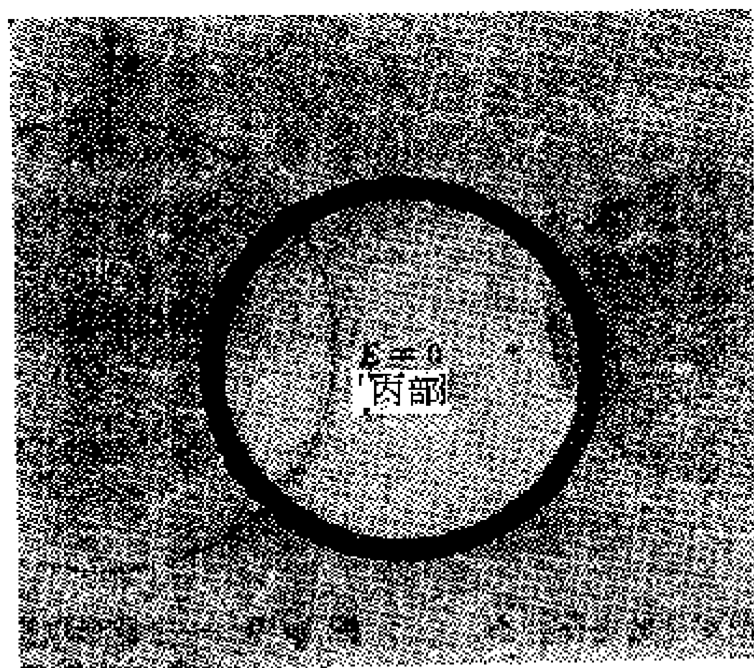


图 1.20　带电球壳内的电场为零．

将同样的讨论应用于引力场将得知，若地球的质量分布是球对称的，则地球对地球外物体的引力就和它的全部质量集中于地心时的一样．这是个大家相当熟悉的说法．在第一卷中，这个事实已用重力势和积分证明了．必须提醒那些认为这个原理表示了质心的一种明显性质的人，一般说来，对于其它形状，这个定理并不成立．密度均匀的正立方体对其他物体的吸引并不像它的质量集中于其几何中心那样．

牛顿并不认为这个定理是显而易见的．但他当时却需要把它作为根本原理，用以论证在轨道上绕地球旋转的月亮和地球上的落体是受同类力的支配．牛顿引力理论的发表几乎延迟了二十年之久，显然是由于，或至少部分是由于，在获得对这个定理令人满意的证明之时遇到了困难．牛顿终于作出证明，并于1686年发表在“原理”一书上（第一卷，第十二章，定理31），这个证明是有创见的．粗略地说，他在那里用了一个巧妙的体积分来论证的，但并不是借助于我们现在所知道的那种积分计算．他的证明比我们前面对高斯定律的全部讨论还长得多，而且有更多错综的推理．尽管牛顿精于数学，但是他没有得到高斯定理，虽然这个定理一旦证明出来之后，看起来好像是那么明显，那么平凡．

1.12 线电荷分布的场

长的带电的金属直线，若忽略其粗细，即可以用单位长度所带电荷的数量来表征．令 λ 代表线电荷密度，以静电单位电荷/厘米来量度．设此线无限长，且线电荷密度 λ 为常量，则此线电荷之电场如何？我们将用两种方法来解答这个问题．第一种方法是从库仑定律出发求积分．

图1.21中，为了计算 P 点的电场，必须把所有的线电荷段的贡献加起来；长为 dx 的小段是这些段的某一个小段．此线元上的电荷 dq 由 $dq=\lambda dx$ 给出．令 x 轴沿线电荷方向取向．我们还可令 y 轴通过点 P，点 P 距线电荷的最近点是 r 厘米．从一开始就利用对称性是个好办法．显然，P 点的电场必定是指向 y 方向的，故 E_x，E_z 均为零．在 P 处电荷 dq 对场强 y 分量的贡献为

$$dE_y=\frac{dq}{R^2}\cos\theta=\frac{\lambda dx}{R^2}\cos\theta, \tag{24}$$

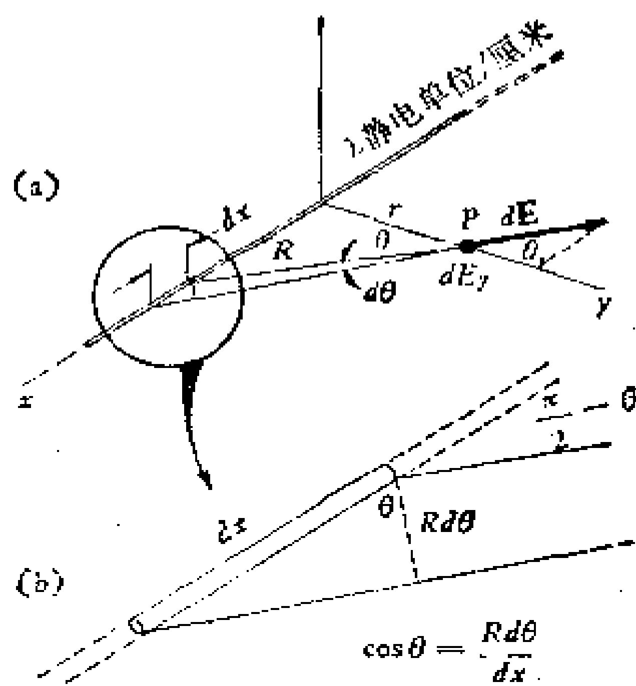


图 1.21 (a) P 点的电场是各线电荷元对它的贡献的矢量和。(b) 是 (a)的详细图形。

θ 是dq的场强矢量和 y 方向的夹角．故 y 分量的总和为

$$E_y = \int dE_y = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda \cos\theta}{R^2} dx, \tag{25}$$

用 θ 作为积分变量很方便．因 $R = r/\cos\theta$ 及 $dx = Rd\theta/\cos\theta$，此积分成为

$$E_y = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\lambda \cos\theta d\theta}{r} = \frac{\lambda}{r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta d\theta = \frac{2\lambda}{r}. \tag{26}$$

我们看到，电荷密度均匀的无限长线电荷的场强和离线的距离成反比．当线带正电时，电场自然是沿径向向外的；带负电时，则是沿径向向内的．

高斯定律直接导致同样的结果．如图 1.22 所示，以长 L，半径 r 的封闭圆柱环绕线电荷的一段，并考查通过其表面的电通量．正如我们已经注意到的，对称性保证此场沿着径向，故通过圆柱体的两端面的通量为零．通过柱面之通量仅

仅是 $2\pi rL$ 乘上在柱面上的场强 E_r. 另一方面，这表面包围的电荷恰为 λL，故高斯定律给出 $2\pi rLE_r = 4\pi\lambda L$，或

$$E_r = \frac{2\lambda}{r}, \qquad (27)$$

和式(26)一致.

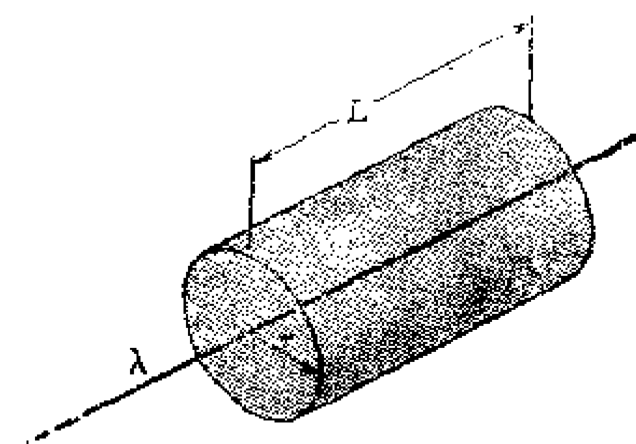


图 1.22 用高斯定律求线电荷的电场.

1.13 无限大带电平板的场

电荷平滑地分布在薄板上时称为面电荷分布. 考虑面电荷密度为常数 σ 的无限延伸的平面薄板. 板两边的电场不管大小如何，必沿垂直于此板的方向. 在这系统中没有其它独特方向. 还是由于对称性的缘故，在平板两边等距离的 P 和 P' 两点，场强必大小相等而方向相反. 基于以上事实，可由高斯定律立即给出场强，方法如下：画一截面积为 A 的圆柱，令 P 和 P' 分别在这圆柱的两个端面，如图 1.23 所示. 仅在圆柱的两个端面有向外的通量，故若 E_P 表示 P 点的场强数值，$E_{P'}$ 表示 P' 点的场强数值，则向外的通量为 $AE_P + AE_{P'} = 2AE_P$. 被包围的电荷是 σA，故 $2AE_P = 4\pi\sigma A$，或

$$E_P = 2\pi\sigma. \qquad (28)$$

我们看到，场强与同板的距离 r 无关. 式(28)也可比较费事地由计算平板上所有小电荷元对 P 点场强的贡献的矢量和而得到.

我们发现，无限长线电荷的场，和离线的距离成反比，而无限大平板的场，在各距离下场强都相同. 这都是点电荷的

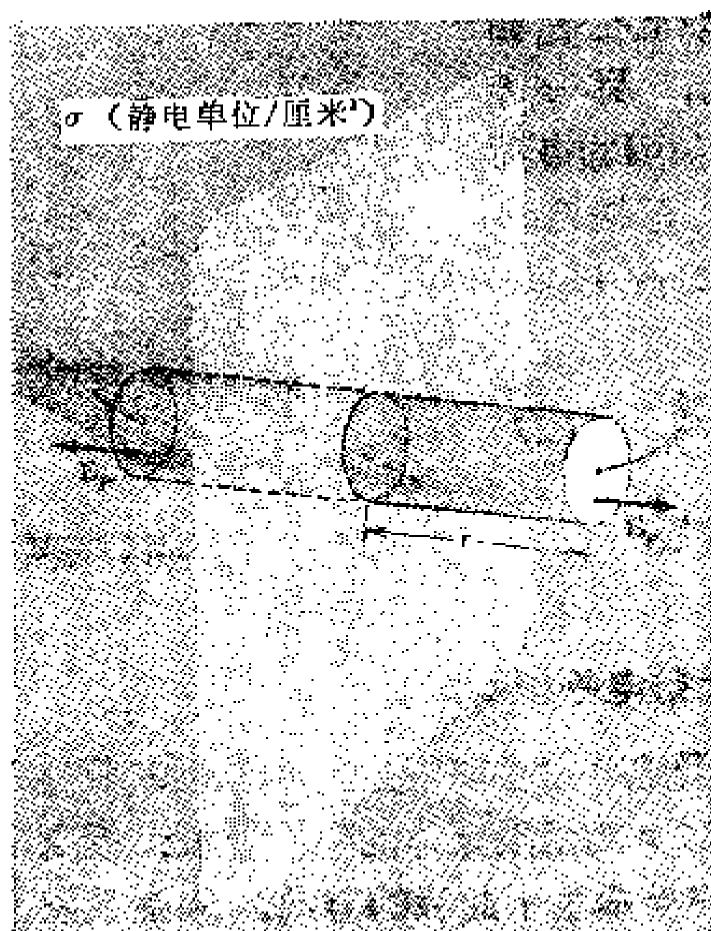


图 1.23　用高斯定律求无限大带电平板的电场.

场和距离的平方成反比这个事实的简单结果．如果读者感到这个结果还不很明显，可以这样看一看：粗略地说，在图1.21中线电荷对 P 点的场起主要作用的部分是与 P 点接近的部分——长度为 r 数量级内的那段电荷．若将这段的所有电荷聚在一起而忽略其余部分，就有大小为 $q \approx \lambda r$ 的一个集中电荷，它应当产生的场强正比于 q/r^2，亦即 λ/r．对于平板，在同样的意义下，"有效"电荷的数量，当我们离开平板时是与 r^2 成正比地增加的，这正好与任一给定电荷元的场强按 $1/r^2$ 减小相抵消.

习　　题

1.1 (a) 试比较相距为 r 的两个电子的电斥力和万有引

力．为了使这两种力正好平衡，电子的质量应当是多大？（基本常数如电子的电荷、质量和万有引力常数G在本书书末的附表中给出）

[一个基本问题：基本粒子的万有引力和电作用力的相对强度.]

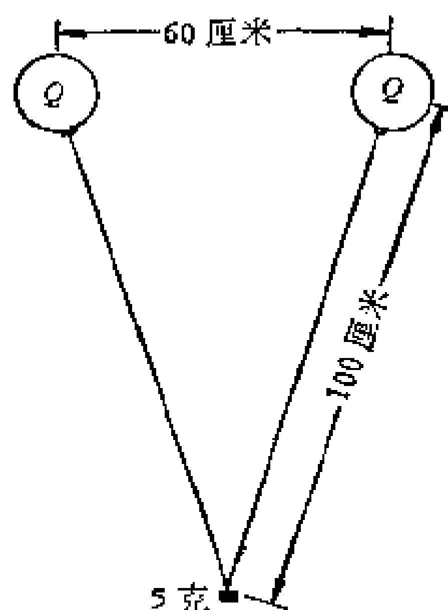
(b) 在万有引力定律中（第一卷），G是必须由实验确定的常数，因为质量的单位，克，是独立地定义的．在 CGS 静电制中，库仑定律本身被用来定义电荷的单位．假设质量的单位也是用同样的方法定义出来的，那么在这种单位制中，你所得到的质量单位是什么？

[记住，质量和电荷的单位是用不同的方法定义的.]

1.2 在边长为b的正方形的四角，依次放着电荷q，$2q$，$-4q$和$2q$，它的正中心放着一个单位的正电荷，问这个电荷所受的电作用力怎样？

[库仑定律]

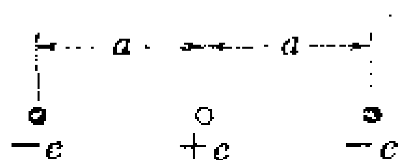
1.3 两个同样的气球充满氦，绑上5克的重物象图上所表示的那样平衡地飘浮着．每个球都带电Q，求出Q的量值（以静电单位为单位）．（答案：1920 静电单位）



习题 1.3

1.4 三个电量为$(-e)$的电荷各放在边长为r的等边三角形的三个顶点上，电荷$Q>0$放在该三角形的重心上，为使每个负电荷受力为零，Q之值应当多大？由于对称性，显然，作用于Q上的力永远为零．此系统处于稳定平衡吗？

1.5 三个电荷位置如图所示：



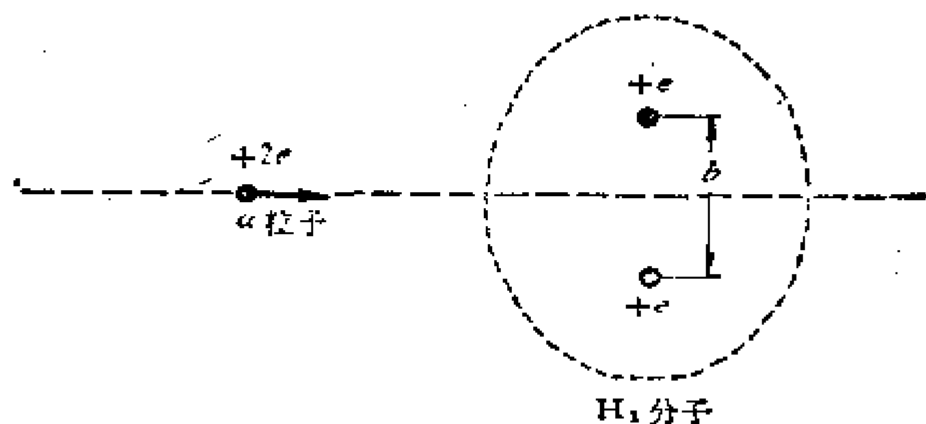
习题 1.5

(a) 计算作用于每个电荷的静电力；

(b) 计算这个电荷组态的总势能。

[点电荷系统的势能]

1.6 一个 α 粒子沿着垂直于两个氢原子核轴线的路径迅速通过氢分子的正中心。二氢原子核相距 b。在其所经的路径上 α 粒子在何处受力最大？假设在 α 粒子经过时，氢原子核移动很小(由于 α 粒子经过的速度很高，这个假设能适用)。另外，还必须忽略氢分子中两个电子的电场(因为 H_2 分子的中心区域有可观的负电荷集中，所以这不是一个很好的近似)。



习 题 1.6

1.7 找出使一个质子两个电子的系统势能为零的几何排列。这三个粒子在同一直线时有多少种这样的排列？

1.8 对无限长的一维离子晶体(即电荷大小为 e 而符号正负相间的空间电荷链)，计算每个离子的势能。

[提示：可以用 $\log(1+x)$ 的级数展开]

1.9 一个半径为 a 的球体充满均匀密度 ρ 的电荷，我们

想知道这个带电球的势能，亦即把这些电荷聚集起来要做的功。采用分层作球体的办法来进行计算，计算时运用这样的事实：球形电荷分布在球外产生的电场等于全部电荷集中于球心时所产生的场，假定此球已增大到半径为 r，试问在半径等于 r 这一步时，总电荷是多少？此时加一厚度为 dr 的无限小壳层，把这一层的电荷由无限远拿到半径 r 处时，所做的功 dU 是多少？然后，由 $r=0$ 至 $r=a$ 积分。试以球的总电荷 Q 表示其结果。

$$\left(\text{答案：}\ U=\frac{3}{5}(Q^2/a)\right)$$

[一种电荷分布的势能]

1.10 本世纪初，认为电子的静止质量可能纯粹来源于电的这种想法是很有吸引力的。尤其当狭义相对论给出能量与质量的相当关系以后更是如此。设想电子是个电荷球，至某最大半径 r_0 为止，其体密度为一常数。用习题 1.9 的结果，令这系统的势能等于 mc^2，看看得到的 r_0 是什么。这种模型有一个很明显的缺陷：不能提供把电荷维持在一起的作用力。

[一种电子模型]

1.11 在粗略近似中，重原子核若仅就其电结构而论，可以用具有恒定体电荷密度为 4×10^{23} 静电单位/厘米^3 的物质球来描写。若总电荷为 $92e$ 的铀核分裂为两个相同半径和相同电荷的核，然后二者远远分开，其电能变化是多少？先以尔格表示，然后用百万电子伏特表示。

[原子核的电势能]

1.12 两个点电荷位于 x 轴上，在 $x=+2$ 厘米处的电荷为 $+1$ 静电单位，在 $x=-2$ 厘米处的电荷为 -4 静电单位。

(a) 计算在 y 轴上点(0,3,0)的电场强度的大小和方向。可首先找出电场强度在该点的各分量；

(b) 找出场强为零的点的位置. 这种点有一个以上吗？

[两个点电荷的场]

1.13 直径 10^{-2} 厘米的小水滴带有负电荷，致使水滴表面电场为 20 静电伏特/厘米，为了不让这个水滴下落，在垂直方向上需要多强的电场？

[电场中的带电体]

1.14 有证据表明，地球表面以上的电场不为零，甚至平均起来也不为零. 假定在地球上空的许多不同点上同时进行测量，确定出向上的平均场强为 10^{-3} 达因/静电单位，且为负值，这意味着地球表面上有多少过剩电荷？试以每平方厘米的额外电子数来表示.

[大气中的电场]

1.15 通常状况下中性氢原子的行为从某些方面来看，好像是个这样的电荷分布，一个大小为 $+e$ 的点电荷被密度为 $-\rho(r)=Ce^{-\frac{2r}{a_0}}$ 的负电荷所围绕. a_0 是"玻尔半径"，0.53×10^{-8} 厘米，C 是为了使负电荷总量正好等于 e 所需要的常量. 在半径为 a_0 的球内净电荷是多少？距核 a_0 远的地方电场强度有多大？

[氢原子中的电场]

1.16 一根不导电的细塑料杆，被弯成近于完整的圆. 圆的半径为 50 厘米. 杆的两端间有个 2 厘米的缝隙. 1 静电单位的正电荷均匀地分布于这个杆的全部长度. 问圆心处电场的大小和方向如何？

[如果想到对称性和叠加原理就很简单了]

1.17 (a) 点电荷 q 位于边长为 d 的立方体的中心，对立

方体一个面 $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ 的值是多大?

(b) 若电荷移至立方体的一角,此时通过立方体每个面的 $\mathbf{E}$ 的通量是多少?

[高斯定律]

1.18 面电荷密度为 $\sigma = 6$ 静电单位/厘米²和 $\sigma = -4$ 静电单位/厘米²的两个无限大带电平板相互平行并相距二厘米,试讨论这个系统的电场. 假定二平板不是平行,而是垂直相交,示出这样分成的四个空间区域中每一个区域的电场的样子.

[平板面电荷]

1.19 一个无限大平板的表面上均匀地分布着面密度为 σ 的电荷,它的紧右边是体电荷密度均匀为 ρ,厚为 d 的无限大带电平行层. 所有的电荷都固定,求各处的 $\mathbf{E}$.



习题 1.19

1.20 库仑定律表达的重要事实之一是:同类电荷间相互的斥力与异类电荷间相互的引力一样强. 为了看出这不是一个无意义的定义问题,并且为了探讨它的一些应用,设想一个在这方面和我们的世界不相同的世界. 在那个世界里,单位电荷是采用同类电荷间的作用力来定义的. 二相等的单位正电荷相距 1 厘米时以 1 达因之力相互排斥;两个负电荷情形也一样.平方反比律和叠加原理都仍然成立. 但是,单位正电荷和单位负电荷相互之间以 k 达因之力相吸引,$k > 1$. 试证明,在那个世界里,可以找到三个集聚电荷全部是相互吸引的情况. 在我们的世界有此可能吗? 在那个世界,对电量的概念需要推广吗? 那里电场强度的概念又如何? 为了预言空间某处任一带电体所受

之力，必须用检验电荷在该点进行多少次不同的测量才行呢？对于 $k<1$，试描述在那个世界可能发生的与我们的世界所能发生的完全不同的事情.

[供讨论的问题：一个不同的世界]

1.21 对于球对称分布电荷的电场的定理（即在球外的场，与电荷全部在球心时所得到场是相同的，而在中空的球电荷分布内，电场为零）. 当电荷是轴向上无限延伸的柱对称分布时（例如一根长的带电管子），有个相当的定律. 试陈述并证明在这种情形下的相应定理.

[柱电荷分布]

1.22 考虑一个球电荷分布，由 $r=0$ 至 $r=a$，其密度为常量 ρ_0，在 a 以外密度为零. 求出各 r 处的电场，包括大于和小于 a 的情况. 当经过这个电荷分布的表面 $r=a$ 时，电场有不连续的变化吗？ 在 $r=0$ 处，有不连续的变化吗？

[电荷密度分布均匀的球的场]

第二章 电 势

2.1 电场的线积分

若 $\mathbf{E}$ 为某些稳定电荷分布的电场。令 P_1、P_2 表示在这电场中的任意两个位置。这两个给定点间的曲线积分为 $\int_{P_1}^{P_2}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$，由 P_1 至 P_2 取如图 2.1 所示的某一路径。这积分的含意是：将路径分为许多短段，每段以连接其二端点的矢量表示；再取此矢量与其所在处电场 $\mathbf{E}$ 的标积，然后，把整个路径上的这些标积加起来。象通常一样，当使路径段越变越短，其数目无限增多时，这标积之和的极限，就认为是上述线积分。

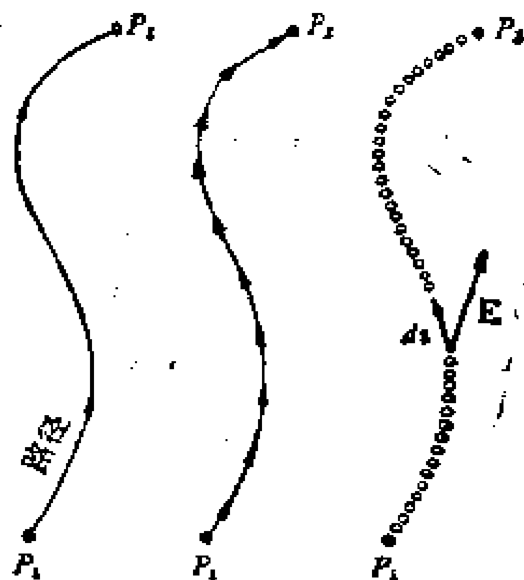


图 2.1 将路径划分为路径元 $d\mathbf{s}$。

我们来计算一个具体的例子。假设有个电场 $\mathbf{E}$，其分量 $E_x=Ky$，$E_y=Kx$，K 为常数。这恰好是静电场的一种可能类型（不久我们就会学到，怎么能很快的识别它）。图 2.2 (a) 示出了一些电力线。在 A 点和 C 点间 $\mathbf{E}$ 沿图中特殊路径 ABC 的线积分的值是多大？代表路径元的矢量为

$$d\mathbf{s}=\hat{\mathbf{x}}dx+\hat{\mathbf{y}}dy. \tag{1}$$

由于矢量 $\mathbf{E}$ 在此为

$$\mathbf{E}=K(\hat{\mathbf{x}}y+\hat{\mathbf{y}}x), \tag{2}$$

故对任何路径元，标积 $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$ 为

$$\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = K(ydx + xdy). \tag{3}$$

在沿路径 A 至 B 的一段上，$y = 2x$，$dy = 2dx$，因此

$$\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = K\int_A^B (ydx + xdy) = K\int_0^1 (2xdx + 2xdx)$$

$$= 4K\int_0^1 xdx = 2K. \tag{4}$$

沿该路径由 B 至 C 时，$y = 2$，$dy = 0$

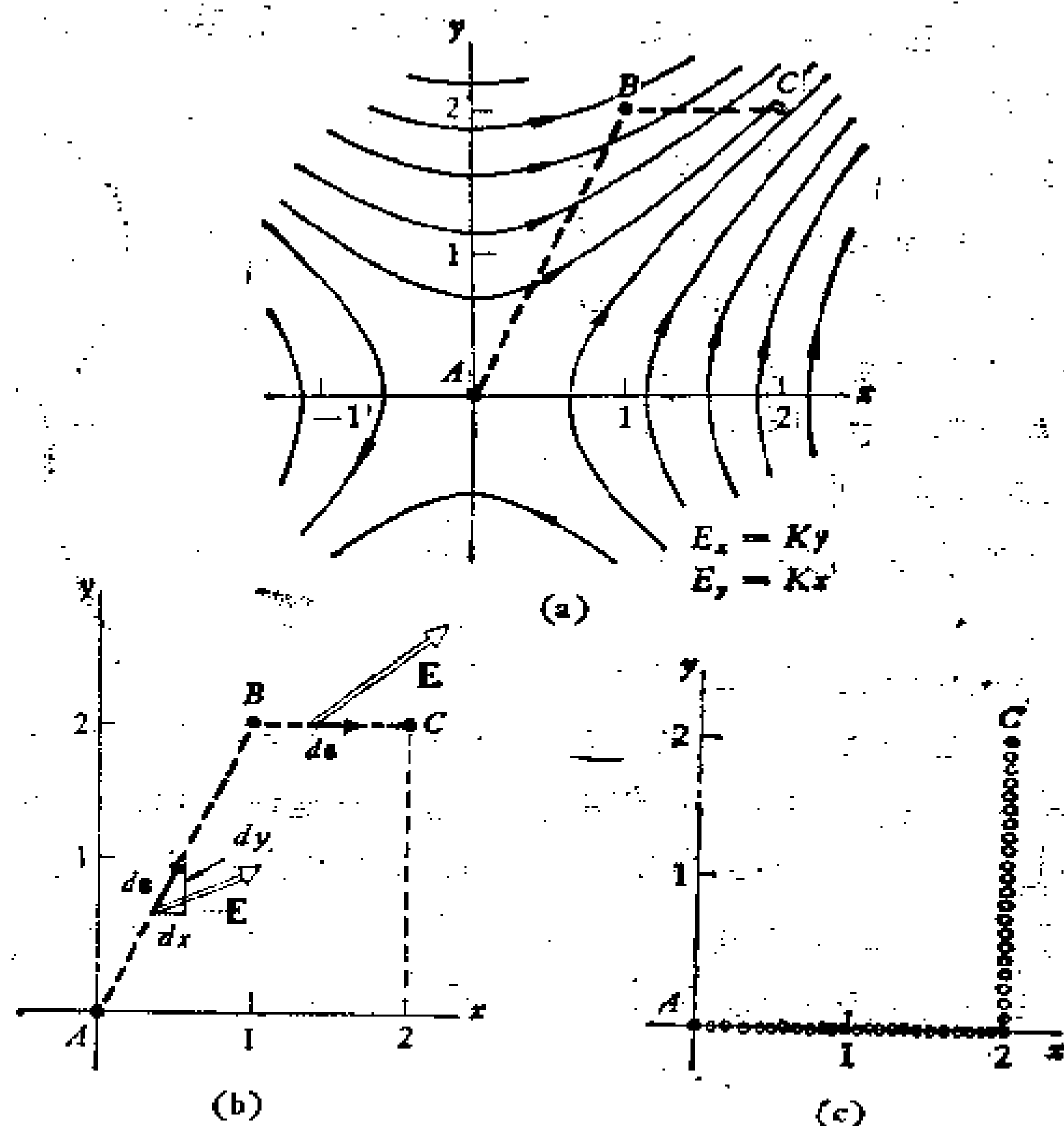


图 2.2 (a) 在电场 $E_x = Ky, E_y = Kx$ 中的特殊路径 ABC。还示出了一些电力线。(b) 计算沿这路径的曲线积分 $\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$，见式(3)至式(5)。(c) 这两点间的另一路径。

$$\int_B^C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = K\int_B^C (ydx + xdy) = K\int_1^2 2dx = 2K. \quad (5)$$

因此，沿路径 ABC 的线积分为 $2K + 2K$，即 $4K$.

点电荷的电场是径向的，其大小只依赖于半径 r. 若 P_1、P_2 为点电荷电场中任意二点，很明显，对于联接这二点的一切路径，$\mathbf{E}$ 的线积分都相同. 这可由 1.5 节中图 1.5 例示对于在中心力场中运动电荷所做功的讨论直接得到. 事实上，在检验电荷 q 上的作用力 $\mathbf{F}$ 的线积分，与检验电荷运动所经过的场 $\mathbf{E}$ 的线积分，只差一个因子 q. 如式 (1.14) 和 (1.15) 所表出的，任何静电场都只是某些电荷的电场的叠加. 因此，在任何一个这种场里，所有场源产生的总电场 $\mathbf{E}$ 的线积分，必与路径无关

> 在静电场中，对于一切联接 P_1、P_2 的路径，$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ 的值相同. (6)

作为例子，我们考虑图 2.2(c) 中由 A 至 C 经过 (2, 0) 的线积分. 场 $\mathbf{E}$ 和前面讨论的相同. 第一段路径是沿 x 轴在原点与 $x = 2$ 之间，电场与路径垂直，$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ 为零. 第二段上，$E_y = Kx = 2K$，路径长 2 单位，得线积分为 $4K$，和以前所得结果相同. 实际上，我们一旦知道这类线积分必定与路径无关后，再去计算像 ABC 那样路径的线积分就显得笨拙了. 事实上，我们常常无需计算线积分的数值. 举这个例子的主要目的，是为了让大家确切地理解线积分的含意.

2.2 势差与势函数

因为在静电场中，线积分与路径无关，我们可以用这积分来定义标量 φ_{21}

$$\varphi_{21} = -\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \tag{7}$$

因此，φ_{21} 是在电场 $\mathbf{E}$ 中由 P_1 移动一个正电荷到 P_2 时，对每单位电荷所做的功．故 φ_{21} 是 P_1，P_2 这两个位置的单值标量函数．我们称它为两点间的电势差．

在 CGS 制中，电势差以尔格/静电单位电荷来度量．这个单位有它自己的名称：*静电伏特*．伏特则是 MKS 制中电势差的单位[1]，它等于 1/299.79 静电伏特，即近于 1/300 静电伏特．将 1 库仑电荷移过 1 伏特电势差时，需作 1 焦耳（10^7 尔格）的功．

若将 P_1 固定在某参考位置，则 φ_{21} 成为仅仅是 P_2 的函数了，亦即只是空间坐标 x，y，z 的函数了．我们可以不用下标而将其简单地写为 $\varphi(x, y, z)$，只要我们记住它的定义中还包含着关于参考点 P_1 的规定就行．我们称 φ 为与矢量场 $\mathbf{E}$ 相关的势．它是位置的标量函数，或说是个标量场（二者指着同一件事）．它在某点之值只是个数（以单位电荷的功为单位），而与方向无关．矢量场 $\mathbf{E}$ 一经给出，除了由于 P_1 选择的任意性而有一个任意附加常数之外，势函数 φ 也就确定了．

作为例子，让我们求出与图 2.2 中所描述的电场相关的势．把 P_1 放在原点，即图 2.2 中标为 A 的点，是很方便的．为了计算由这参考点到某一般点 (x, y) 的

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}, \tag{8}$$

用图 2.2(c) 中虚线所示的那种路径是最容易的：

---

1) 与库仑、安培、欧姆一样，在完整的 MKS 电学单位制创制出来之前很久，伏特就作为一种"实用"电学单位而通用了．

$$\varphi(x,y) = -\int_{(0,0)}^{(x,y)} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$$

$$= -\int_{(0,0)}^{(x,0)} E_x dx - \int_{(x,0)}^{(x,y)} E_y dy. \tag{9}$$

如我们先前已注意到的，因为这电场沿 x 轴的 E_x 为零，故第一项积分为零；第二项积分是在 x 值不变下进行的，因 $E_y = Kx$，故积分为：

$$-Kx\int_0^y dy, \tag{10}$$

其值为 $-Kxy$. 故对于这个场，势为

$$\varphi = -Kxy. \tag{11}$$

在这 φ 上可附加一任意常量，这样做仅仅意味着电势为零的参考点被指定在另外的地方.

必须注意，不要把与某给定电场 $\mathbf{E}$ 相关的电势 φ 同电荷系的势能混淆起来. 电荷系的势能是把这个电荷系聚在一起时所需要做的总功. 例如，在式(1.8)中，我们用 U 表示图1.6中电荷系统的势能. 图1.6中，与电场相关的电势 $\varphi(x,y,z)$ 是，在这九个电荷所构成的电场中[1]，把单位正检验电荷由无限远移至 (x,y,z) 点时所需的功.

2.3 标量函数的梯度

给出电场后，我们可以找到电势函数. 我们也可以反过来由电势求出电场.式(7)显示出，在某种意义下，电场是电势函数的微商. 为了把这个概念弄得更确切，我们引入位置标量函数的梯度. 令 $f(x,y,z)$ 是坐标的连续可微函数. 可用其偏微商 $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, $\partial f/\partial z$ 在空间各点构造一个矢量，这

1) 原书误为"在这八个电荷……". ——译者注

个矢量的 x, y, z 分量分别等于上述偏微商[1]. 我们称这矢量为 f 的梯度，写作 grad$f$ 或 ∇f.

$$\boxed{\nabla f = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial f}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial f}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial f}{\partial z}.} \tag{12}$$

∇f 是指明函数 f 在某点的邻域如何变化的矢量. 其 x 分量是 f 相对于 x 的偏微商，即当我们沿 x 方向运动时，这个分量就是 f 变化率的度量. 矢量 ∇f 在任何一点的方向是这样的方向，当由这点开始沿此方向运动时，函数 f 增大得最快. 假若我们处理的是只有两个变量 x 和 y 的函数，那么这个函数就能用三维曲面来表示. 站在这曲面的某点，我们看见曲面沿某方向上升，并沿相反的方向下降. 沿某方向走一小步比沿任何其它方向走同样一步要升高得多，这函数的梯度就是沿这上升最陡方向的矢量，其大小是在该方向测得的斜率.

图 2.3 有助于把这些形象化. 假设有一个坐标 x, y 的特定函数，由图 2.3 (a) 中的 $f(x, y)$ 曲面来表示. 在 (x_1, y_1) 处，这曲面沿与 x 的正向成大约 80° 角的方向上升最急剧. $f(x, y)$ 的梯度 ∇f 是 x 和 y 的矢函数. 采用在两维平面上画出各不同点 [其中也包括 (x_1, y_1) 点] 的矢量的办法，把它的特征表示在图 2.3(b) 中. 式(12) 所定义的矢函数 ∇f 不过是把这种想法推广到三维空间 [注意不要把图 2.3 (a) 和真正三

1) 请读者注意一下，x, y, z 的函数相对于 x 的偏微商，简化地写为 $\partial f/\partial x$，指的是其余两个变量 y 和 z 保持不变时，这函数相对于 x 的变化率. 更确切地说，

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

作为一个例子，若 $f = x^2yz^3$，则

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xyz^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2z^3, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 3x^2yz^2.$$

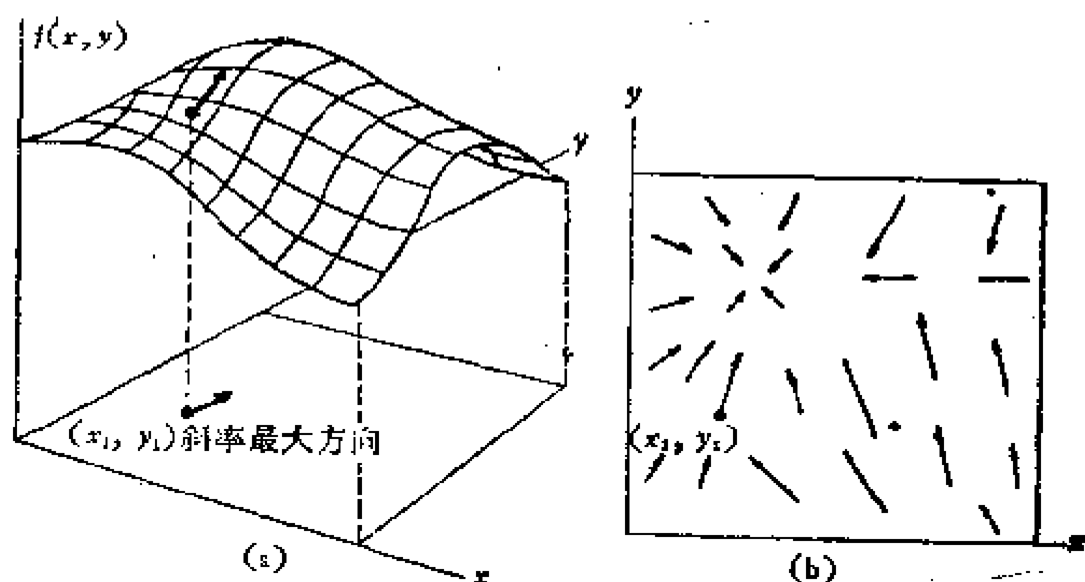


图 2.3　标量函数 $f(x, y)$ 是由图 (a) 中的曲面来表示的．图 (b) 中的箭头表示矢函数 grad$f$．

维的 xyz 空间混淆起来；图 2.3 (a) 中的第三个坐标是函数 $f(x, y)$ 的值]．

作为三维空间矢函数的一个例子，设 f 只是 r 的函数，r 是距某固定点 O 的距离．在以 O 为圆心，半径为 r_0 的球面上，$f = f(r_0)$ 是个恒量．在半径 $r_0 + dr$ 的稍大的球面上，它也是个恒量，其值为 $f = f(r_0 + dr)$．如果我们想由 $f(r_0)$ 变到 $f(r_0 + dr)$，我们所能选取的最短的一步是沿径向的，在图 2.4 中，是由 A 至 B 而不是 A 至 C．f 的“斜率”沿径向最大，故 ∇f 在任何点都是径向指向的矢量．实际上，在这种情形下，$\nabla f = \hat{r}(df/dr)$，对于任何点，$\hat{r}$ 表

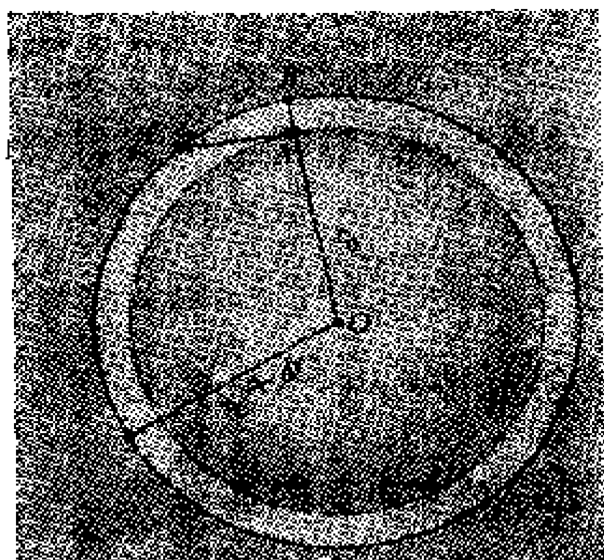


图 2.4　如果 f 只是 r 的函数，对于 f 的某一变化，最短的一步是沿径向的 AB．

示沿径向的单位矢量.

2.4 由势引出场

现在很容易看出，标量函数 f 与矢函数 ∇f 之间的关系，和势 φ 与场 $\mathbf{E}$ 间的关系，除了差个负号之外，完全相同. 考虑二邻近点 (x, y, z) 和 $(x+dx, y+dy, z+dz)$ 处的 φ 值，从前一点到后一点，φ 的变化为

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz. \tag{13}$$

另一方面，由 φ 的定义，这个变化也可以表为

$$d\varphi = -\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}. \tag{14}$$

无限小位移矢量 $d\mathbf{s}$ 正是 $\hat{\mathbf{x}}dx + \hat{\mathbf{y}}dy + \hat{\mathbf{z}}dz$，故若将 $\mathbf{E}$ 和 $-\nabla\varphi$ 等同起来，则式(13)和式(14)也就成为等同的了. 于是，电场就等于电势梯度的负值

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla\varphi.} \tag{15}$$

由于电场由正电势区域指向负电势区域[1]，而矢量 $\nabla\varphi$ 则定义为指向 φ 增加的方向，故式(15)中有个负号.

为了说明式(15)如何应用，我们回到图 2.2 中上，以这种场为例来说明. 由式(11)给出的势 $\varphi = -Kxy$，我们可以这样来找出原来的电场

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\nabla(-Kxy) = -\left(\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y}\right)(-Kxy)\\ &= K(\hat{\mathbf{x}}y + \hat{\mathbf{y}}x).\end{aligned} \tag{16}$$

2.5 分布电荷的势

因为我们在式(1.3)中计算过把一个电荷移到另一个电

1) 电场的方向由高电势区域指向低电势区域更合适些. ——译者注

荷的邻域时所需要的功，所以我们就已经知道了单个点电荷的势．在孤立点电荷 q 的场中，任一点之势恰好是 q/r，r 为所讨论点到源 q 的距离．这时，我们已经指定距源无限远的点电势为零．

和场一样，叠加原理对于势也必然成立．如果有好几个源，势函数就是每个源单独存在时我们所得到的势函数之和——假若对每一种情形，我们都指定同一的势零点的话．如果这些源全都包含于某有限区域内，这种情况可能是经常出现的；通常最简单的选择，是把零电势选在无限远处．如果采用这样的规定，任一电荷分布的势就都可以用下述积分确定

$$\varphi(x,y,z)=\int_{\text{全部的源}}\frac{\rho(x',y',z')\,dx'dy'dz'}{r},\quad(17)$$

r 是由体元 $dx'dy'dz'$ 到计算势的点 (x,y,z) 的距离（图 2.5）．即 $r=[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{1/2}$．要注意这个表达式与给出分布电荷电场的那个积分[式 (1.15)]是有不

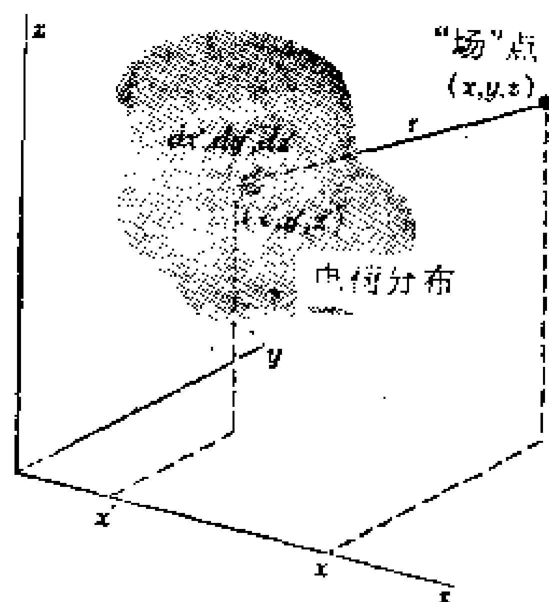


图 2.5　电荷分布 $\rho(x',y',z')$ 的每个小元都对 (x,y,z) 点的势 φ 作出贡献．该点的势是所有这些贡献之和[式 (17)]．

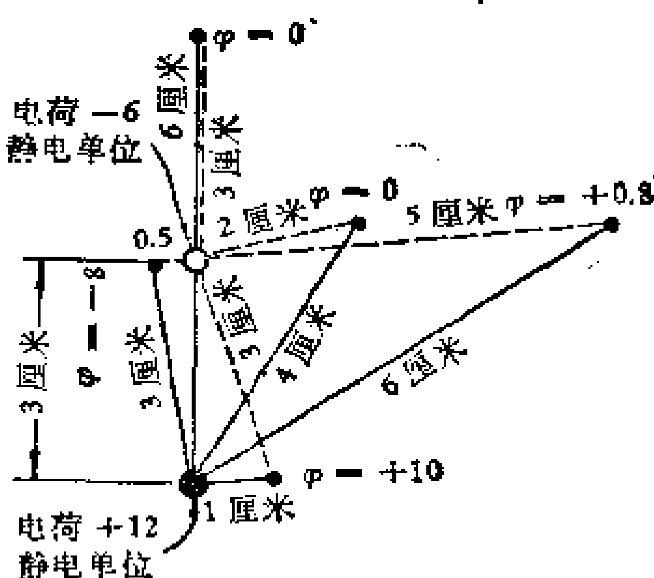


图 2.6　二点电荷系统各点的电势．在无限远处 φ 为零．φ 的单位用静电伏特或每单位电荷多少尔格来表示．

同的．这里分母是 r 而不是 r^2，而且积分为标量而非矢量．我们总可以由标量的势函数 $\varphi(x, y, z)$ 出发，根据式(15)取 φ 的梯度的负值来求出电场．

两个点电荷的电势　考虑一个很简单的例子，图 2.6 所示的二点电荷的电势．一个 12 静电单位的正电荷放在离一个 −6 静电单位的负电荷 3 厘米远处．空间任一点的电势是每个电荷单独存在时的电势之和．图中给出了空间某些选定点的电势．这里不包含矢量相加，只是标量的代数和．例如右边远处一点，它离正电荷 6 厘米，离负电荷 5 厘米，电势的值是 $\frac{+12}{6}+\frac{-6}{5}=0.8$．单位是静电单位/厘米，它和尔格/静电单位或静电伏特相同．在无限远处，势趋近于零．把单位正电荷由无限远处移到 $\varphi=0.8$ 静电伏特的点需要作 0.8 尔格的功．注意，图中有两个点 $\varphi=0$．将任一电荷移至这两个点中的任一个时，所做的净功为零．可以看出，必然有无限多个这样的点，它们在空间形成一环绕负电荷的面．事实上，具有任一特定 φ 值的点的轨迹都是个面，称为**等势面**．在两维图上，则呈现为一条曲线．

长带电金属线的电势　在用公式(17)时有个限制：只有所有源均限定于一有限的空间区域时才能用它．在长带电金属线的情形，我们碰到因电荷分布于距离无限大的区域而引起困难的一个简单例子．其电场 $\mathbf{E}$ 在 1.12 节中已经研究过了．如果我们想指定系统在极远处之点的电势为零，并对分布电荷进行式(17)的积分，我们将发现积分发散——得出无限大的结果．我们本来就料到会有困难，因为在这种情形里，“无限大”，即离我们希望确定势函数的区域很远的全部空间，不仅包含离金属线很远的点，而且包含金属线本身！在求无限长金属线的电场时，没有发生这种困难，因为线电荷元对电

场的贡献随距离的增加而足够快地减小. 显然,对分布电荷延伸至无限远的系统,我们最好指定零电势在靠近分布电荷自身的某处. 于是,用基本关系式(7)来求一般点 (x, y, z) 与选定参考点间的电势差 φ_{21} 就是很简单的计算问题了.

为了看看在无限长带电金属线的情形如何来进行计算,让我们任意指定距金属线 r_1 远的点 P_1 作参考点,则将电荷由 P_1 携至距金属线 r_2 远的另一任意点 P_2 时,对每单位电荷需作的功

$$\varphi_{21} = -\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{2\lambda}{r}\right) dr$$

$$= -2\lambda \ln r_2 + 2\lambda \ln r_1. \tag{18}$$

这表明,带电金属线的电势可取作

$$\varphi = -2\lambda \ln r + 常量. \tag{19}$$

在这种情形下,常量是 $2\lambda \ln r_1$, 当我们由计算 $-\mathrm{grad}\varphi$ 返回到电场 $\mathbf{E}$ 时,它是不起作用的. 这时

$$-\nabla\varphi = -\hat{\mathbf{r}}\frac{d\varphi}{dr} = \frac{2\lambda\hat{\mathbf{r}}}{r} \tag{20}$$

2.6 均匀带电圆盘

作为一个具体例子,我们来研究均匀带电圆盘周围的电场与电势. 除了圆盘具有有限的大小之外,这很像在 1.10 节中讨论过的那种电荷分布. 图 2.7 中半径为 a 的平面圆盘带有正电荷,在盘面以恒量密度 σ (以静电单位/厘米^2 为单位)分布着(这是无限薄的单电荷层,不是每面都有电荷的双层电荷,故系统的总电荷为 $\pi a^2\sigma$). 我们将来常会遇到面电荷分布,对于金属导体尤其是如此. 但是,我们刚才所讲的这个物体不是导体;倘使是导体,如我们不久将知道的,电荷就不会保持均匀分布,它自己会重新分布,在圆盘的边缘上将会聚集

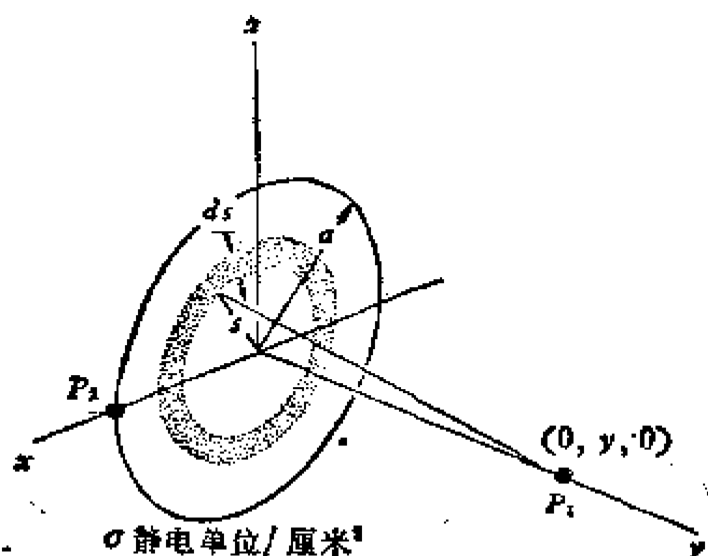


图 2.7 计算均匀带电圆盘轴上 P_1 点的电势.

更多的电荷. 我们讨论的是个绝缘圆盘,像一个薄塑料片,把电荷"喷"在它上面, 使圆盘的每平方厘米上都接受等量的电荷并保持固定不变.

首先,我们求对称轴上 P_1 点的电势. 我们已将对称轴取为 y 轴. 在盘上狭窄的环形部分, 所有电荷元都处于与 P_1 等距离之处. 若 s 表示一个圆环,宽度为 ds,它的面积是 $2\pi s ds$, 因而它所包含的电荷 dq 为 $dq = \sigma \cdot 2\pi s \cdot ds$. 圆环各部分与 P_1 的距离相同, 即 $r = \sqrt{y^2 + s^2}$, 故此环对 P_1 处电势的贡献为 dq/r, 或 $2\pi\sigma s \cdot ds/\sqrt{y^2 + s^2}$. 为了得出整个圆盘产生的势,必须对所有的这类圆环积分

$$\varphi(0, y, 0) = \int \frac{dq}{r} = \int \frac{2\pi\sigma s ds}{\sqrt{y^2 + s^2}}$$

$$= 2\pi\sigma \left[\sqrt{y^2 + s^2}\right]_{s=0}^{s=a}. \qquad (21)$$

这正巧是个初等积分, 用 $u = y^2 + s^2$ 替换后, 得到 $\int u^{-1/2} du$ 的形式. 代入积分限,得

$$\varphi(0, y, 0) = 2\pi\sigma[\sqrt{y^2 + a^2} - y], \text{ 对于 } y > 0. \qquad (22)$$

应该说明的是：式(22)所写出的结果对于正 y 轴上的一切点都成立．对于正 y 和负 y，势之值必相同．从系统的物理对称性来看这是很明显的（圆盘的一面和另一面没有区别）．这也反映在式(21)中，式里只出现 y^2．但是，写出式(22)时，我们在取 y^2 的平方根时作了个符号选择，结果该式只对正 y 成立．$y<0$ 时的正确表达式由对平方根符号的另一种选择得到，为

$$\varphi(0,y,0)=2\pi\sigma[\sqrt{y^2+a^2}+y]，\text{对于 } y<0. \quad (23)$$

因此，在 $y=0$ 处，$\varphi(0,y,0)$ 会出现奇点我们也就不会感到奇怪了．的确，函数的斜率在这里有一突然变化，如我们在图 2.8 所见到的那样．在图 2.8 中，我们把轴上各点的势

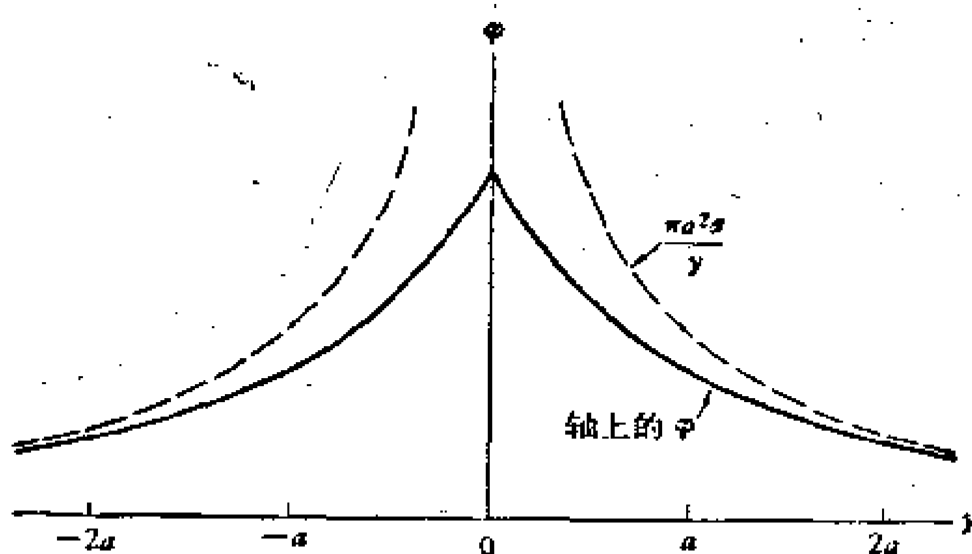


图 2.8 圆盘轴上电势的图形．虚线是 $q=\pi a^2\sigma$ 的点电荷的电势．

作为 y 的函数画了出来．圆盘中心的势是 $\varphi(0,0,0)=2\pi\sigma a$．把单位正电荷由无限远经任一路径移到圆盘中心就需要作这么大的功．

y 值很大时 $\varphi(0,y,0)$ 的行为很有意思．当 $y\gg a$ 时，可将式(22)近似地写为

$$\sqrt{y^2+a^2}-y=y\left[\sqrt{1+\frac{a^2}{y^2}}-1\right]$$

$$=y\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{y^2}\right)\cdots-1\right]\approx\frac{a^2}{2y}, \qquad (24)$$

故

$$\varphi(0,y,0)\approx\frac{\pi a^2\sigma}{y}, \quad 当 \ y\gg a. \qquad (25)$$

$\pi a^2\sigma$ 是圆盘上的总电荷，式(25)正好是同样大的点电荷的电势表达式．正如我们所预期的，在距圆盘很远的地方（相对于圆盘的直径而言），电荷以什么形状分布都没关系；在一级近似下，只有电荷的总量起作用．图 2.8 中，用虚线画出了函数 $\pi a^2\sigma/y$．可以看出，y 轴上的势函数相当快地趋近于其渐近形式．

对于对称轴外的一般位置，电势并不这么容易求，这是因为所得出的定积分不那么简单．可以证明，这是一种所谓的椭圆积分．这些函数是很著名的，并且都列成表，备查[1]．这里我们不想去追究这些特殊问题的数学细节．一种进一步的比较容易的计算可能对我们是有教益的．我们能够求出图 2.9 中 P_2 点那种正好在圆盘边缘的点的电势．

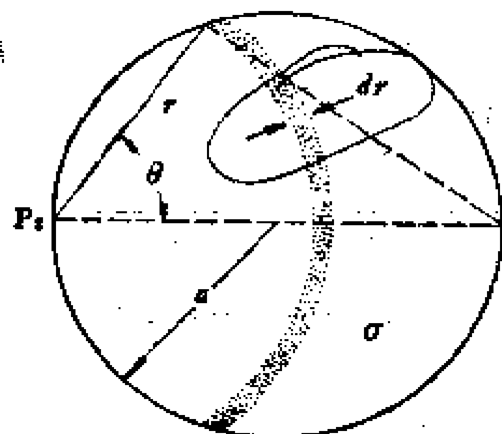


图 2.9 求匀带电圆盘边缘上 P_2 点的势．

为计算 P_2 处之势，考虑以 P_2 为中心的一段圆环．如我们在图 2.9 可以看出的，这一段的电荷是 $dq=\sigma\cdot 2r\theta dr$．它对 P_2 处电势的贡献为 $dq/r=$

1) 在第一卷中在讨论精确处理单摆问题时，提到过这类函数．

$2\sigma\theta dr$. 由图 2.9 中直角三角形的几何学得知，$r = 2a\cos\theta$，故 $dr = -2a\sin\theta d\theta$. 这就使我们可以采用 θ 作为积分变量. 如果 θ 的范围由 $\pi/2$ 到 0，就可扫过整个的圆盘. 于是

$$\varphi = \int \frac{dq}{r} = \int_{\pi/2}^{0} 2\sigma\theta(-2a\sin\theta d\theta)$$

$$= \int_{0}^{\pi/2} 4\sigma a\theta\sin\theta d\theta = 4\sigma a[\sin\theta - \theta\cos\theta]_0^{\pi/2}$$

$$= 4\sigma a \tag{26}$$

(可用分部积分法求 $\int\theta\sin\theta d\theta$，也可查表).

将其与圆盘中心的电势 $2\pi\sigma a$ 比较，我们看到，正如我们已经料到的，由盘中心到边缘电势下降. 因此，在圆盘平面上，电场必定有个向外的分量. 这就是为什么在前面我们曾强调，如果电荷能自由移动的话，它就会自动地跑向圆盘边缘，电荷重新分布. 另一种说法是，这个均匀带电圆盘不是个等势面；然而任何导体表面，除了电荷正在移动的情况之外，——都必定是等势面[1].

在对称轴上的电场可以直接由势函数计算

$$E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{d}{dy}2\pi\sigma[\sqrt{y^2+a^2} - y], \tag{27}$$

给出

$$E_y = 2\pi\sigma\left[1 - \frac{y}{\sqrt{y^2+a^2}}\right], \quad y > 0. \tag{28}$$

(固然，对于轴上的点，直接由电荷分布计算 E_y 并不困难.)

当 y 由正的一方趋近于零时，E_y 趋近于 $2\pi\sigma$. 在负 y 的一边，我们称之为圆盘的背面，**E** 指着另一方向，其 y 分量 E_y 为 $-2\pi\sigma$. 这和在 1.10 节中导出的电荷密度为 σ 的无限大带电平板的电场相同. 对于紧靠圆盘中心的点，在圆盘边

---

1) 导体表面必定是等势面这一事实，将在第三章中透彻地讨论.

缘以外，电荷存在与否应该不会产生很大的差别．换句话说，从紧靠近平板的点观察，任何平板看起来都是无限大的．实际上，不仅在中心，而且在整个盘上 E_y 都具有 $2\pi\sigma$ 之值．为了证明这点，可以像在第1.10节中那样应用高斯定律．但是我们必须仔细一些，因为圆盘上一般点上的总电场并不是垂直于圆盘面的．设想盘上面积为 A 的任一小块，用一很薄的扁平盒子封闭住，如图2.10所示．令 E_{y+} 表示恰好在这一小片面电荷前面的电场强度的 y 分量，E_{y-} 则表示在它背面的电场强度的 y 分量．由此盒向外之通量为

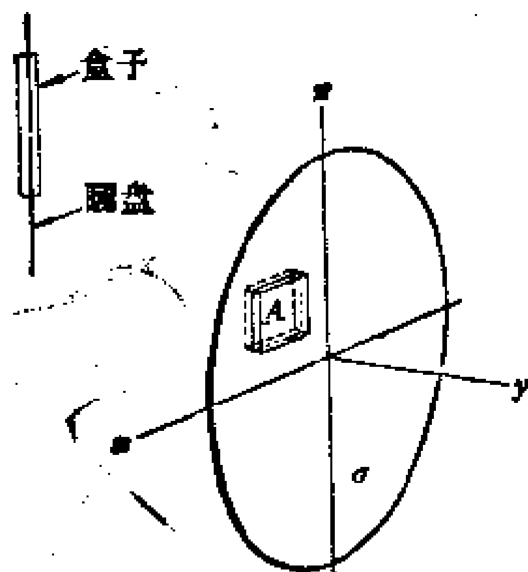


图 2.10　将高斯定理应用于带电圆盘．

$$\Phi = AE_{y+} - AE_{y-} + (\text{通过盒边的通量}).\tag{29}$$

第二项带有负号，是因为代表盒背面的矢量指向负 y 的方向．可以借助将此盒做得极扁的办法使通过盒边的通量变得任意小[1]．而这并不改变被包围的电荷，它仍是 σA．然后，在极限情况下，高斯定律告诉我们

$$AE_{y+} - AE_{y-} = 4\pi\sigma A\tag{30}$$

或

$$E_{y+} - E_{y-} = 4\pi\sigma.\tag{31}$$

在式(31)中，我们得到一个普遍的结果，它对任何面电荷

1) 只要径向电场不是无穷大，这种作法就是合理的．我们知道，几乎在圆盘上各处，径向电场都是有限的，这是因为圆盘中心和圆盘边缘之间的电势差有限．实际上确实有径向场为无限大之处，那是在圆盘的真正边缘上．我们无论如何要避免把小盒的边取在那里，因为 E_{y+} 及 σ 在那里不连续．

分布，不论其分布是否均匀，都成立：若 σ 是任何面电荷层的局部密度，则垂直于电荷层的电场分量在该处有个突变，或不连续，其变化的大小为 $4\pi\sigma$. 在我们讨论的问题中，盘上各处的 σ 为常量. 而且这里没有其它场源，由于圆盘两边的电场必定对称，故必有 $E_{y^+} = -E_{y^-}$，故在整个圆盘各处，$E_{y^+} = |E_{y^-}| = 2\pi\sigma$.

图 2.11 画出了这个系统的一些电力线，并把等势面和 yz

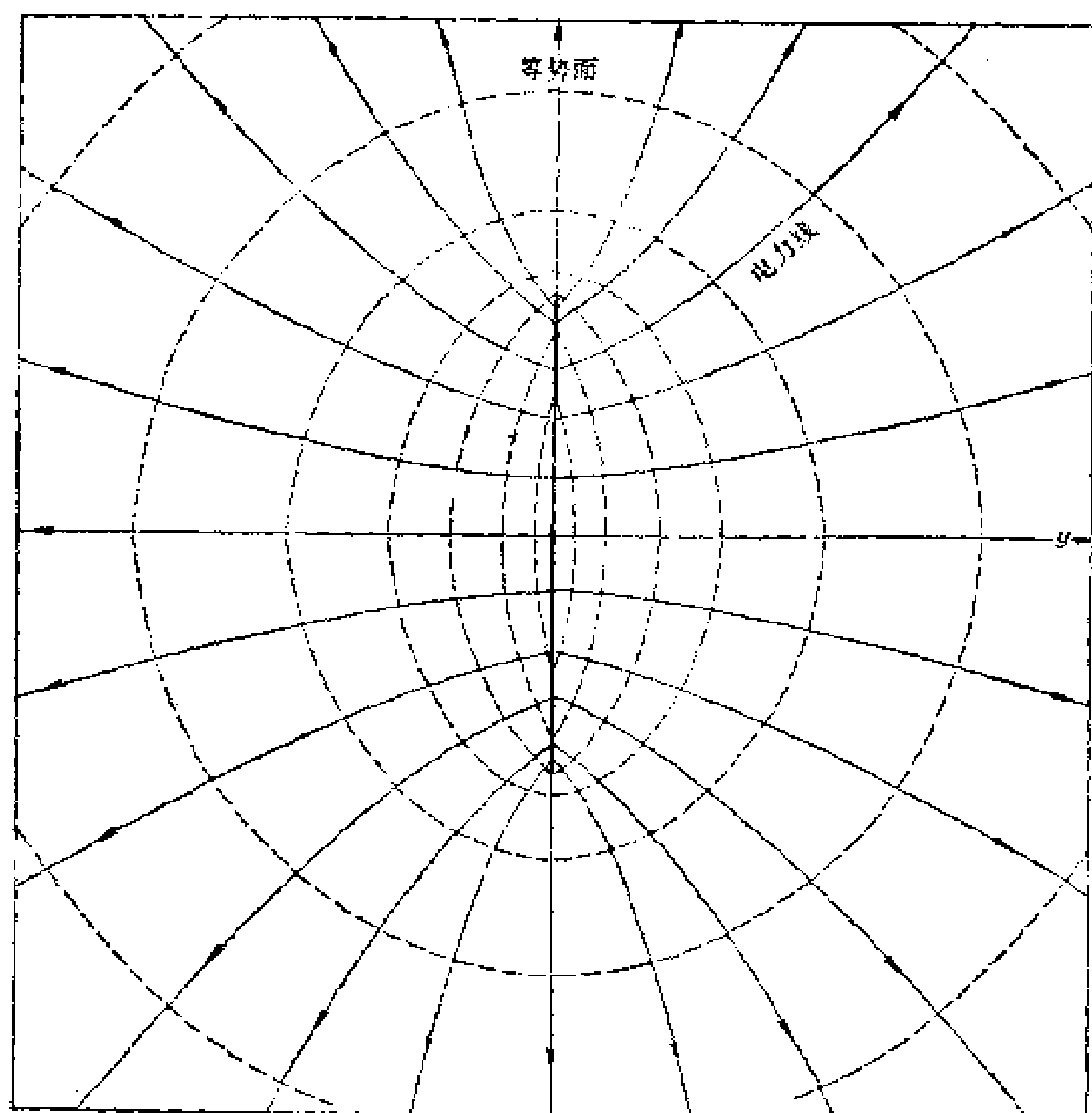


图 2.11 均匀带电圆盘的电场. 实线是电力线，虚线是等势面与图平面的交线.

面的交线用虚线画了出来。靠近圆盘中心的地方，这些虚线类似于透镜的表面；在远远大于 a 的地方，它们趋近于环绕点电荷的球形等势面。

图 2.11 也显示出了电力线与等势面的一般性质。通过任意点的电力线和通过该点的等势面相互垂直。这恰与丘陵地带的等高图相同，在与等高线成直角的方向倾斜度最大。事情必定是这样的，因为如果假定电场在任一点有平行于过该点等势面的分量，那么沿等势面移动检验电荷时就需要做功了。

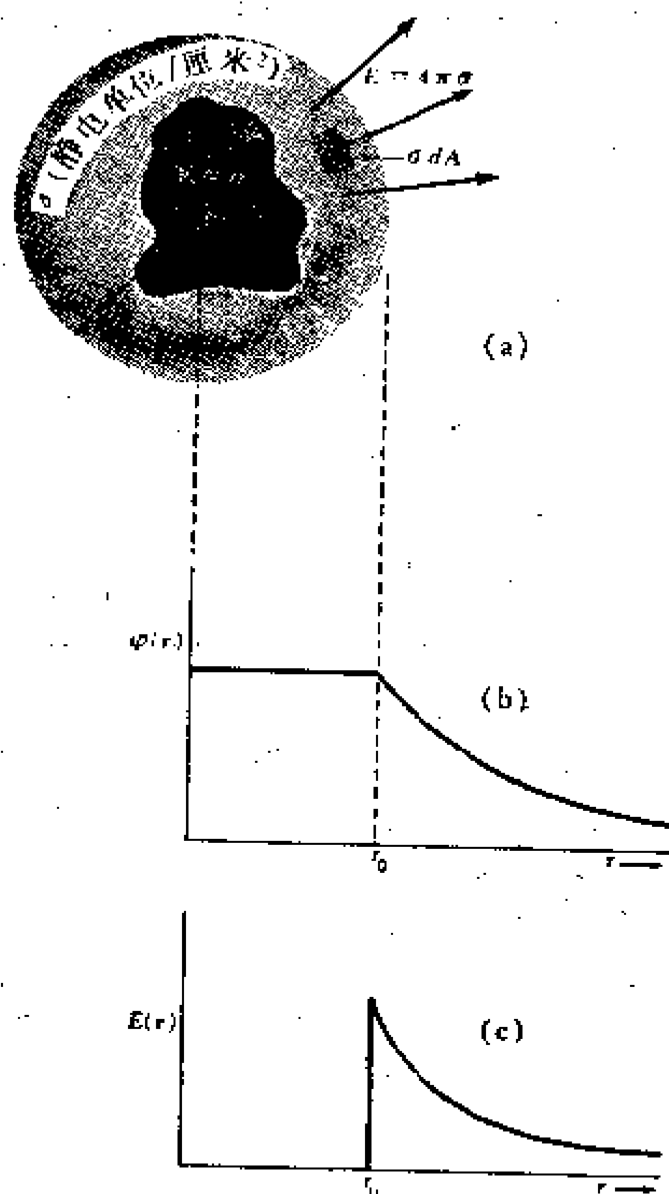


图 2.12 球形面电荷分布的电势和电场。(a) 切开看的球；(b) φ 作为 r 的函数；(c) E 作为 r 的函数。

2.7 作用于面电荷上的力

从一个很简单的对称电荷分布，即在半径为 r_0 的球面上分布着密度为 σ 的均匀面电荷[图 2.12(a)]，我们还可以学到些东西。总电荷 Q 等于 $4\pi r_0^2\sigma$。球外的势恰好是 Q/r，与电荷集中于球心的情形相同；球内的势为常量 Q/r_0。当然，电势为恒量时其梯度为零。

我们已经推断过，任何这种中空的带电球壳内，电场必定为零。其电势 φ 及电场 E 的值随 r 如何变化由图 2.12 (b) 和(c) 示出。现在要问：一个面电荷元，例如 σdA 受球上所有其它电荷元排斥的力是多大？我们知道，刚刚到达球外时，电场强度 $E_{外}=Q/r_0^2=4\pi\sigma$，而 $E_{内}=0$。我们应该用哪个值计算对电荷元的作用力呢？

正确的答案是 $\frac{1}{2}(E_{外}+E_{内})$。为了弄清这一点，一个办法是设想这面电荷层的厚度不为零，它很薄但有有限的厚度 Δr，在 Δr 内，体电荷密度 ρ 是均匀的，该薄片每平方厘米所包含的电荷为 σ。换句话说，不管 Δr 怎样，我们都规定 ρ 要满足关系式 $\rho\cdot\Delta r=\sigma$。那么很显然，如果愿意，你就可以用高斯定律去证明带电层内表面的电场强度为零；通过电荷层时电场线性地上升，直到在外表面上达到 $4\pi\sigma$ 的量值为止(表面的弯曲使得函数不完全是线性的，但由于我们总是假定 $\Delta r\ll r_0$，所以可以认为这个小区域实际上是块平板)。在这带电板上的平均场强，亦即作用于板内单位电荷上的平均力，显然是 $\frac{1}{2}(E_{内}+E_{外})$。在这个 $E_{内}=0$ 的特殊情形，平均场强为 $\frac{1}{2}E_{外}$，即 $2\pi\sigma$。图 2.13 (a—c) 表示当我们让板的厚度减小，而仍保持每单位面积上的电荷为常量时，电场是如何变化的。并没有什么特殊的事件发生，不过电场的变化仅出现在很短的距离之内，则体电荷密度就变为无限大了。

注意，即使整个带电层的电荷密度不均匀，如图 2.13(d) 所示的情形，E 从一边到另一边的净变化也同上面讲的无异。而且即使电场的变化不是线性的，作用于这种带电层单位面积上的总力也仍然准确地等于 $\frac{1}{2}(E_{内}+E_{外})$ 乘以单位面积

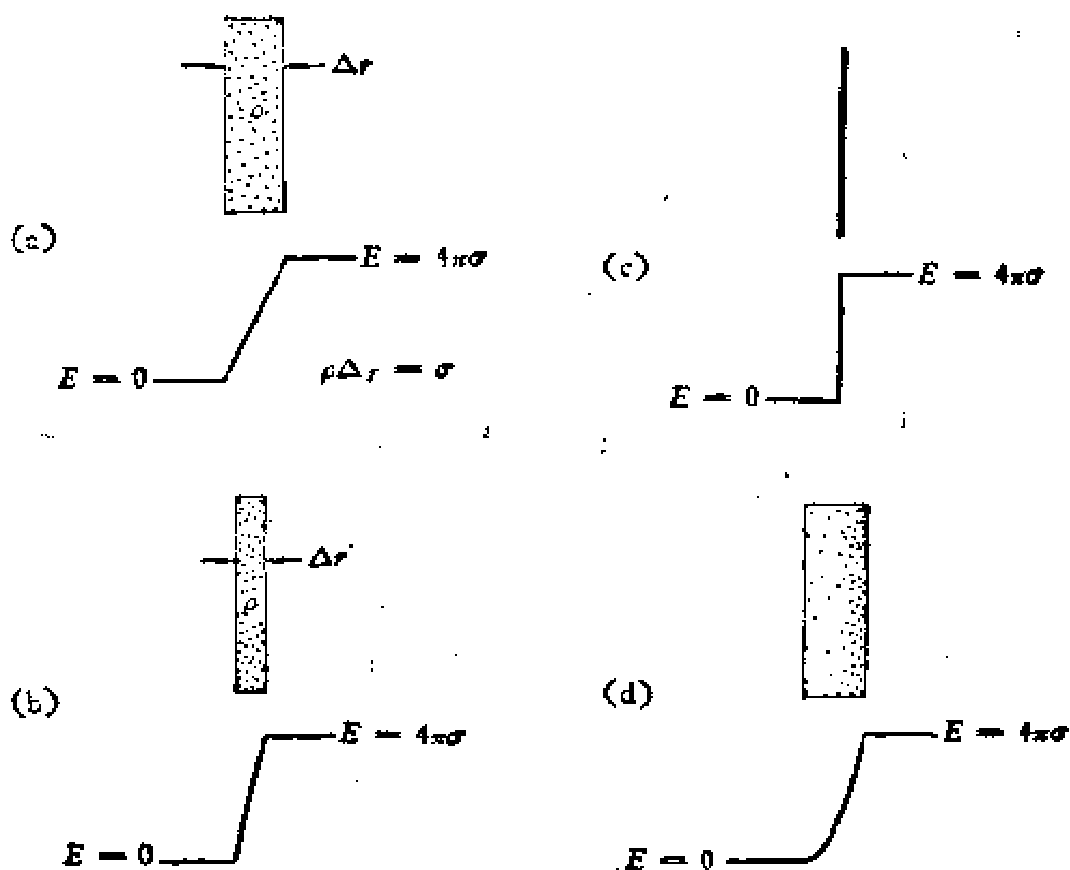


图 2.13　带电层上电场的实际变化只依赖于单位面积的总电荷.

上的总电荷. 对此，习题 1.29 就一种简单的特殊情况提出了一种检验方法. 如果有兴趣的话，习题 1.30 将使你获得一般的证明.

实际的表面电荷当然不是体密度无限大而厚度为零的电荷层，所以中间的图比极限情形更实际些. 例如，在金属表面，电荷可能分布在几埃深的厚度内. 重要的是，只要带电层与系统的其它线度相比很薄，我们就可以把它作为厚度为零的层来处理；在计算所有大范围的效应时，只需用每单位面积的局部电荷密度来表征它. 另一方面，对于关于表面的原子现象，例如电子由一种物质通过界面到另一种物质的迁移，电荷实际的深度分布可能是重要的.

回到本节开始时的问题，现在我们看到，作用于面电荷

元 dq 上的力为 $2\pi\sigma \cdot dq$，而由于小面元 dA 上的电荷量是 $dq = \sigma dA$，故作用于面元 dA 上的力为

$$dF = 2\pi\sigma^2 dA, \tag{32}$$

单位面积上的力正是 $2\pi\sigma^2$. 它是电荷间相互排斥所引起的向外的力. 当然，只要这些电荷不跑开，此力就必定为起源于原子或分子的某种另外的力所平衡；这问题不在我们所讨论的范围内，这种力能够将电荷载体保持在球面上。

如果使一橡皮气球带电，则我们已经算出的每单位面积 $2\pi\sigma^2$ 的电斥力会使这个气球胀大. 反过来，保持总电荷不变而缩小这个电荷分布的球径时，我们就必需对这个系统做功。假定我们想把球从半径 r_0 缩小到半径 $r_0 - dr$，象图 2.14 所

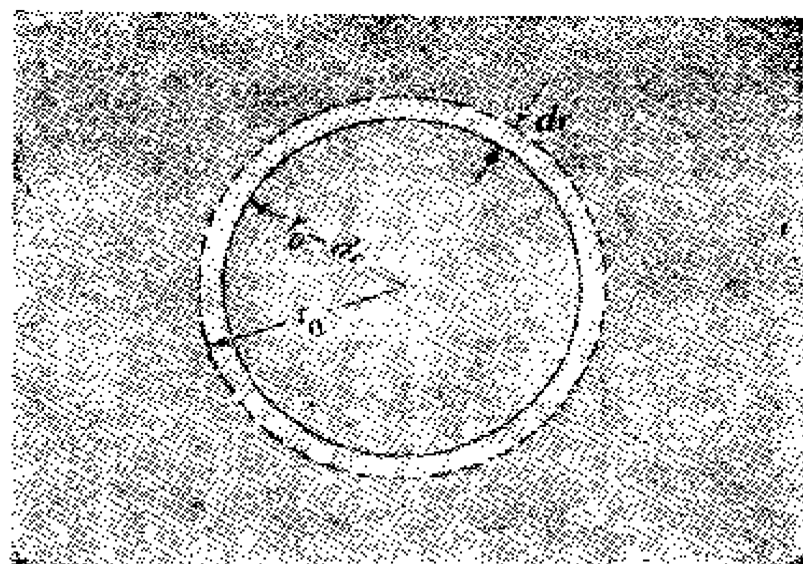


图 2.14 缩小一个球壳或带电气球.

表示的那样. 忽略其它所有的力，只计算反抗电的斥力需做的功. 我们必须对每平方厘米表面施加 $2\pi\sigma^2$ 达因向内的力. 在此力作用下通过了距离 dr，故在这些外力作用下所做的功为：

$$dW = (4\pi r_0^2)(2\pi\sigma^2)dr = 8\pi^2\sigma^2 r_0^2 dr \tag{33}$$

也可以用总电量 Q 来表示. 由于 $Q = 4\pi r_0^2\sigma$，故

$$dW = \frac{Q^2 dr}{2r_0^2}. \tag{34}$$

2.8 与电场相关的能量

就电场而言，要注意到，收缩带电球所产生的唯一结果是在 $r_0 - dr$ 与 r_0 之间的空间内产生场强 $4\pi\sigma$. 此空间内的电场原先为零. 在空间的其余各处，电场准确地保持与先前相同. 可以说，这部分电场是消耗 dW 的功而产生出来的. 在数值上作一比较，我们看到，消耗的功 dW，可以用电场新占有的体积 dv 表示

$$dW = \frac{E^2}{8\pi} dv. \tag{35}$$

这是一个普遍定理的例证，我们现在不去证明这个定理，这定理说：**一电荷系的势能 U，即把系统集合起来所需要的总功，可以由电场本身算出：对每一体元 dv 赋与 $(E^2/8\pi)dv$ 大小的能量，然后对电场所在的全部空间进行积分。**

$$\boxed{U = \frac{1}{8\pi}\int_{\text{全部电场}} E^2 dv.} \tag{36}$$

E^2 当然是个标量：$E^2 \equiv \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$.

于是，把图 2.14 中球形电荷从初始逐渐集合起来所需之功可以计算如下：$r > r_0$，$E = Q/r^2$；$r < r_0$，$E = 0$，故

$$U = \frac{1}{8\pi}\int E^2 dv = \frac{1}{8\pi}\int_{r_0}^{\infty} \frac{Q^2}{r^4} \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{2r}. \tag{37}$$

用式(34)来计算把球从半径无限大缩小到最终的半径 r_0 所需之功时，得到相同的结果

$$U = \int_{\infty}^{r_0} -\frac{Q^2 dr}{2r^2} = \int_{r_0}^{\infty} \frac{Q^2 dr}{2r^2} = \frac{Q^2}{2r_0}. \tag{38}$$

一些人愿意把这个能量想作是"储藏"在电场内的．由于系统是保守的，让这些电荷分开自然可以把这些能量重新释放出来．所以同时我们最好认为能量"存在于某处"．若认为能量以 $E^2/8\pi$ 尔格/厘米^3 的密度储存于空间，我们的说明就是对的．这样去想是没有坏处的，但实际上，不借助于其他事物，我们就无法测定储存于某一特定立方厘米空间内的能量．只有总能量，即将电荷由某一组态引至另一组态所需完成的功，才是物理上可以测量的．正如用电场的概念代替库仑定律来解释电荷的行为一样，当我们用式(36)而不用式(1.9)来表示静电系统的总势能时，我们只是采用了一种不同的书写形式罢了．但有时观察问题的着眼点改变，甚至起初只是记法的改变，也能激发新的想法和更深入的理解．当我们研究带电物体的动力学行为和电磁辐射时，电场作为一个独立实体的想法，将会获得它应有的地位．

我们已经谈到势能和电势，记住，这是完全不同的两件事．静电系统的势能 U 是将其各部分集合起来所需之功；能量可以认为是储存在这个集合系统之中．它是个单纯的标量，而且是属于系统整体的一种性质．对于一个给定的电荷分布，电势 φ 是空间位置的函数，以尔格/静电单位，或者静电伏特为单位．空间两点 φ 值之差是把单位电荷由一处移到另一处所需之功．

为了强调 φ 与 U 之间的区别，让我们不用 $\mathbf{E}$ 而用 φ 写出式(36)．由于 $\mathbf{E}=-\nabla\varphi$，故有

$$U=\frac{1}{8\pi}\int_{\text{全部空间}}|\nabla\varphi|^2 dv. \tag{39}$$

还有另外一种计算储存能量的方法．在第一章中我们就已学过，把一些分散的点电荷 $q_1, \cdots, q_i, \cdots$ 聚集到一起所需要的能量由式(1.9)给出

$$U=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k\neq j}\frac{q_iq_k}{r_{jk}}. \tag{40}$$

让我们将其写为

$$U=\frac{1}{2}\sum_{j=1}q_j\left[\sum_{k\neq j}\frac{q_k}{r_{jk}}\right], \tag{41}$$

看看方括号内的和，其中每项是电荷系中的一个电荷对 q_j 处电势的贡献，所以括号内的和，我们称之为 φ_j，是其余所有其他电荷在 q_j 处产生的势．可以用这种方法将 U 表为

$$U=\frac{1}{2}\sum_{j}q_j\varphi_j. \tag{42}$$

现在，若我们有一连续的电荷分布 $\rho(x,y,z)$ 来代替一组点电荷，则只须以积分代替式(42)中的求和

$$\boxed{U=\frac{1}{2}\int\rho\varphi dv.} \tag{43}$$

此时，φ 是由所有其余电荷产生的这种限制已不再需要，因为此时与 q_j 相对应的电荷元是 ρdv，它总是无限小的．所以，式（43）中的 φ 就是整个系统的电势 φ（x, y, z）．自然，式(43)是与式(39)和式(36)相当的．

2.9 矢函数的散度

电场在每点都有确定的大小和方向．它是坐标的矢函数，我们通常用 $\mathbf{E}(x, y, z)$ 来表示它．以下即将讲述的内容可应用于任何矢函数而不仅仅适用于电场；为了提醒注意这一点，我们使用另外的符号 $\mathbf{F}(x, y, z)$．换句话说，我们暂时将是讲数学而不是讲物理．我们只是把 $\mathbf{F}$ 看作一般的矢函数．不过我们将始终限于三维的情形．

考虑具有某种形状的有限体积 V，其面积以 S 表示．我

们已经熟悉穿过 S 的总通量的意思了. 它是 $\mathbf{F}$ 对于整个 S 面的面积分之值:

$$\Phi=\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{a}, \tag{44}$$

被积函数中 $d\mathbf{a}$ 是无限小矢量, 其值为 S 面的一个小面元的面积,其方向是该小面元的外法向,如图 2.15 (a) 所示.

现在设想用一个面,或说一个膜 D, 将 V 分为两部分, D 切开"气球" S, 如图 2.15(b) 所示. 以 V_1 和 V_2 表示 V 的这两部分, 并将 V_1, V_2 作为不同的体积对待. 再分别计算每一

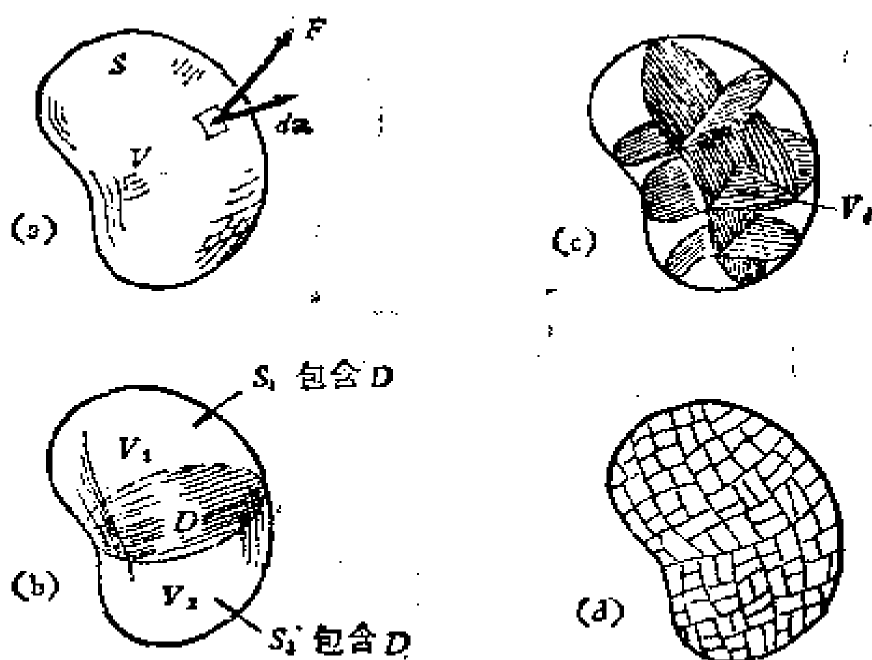


图 2.15 (a) 体积 V 为表面 S 所包围; 它被分成 S_1 与 S_2 所包围的两块 (b); 不管(c)和(d) 那样的分割如何进行, 任意矢函数 $\mathbf{F}$ 对所有小块的面积分之和,等于 $\mathbf{F}$ 对 S 面原来的那个面积分.

个的面积分. V_1 的界面 S_1 包含 D, 同样, V_2 的界面 S_2 也包含 D. 很明显,这两个面积分之和

$$\int_{S_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{a}_1+\int_{S_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{a}_2, \tag{45}$$

将等于式(44)所表示的对整个表面的原先那个积分. 原因在于, D 上任一给定小片对第一个积分的贡献,与对第二个积分

的贡献大小相同而符号相反；因为凡在一种情形是“向外”的方向在另一种情形则是“向内”的方向．换句话说，任何经过面D由V_1发出的通量就是流入V_2的通量．所余的表面等于原来全部体积的表面．

我们可以继续细分，直至由内隔膜将V分成许多部分$V_1, \cdots, V_i \cdots, V_N$其表面为$S_1, \cdots, S_i, \cdots, S_N$．不管分割进行得多细，我们仍然可以确信

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_i = \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \Phi. \tag{46}$$

我们所要探索的是：在N变为无限大的极限情形下，我们想找出某种东西来表征一个特定的很小区域的特性——最后，要表征一个点的邻域的性质．现在，对某小区域的面积分

$$\int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_i \tag{47}$$

并不是所要求的量，因为如果把每个小区域都再分一次，则N变成了$2N$，这个积分也就分成了两项，由于其和不变，分成的每项都比原先的积分小．换句话说，我们在同一区域考虑越来越小的体积时，在一个这种体积上进行的面积分就逐渐变小．但我们也要注意到，在分割时，体积也分成两部分了，其和为原来的体积．这就提示我们去考查分割开的空间小块中每个小元的面积分与体积分之比

$$\frac{\int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_i}{V_i}. \tag{48}$$

这样做看来是有道理的，因为当N足够大时，即对足够细的再分割，每次将面积分分成两半的同时，也就把体积分成了两半；我们将发现，随着对任一特定区域连续不断的再分割，式(48)所示的比率趋近于一个极限值．倘使是这样，此极限

就表征了矢函数 $\mathbf{F}$ 在该邻域的一种特性。我们把它称为 $\mathbf{F}$ 的散度，写作 $\operatorname{div}\mathbf{F}$。即任一点的 $\operatorname{div}\mathbf{F}$ 之值被定义为

$$\operatorname{div}\mathbf{F}=\lim_{V_i\to 0}\frac{1}{V_i}\int_{S_i}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{a}_i, \tag{49}$$

这里，V_i 是包含所研究的点的一个体积，进行积分的 S_i 面就是 V_i 的表面。当然必须要有这样的前提条件，即这个极限存在，且与我们的分割方法无关。目前我们暂且这样假定。

$\operatorname{div}\mathbf{F}$ 的意义可以这样表述：$\operatorname{div}\mathbf{F}$ 是在 V_i 无限小的极限情形下，由 V_i 向外的每单位体积的通量。它显然是个标量。由一处至另一处它可以发生变化；它在任一特定位置 (x, y, z) 的值是当 V_i 越变越小而又总是包围着点 (x, y, z) 时，式(49)的比值的极限。所以 $\operatorname{div}\mathbf{F}$ 只是坐标的标量函数。

2.10 高斯定理及高斯定律的微分形式

如果我们知道了位置的标函数 $\operatorname{div}\mathbf{F}$，我们可以立即返回来计算大体积的面积分：先将式(46)写为

$$\int_S\mathbf{F}\cdot d\mathbf{a}=\sum_{i=1}^{N}\int_{S_i}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{a}_i=\sum_{i=1}^{N}V_i\left[\frac{\int_{S_i}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{a}_i}{V_i}\right], \tag{50}$$

在 $N\to\infty$，$V_i\to 0$ 的极限情况下，括号里的一项成为 $\mathbf{F}$ 的散度，而求和变为体积分

$$\boxed{\int_S\mathbf{F}\cdot d\mathbf{a}=\int_V\operatorname{div}\mathbf{F}\,dv.} \tag{51}$$

式(51)称为高斯定理，或散度定理。对于任何矢量场，只要式(49)所涉及的极限存在，这定理就成立。

让我们再来看看，对于电场 $\mathbf{E}$ 这意味着什么。由高斯定律我们确信

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = 4\pi \int_V \rho dv \tag{52}$$

若散度定理对于任何矢量场都成立，则对 $\mathbf{E}$ 亦必然成立

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{E} dv \tag{53}$$

对我们所愿选择的任何体积——任何形状、尺寸和位置——式(52)和式(53)都成立．比较式(52)与式(53)，我们看到，只有在任何点都有

$div \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho,} \tag{54}$$

这才可能．从现在起，如果把散度定理作为我们正规数学工具的一部分，我们就可以把式(54)看作高斯定律的另一种表述方式．它是高斯定律的微分形式，即用电场与电荷密度之间的局部关系来表述的高斯定理．

2.11 笛卡儿坐标系中的散度

虽然式(49)是散度的基本定义，与任何坐标系无关，但是，在给出矢函数的确切形式后，要知道如何去计算它的散度是有用的．假设矢函数 $\mathbf{F}$ 被表为笛卡儿坐标 x, y, z 的函数．这就意味着有三个标量函数 $F_x(x, y, z)$，$F_y(x, y, z)$ 和 $F_z(x, y, z)$．取一小立方盒形状的区域 V_i，其一角位于 (x, y, z)，各边为 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$，如图 2.16(a) 所示．其它的一些形状会不会得到同样的极限，这是以后我们必然会遇到的问题．

考查盒子两个相对的面，例如顶面和底面．它们用矢量 $\hat{z}\Delta x\Delta y$ 和 $-\hat{z}\Delta x\Delta y$ 来表示．通过这两个面的通量只与 $\mathbf{F}$ 的 z 分量有关．其净贡献依赖于盒顶处的 F_z 与盒底处的 F_z 之差；或者更确切地说，依赖于 F_z 在盒子顶面的平均值与在

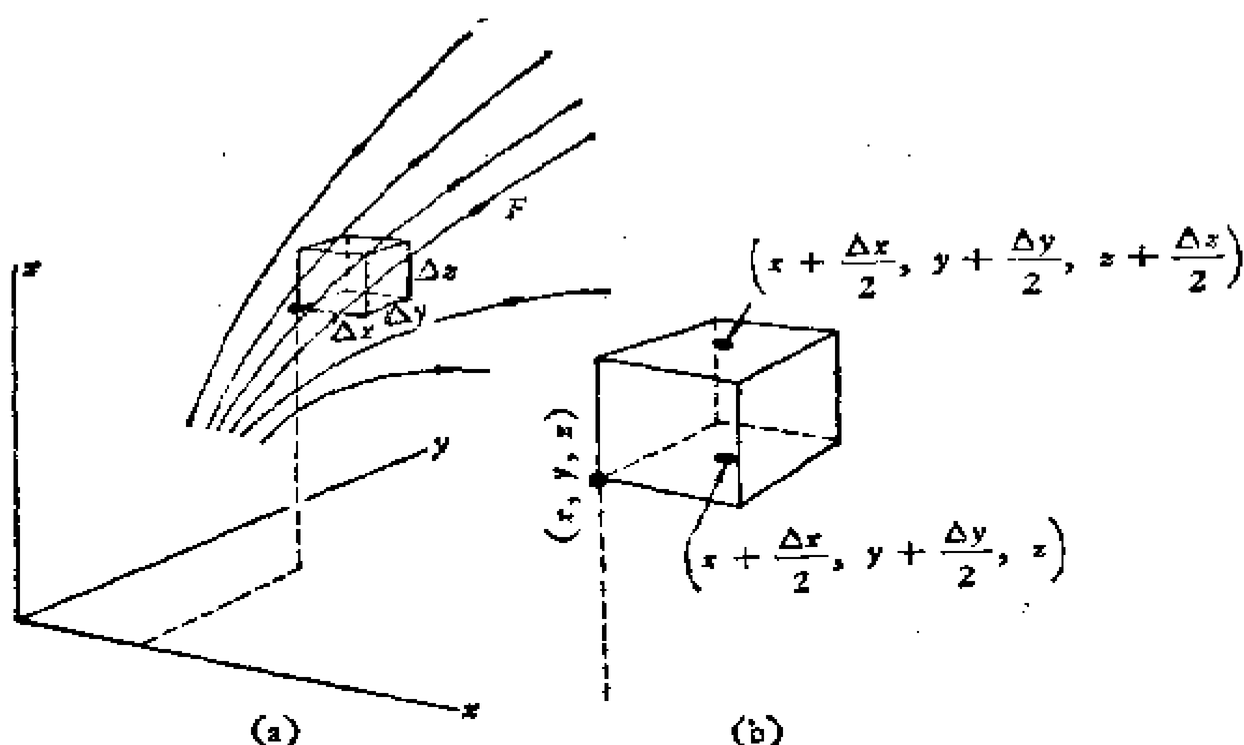


图 2.16 计算由体积为 Δx, Δy, Δz 的盒子发出的通量.

盒子底面的平均值之差. 精确到一阶小量，这差值是 $(\partial F_z/\partial z)\Delta z$. 图 2.16 有助于说明这点. 如果我们只考虑小矩形上 F_z 的一阶变量，则 F_z 在盒底面上的平均值就是它在这矩形中心处之值. 以 Δx 和 Δy 表出的此值的一阶项为[1]

$$F_z(x,y,z)+\frac{\Delta x}{2}\frac{\partial F_z}{\partial x}+\frac{\Delta y}{2}\frac{\partial F_z}{\partial y}. \qquad (55)$$

对于 F_z 在顶面的平均值，我们取顶面中心处的值，它也只是小位移的一阶项

1) 这就是标量函数 F_z 在 (x, y, z) 邻域泰勒展开的起始项. 泰勒展开，即 $F_z(x+a,\ y+b,\ z+c)=F_z(x,y,z)+\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\frac{\partial}{\partial z}\right)F_z+\cdots+\left(\frac{1}{n!}\right)\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\frac{\partial}{\partial z}\right)^n\cdot F_z+\cdots$. 微商全是在 (x, y, z) 处计算的. 在我们所讨论的情形中，$a=\Delta x/2$, $b=\Delta y/2$, $c=0$, 然后去掉这一展开式的高阶项.

$$F_z(x, y, z)+\frac{\Delta x}{2}\frac{\partial F_z}{\partial x}+\frac{\Delta y}{2}\frac{\partial F_z}{\partial y}+\Delta z\frac{\partial F_z}{\partial z}. \quad (56)$$

盒子这两面的面积均为 $\Delta x\Delta y$，因而通过这两个面的净通量为

$$\underbrace{\Delta x\Delta y\left[F_z(x, y, z)+\frac{\Delta x}{2}\frac{\partial F_z}{\partial x}+\frac{\Delta y}{2}\frac{\partial F_z}{\partial y}+\Delta z\frac{\partial F_z}{\partial z}\right]}_{\text{(由盒顶面发出的通量)}}$$

$$\underbrace{-\Delta x\Delta y\left[F_z(x, y, z)+\frac{\Delta x}{2}\frac{\partial F_z}{\partial x}+\frac{\Delta y}{2}\frac{\partial F_z}{\partial y}\right]}_{\text{(进入盒底面的通量)}}, \quad (57)$$

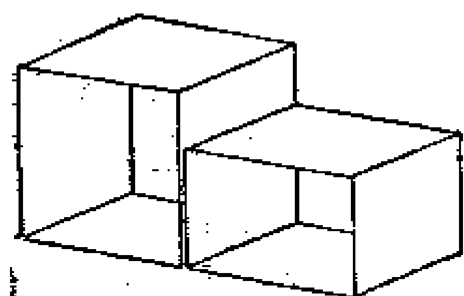
化简为 $\Delta x\Delta y\Delta z(\partial F_z/\partial z)$. 显然，对于另外的相对面，也必须采用同样的讨论，即通过与 yz 面平行的两个面向外净通量为 $\Delta y\Delta z\Delta x(\partial F_x/\partial x)$. 注意，此处也出现乘积 $\Delta x\Delta y\Delta z$. 于是由该小盒发出的总通量为

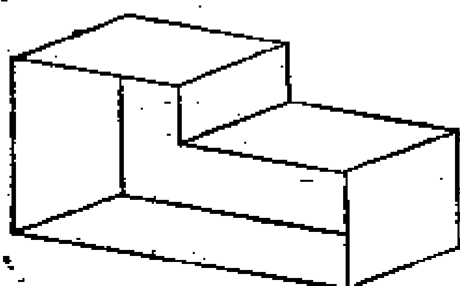
$$\Phi=\Delta x\Delta y\Delta z\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}\right). \quad (58)$$

盒子的体积为 $\Delta x\Delta y\Delta z$，故通量与体积之比为 $\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$，因为此式完全不包含盒子的大小，故当我们令盒子缩小时，它就作为极值而保留了下来[假如在计算通量时，我们保留了与 $(\Delta x)^2$，$(\Delta x\Delta y)$ 等成比例的项，在趋近于极限的过程中它们自然会消失].

我们现在可以看一下这个极限为什么与盒子的形状无关. 显然，这个极限与矩形盒子各边的比例无关，但这说明不了多少问题. 容易看出，对于将任意形状、尺寸的矩形盒粘在一起所能构成的任意体积，极限都相同. 考虑图 2.17 中的两个盒子. 从盒子 1 发出的通量 Φ_1 与从盒子 2 发出的通量 Φ_2

之和不会因拆去这两个盒子的联结壁打通成一个盒子而改变，因为通过该面的任何通量对一个盒子是负的则对另一个盒子就是正的．所以虽如图2.17(c)那样的奇怪形状也不会影响结果．我们把对更一般的情形的证明留给读者．如果先证明图2.18中四面体的四个面的矢量和为零，就可以考虑斜面的情形了．


(a)


(b)

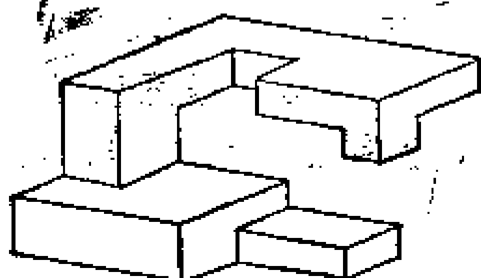

(c)

图 2.17 通量与体积之比的极值与盒子的形状、大小无关．

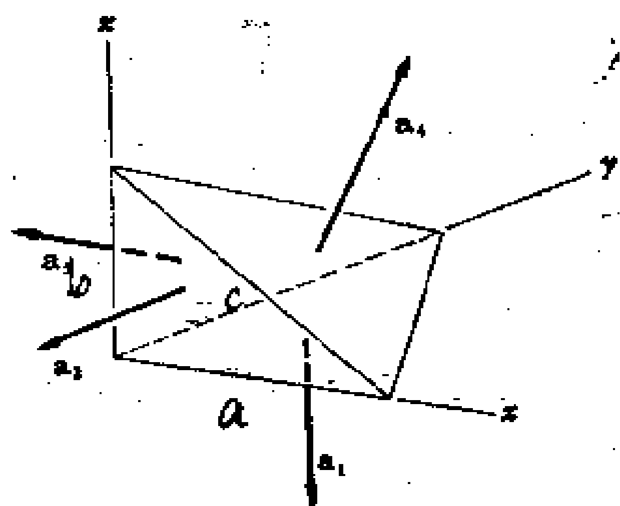


图 2.18 可以证明 $\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3+\mathbf{a}_4=0$.

我们的结论是：只须假定函数 F_x，F_y 和 F_z 可微，则上述极限就一定存在，且由

$$\mathrm{div}\mathbf{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z} \tag{59}$$

给出．

若 div **F** 在某点之值为正，设想 **F** 为一速度场，则在该点的邻域是净“流出”．例如，若式(59)中的三个偏微商在 P 点均为正，则在该邻域可能有个像图2.19所提示的那样的矢量场．但是，场也可能看起来与图2.19完全不同，但仍然有正的

散度，因为任何满足 $\operatorname{div}\mathbf{G}=0$ 的矢函数 G 都可以叠加上去。

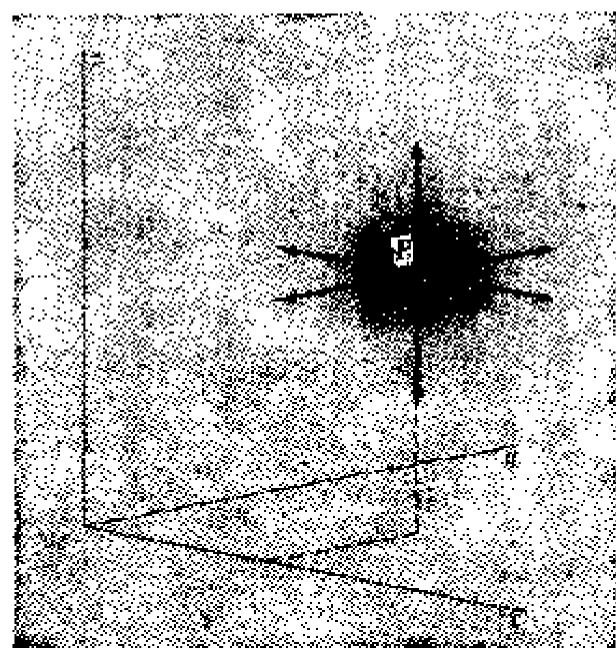


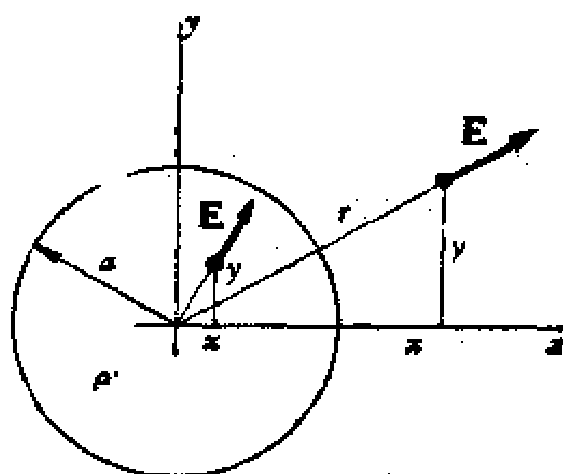
图 2.19　表示一个在 P 点的邻域散度不为零的场．

这样，三个偏微商中的一个或两个可能为负而我们仍可有 $\operatorname{div}\mathbf{F}>0$。散度这个量只表示矢量场空间变化的一个方面．

让我们把它用到一个比较易于想像的电场上．一根半径为 a 的无限长圆柱，分布着密度为 ρ 的正电荷．柱外的电场与位于圆柱轴上的线电荷所产生的电场相同，是大小正比于 $1/r$ 的径向场．柱内的电场可以对半径 $r<a$ 的区域应用高斯定律来求得．这是个容易作的习题，读者能够完成它．读者会得出柱内的电场正比于 r，当然也是径向的．准确的值是

$$E=\frac{2\pi\rho a^2}{r},\quad \text{当}\ r>a,$$

$$E=2\pi\rho r,\quad \text{当}\ r<a.\tag{60}$$



$E=\dfrac{2\pi\rho a^2}{r}$　外部

$E=2\pi\rho r$　内部

图 2.20　均匀柱电荷分布之内和之外的电场．

图 2.20 是垂直于圆柱轴的截面．直角坐标系在此并不是最自然的选择，不过我们总得用它来练习一下式(59)的演算．借助于 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，电场的分量表为

$$
\begin{aligned}
E_x &= \left(\frac{x}{r}\right)E = \frac{2\pi\rho a^2 x}{x^2+y^2}, \quad \text{当} \quad r > a, \\
&= 2\pi\rho x \qquad\qquad\quad , \quad \text{当} \quad r < a, \\
E_y &= \left(\frac{y}{r}\right)E = \frac{2\pi\rho a^2 y}{x^2+y^2}, \quad \text{当} \quad r > a, \\
&= 2\pi\rho y \qquad\qquad\quad , \quad \text{当} \quad r < a.
\end{aligned} \tag{61}
$$

当然，E_z 为零.

在带电圆柱之外，div $\mathbf{E}$ 之值为

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 2\pi\rho a^2 \bigg[& \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} \\
& + \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} \bigg] = 0
\end{aligned} \tag{62}
$$

在圆柱内，div $\mathbf{E}$ 为

$$
\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 2\pi\rho(1+1) = 4\pi\rho \tag{63}
$$

我们已预计到这两个结果. 圆柱外无电荷，故由任何体积净发出的通量为零——不管这体积是大还是小；所以，通量/体积之比的极限值当然为零.在柱内，我们可用基本关系式(54)得到所需的结果.

2.12 拉普拉斯算符

我们现在已经遇到两个与电场有关系的标量函数：势函数 φ 和散度 div $\mathbf{E}$. 在笛卡儿坐标中，其关系由

$$
\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi = -\left(\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right), \tag{64}
$$

$$
\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \tag{65}
$$

表出. 式(64)表明，$\mathbf{E}$ 的 x 分量是 $E_x = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$. 将此式以

及 E_y, E_z 的相应表达式代入式(65)，我们得到 div $\mathbf{E}$ 与 φ 间的关系

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=-\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi=-\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right). \quad (66)$$

除去前面的负号之外，式(66)所表示的对于 φ 的运算，我们称之为"div grad"，或"取……的梯度的散度"。表示这种运算的符号为 ∇^2，称为*拉普拉斯算符*，或仅称*拉普拉斯*。表达式

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

是笛卡儿坐标系中所规定的拉普拉斯算符。

∇^2的含义解释如下：梯度算符常常以符号 ∇ 表示，称为"del"。它在笛卡儿坐标中写为：

$$\nabla=\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}. \quad (67)$$

如果我们把它当作矢量来处理，其平方应为

$$\nabla\cdot\nabla=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (68)$$

和在笛卡儿坐标中的拉普拉斯算符一样。故拉普拉斯算符常称为"del 平方"。说"del 平方 φ"就是指"div grad φ"。*注意*，在其它坐标系，例如在球极坐标系中，梯度算符和拉普拉斯算符的具体形式之间，就没有这么简单的关系。最好记住拉普拉斯算符的基本定义是"……的梯度的散度"。

我们现在可以直接表出在某点的电荷密度与其极近邻域中势函数之间的*局部*关系。由高斯定律的微分形式 div $\mathbf{E}=4\pi\rho$，可得

$$\boxed{\nabla^2\varphi=-4\pi\rho.} \quad (69)$$

有时称式(69)为泊松方程，它把电荷密度和电势的二次微商

联系起来．在笛卡儿坐标系中写出的形式是

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=-4\pi\rho. \tag{70}$$

这方程可以看作是在式(17)用积分表达的那个关系的微分表示式；式(17)告诉我们怎样把远近各处所有电荷源的贡献加起来来求出某点的势[1]．

2.13 拉普拉斯方程

无论在哪个 $\rho=0$ 的地方，即无电荷空间的各处，电势 φ 必满足方程

$$\boxed{\nabla^2\varphi=0.} \tag{71}$$

这称为*拉普拉斯方程*． 我们在物理学的许多部门都遇到它．实际上可以说，从数学的观点看，经典场论主要是研究这方程的解．满足拉普拉斯方程的一类函数称为*调和函数*．它们有些值得注意的性质，其中之一是：*若 $\varphi(x,y,z)$ 满足拉普拉斯方程，则 φ 在任一球面上的平均值（不必限于很小的球面），等于 φ 在该球球心之值*．容易证明，在不包含电荷的区域，对于电势 φ，这是必然成立的．考虑点电荷 q 的电场中的球面 S，q 在球面外，如图 2.21 所示．现在设想大小为 q' 的某检验电荷均匀地分布于该球面，将 q' 移来并按

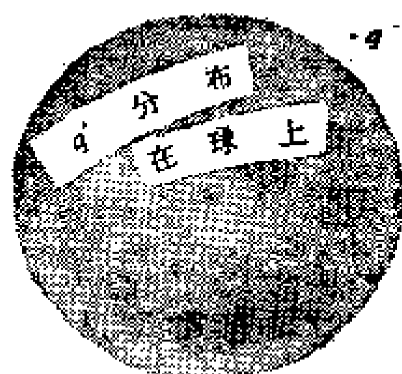


图 2.21 将 q' 移来并使之分布于球面所需之功，等于 q' 乘 q 所产生的势 φ 在此球面之平均值．

---

1) 实际上，可以证明式(70)与式(17)在数学上是等同的．就是说如果将拉普拉斯算符用于式(17)的积分，会得到 $-4\pi\rho$．我们不想停下来说明如何计算．请读者相信我们的话，否则就想想怎么把它作出来．

此种方式分布所需之功，等于 q' 乘 q 所产生的电势在球面的平均值．而我们知道，这功与球上先有此检验电荷，然后将 q 由无限远移来所需的功相同；并且我们也知道，后一情况下的功，与 q' 不是分布于球面而是集中于球心的情形也是相同的．所以，在这种情形下前面的断言得到了证明．因为许多个源所形成的电势是简单的相加，所以对于全部位于 S 球外的任何电源系统，上述的断言亦必成立．

势的这种性质与一个或许会令人失望的事实紧密地联系着，人们不能建立一个这样的静电场，它使带电粒子在无物的空间保持稳定平衡．这一特殊的"不可能定理"，像物理学中其它的这类定理一样，对于节省毫无成果的思考与努力是很有用的．我们来看看为什么这是正确的．若有一电场与此定理矛盾，在其中一点 P 上，带正电的粒子处于稳定平衡．这意味着，粒子离开 P 点作任一小位移，将其引至另一地方，该处电场的作用必将粒子推回到 P 点．就是说，在环绕 P 的小球的表面上，各处的电场必均向里指．这与高斯定律相矛盾，因为此区域内并无负电荷源（不考虑检验电荷，何况它是正的）．换句话说，不可能有这样一个真空区域，那里的电场全部向内指或全部向外指；而这却是稳定平衡所要求的条件．用电势来表述这一事实则是，对一带电粒子的稳定位置必处于电势 φ 或者比其周围相邻诸点都低（若粒子带正电），或者比其周围相邻诸点都高（若粒带负电）的地方．显然，对于一球面平均值总是等于球心值的函数而言，上述两种情形都是不可能的．

当然，可以有带电粒子在静电场中处于平衡，其意义是作用在它上面的力为零．图 1.10 中 $\mathbf{E}=0$ 的点就是这样的位置．两个电量相等的正电荷的中间位置，对于第三个电荷就是平衡位置，不管第三个电荷是正还是负．但是，这种平衡是不稳定的．（试想若第三个电荷由平衡位置稍微移动一下

将会发生什么情形.)顺便讲讲随时间而变的电场有可能把带电粒子抓住并使它保持稳定。

2.14 区分物理学和数学

上面几节已涉及到一些数学关系和表达我们所熟悉的事实的一些新方法. 我们试设想一下,如果电作用力不是纯平方反比力而是有限范围内的力,例如是像

$$\frac{e^{-\lambda r}}{r^2} \tag{72}$$

这样变化的力,将会是什么样的情形呢? 这会有助于我们把物理学和数学,定律和定义区分开. 倘若果真如此,则式(52)所示的高斯定律的积分形式肯定会失效. 因为当包围场源的面选得非常大时,这个面上的电场将会小得近于零.故当这个表面扩大时,其通量会变为零而不是保持不变. 然而,我们仍能在空间各点定义一个场强. 仍能计算场的散度,并且,描述任意矢量场数学性质的式(53)也依然成立.这里有矛盾吗?没有. 因为式(54)也将失效. 场的散度不再与源密度相同了. 这是可以理解的,我们只需注意,若场限于有限区域,无源小体积由于受这体积外的源的影响,仍可以有净通量通过. 正如图 2.22 所提示的,进入靠近源那边的通量,会比离开这体积的通量大。

于是,我们可以说,式(52)与式(54)表达同一个物理定律,即库仑由直接测量两个带电体之间的作用力而建立起来的平方反比律. 而式(53)是个数学定理的表达式,它能使我们对此定律的论述由微分形式变为积分形式,或者相反。

在事实上电荷并非平滑分布的胶状体而是集中在粒子上的世界中(关于这些粒子的内部,我们知道得非常之少),我们怎么才能证明空间中源和场间的这些微分关系式呢? 实际

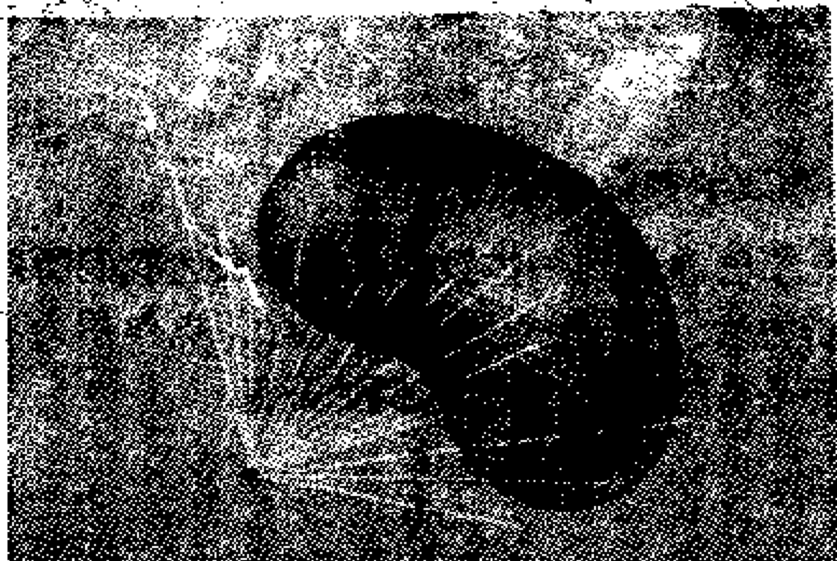


图 2.22 在非平方反比场中，通过封闭面的通量不为零.

上，式(69)(泊松方程)那样的表述，只在宏观尺度才有意义．电荷密度 ρ 须解释为：在很小区域上的平均值，但这个很小区域仍是包含大量粒子的有限区域．这样，函数 ρ 就不可能是数学家所希望的那种连续方式．在对高斯定律微分形式的论述中，当我们让区域 V_i 缩小时，作为物理学家，一定懂得不要缩得太小．这样说或许有些不恰当，但事实证明对大尺度的电学系统这种连续模型是很好的．在原子世界里，有基本粒子和真空．即使能证实库仑定律在基本粒子的内部仍有某种意义，但还有更多的规律在起作用．就静电学而言，真空服从拉普拉斯方程．但即使在真空，我们也不能确信当过渡到尺寸为零的极限时，这个式子仍有物理意义．

2.15 矢函数的旋度

我们由大封闭面的面积分出发，发展出了表征矢量场局部性质的散度概念．我们本着同样的精神，来考虑某矢量场 $\mathbf{F}(x,y,z)$ 绕一首尾相连的闭合路径 C 的线积分，曲线 C 可以设想为跨于某个表面 S 上的边界线．对这种闭路径的线积分

值，合适的名称叫环流。我们用符号 Γ（大写的 γ）来表示它

$$\Gamma=\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}. \qquad (73)$$

积分里，$d\mathbf{s}$ 是路径元，为在该地点与 C 相切的一无限小矢量[图 2.23(a)]。它可能以两个指向横切 C；我们须选定一个

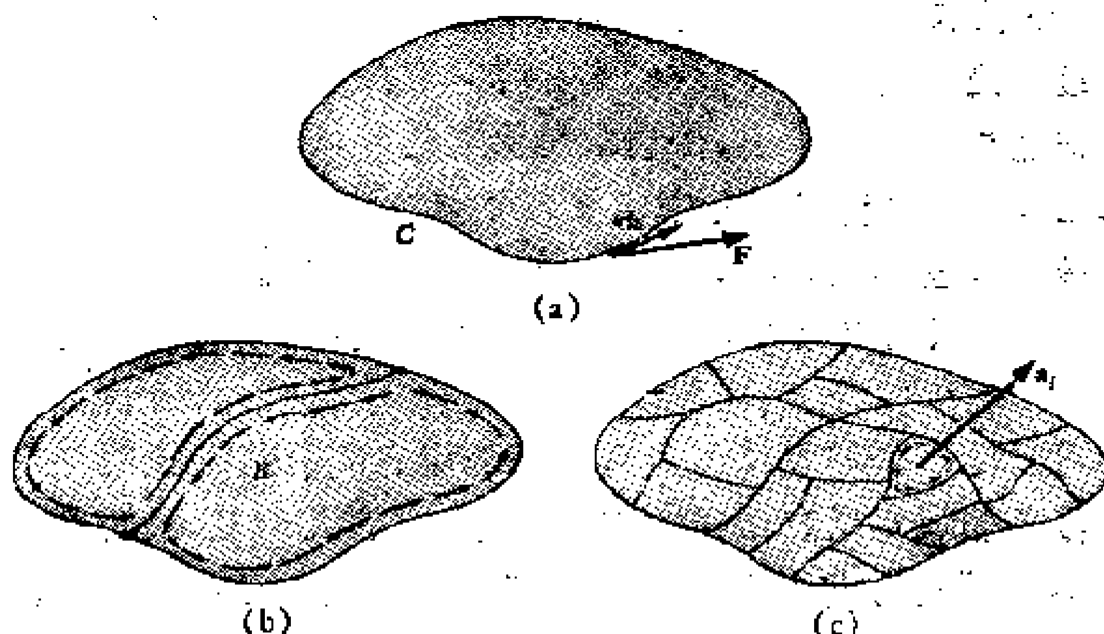


图 2.23 对于再分割的环路，绕各部分的环流 Γ_i 的总和，等于环绕原来曲线 C 的环流 Γ。

指向，使 $d\mathbf{s}$ 的方向不致含糊不定。附带讲一句，曲线 C 不一定在一个平面上，它可以是任意弯曲的。

现在以一新路径 B 在 C 上架个桥，于是形成两个环，C_1 与 C_2；每个环都将 B 作为自身的一部分包含在其中[图 2.23 (b)]。对这两个环的每一个按相同的旋转方向作线积分。容易看出，两个环流 Γ_1 和 Γ_2 之和，与原来绕 C 的环流相同。原因是在通过桥 B 处，这两个积分所沿的方向相反，余下的正好是原先绕 C 的线积分贡献的部分。继续细分下去，使之分成许多个环 $C_1, \cdots, C_i, \cdots, C_N$，其和仍不变：

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}=\sum_{i=1}^{N}\int_{C_i}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}_i$$

或

$$\Gamma = \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i. \tag{74}$$

在这里，我们可以用增加新桥的办法继续无限地再分下去，在极限情况下来寻求能够表征场 **F** 在某地邻域特征的一个量。把环再细分时，我们是在作具有更小环流的环，而环的面积也更小了。所以，很自然地会考虑环流与环面积之比，正如在 2.9 节中我们曾考虑通量与体积之比一样。然而，在这里情况有些不同，小环 C_i 所跨的小表面的面积 $\mathbf{a}_i$ 实际上是个矢量；因为表面在空间是有取向的。我们不能取标量对矢量的比值！实际上，当我们在某邻域选取越来越小的环时，我们可以把一个环安排得具有任何选定方向（记住，我们并未对这整个曲线 C 指定任何特定的表面）。这么一来，我们可以沿全然不同的方向达到极值。我们当然希望在结果中能反映出这种情况来。

分割到最后阶段，我们对小片选取一个特定的方向。单位矢量 $\hat{\mathbf{n}}$ 表示垂直于该小片的方向，并且当这小片围着某特定点 P 缩小到面积趋近于零时，此矢量保持不变。环流与小片面积之比的极限可写成这样

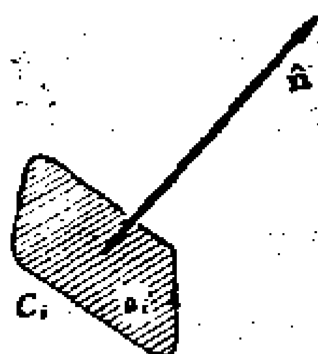


图 2.24 环流线积分所选方向与表面法向间的右手螺旋关系。

$$\lim_{a_i \to 0} \frac{\Gamma_i}{a_i} \quad 或 \quad \lim_{a_i \to 0} \frac{\int_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}}{a_i}. \tag{75}$$

其符号规则是：$\hat{\mathbf{n}}$ 的方向与线积分中 C_i 行进的指向之间，服从右手螺旋定则，如图 2.24 所示。由这种程序得出的极限是个标量，它与矢量场 **F** 中的 P 点以及方向 $\hat{\mathbf{n}}$ 相关联。我们可以选取三个独立的方向，例如 $\hat{\mathbf{x}}$、$\hat{\mathbf{y}}$、$\hat{\mathbf{z}}$，并得到三个不同的数。这样得出的

三个数可以认为是一个矢量的三个分量. 我们称此矢量为 curl $\mathbf{F}$. 就是说,对一特定方向 $\hat{\mathbf{n}}$, 我们所得到的极限值, 是 curl $\mathbf{F}$ 在该方向的分量. 以上说明用如下方程式来表述

$$(\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \lim_{a_i \to 0} \frac{\Gamma_i}{a_i} = \lim_{a_i \to 0} \frac{\int_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}}{a_i}. \tag{76}$$

例如, curl $\mathbf{F}$ 的 x 分量是选择 $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{x}}$ 时得到的, 如图 2.25 所示. 当围绕点 P 的环缩小时, 我们把环保持在与 x 轴垂直的平面上.一般说来,矢量 curl $\mathbf{F}$ 在各处是不同的. 若令小面绕另外的某点缩小, 环流与面积之比会取不同的值,这取决于矢函数 $\mathbf{F}$ 的性质. 就是说, curl $\mathbf{F}$ 本身是坐标的矢函数. 它在每点的方向与过该点的环流最大的平面垂直. 其数值为在该平面上绕所讨论点的每单位面积的环流的极限值.

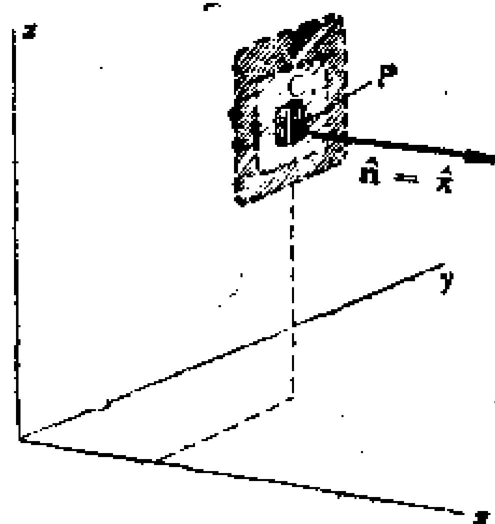


图 2.25 保持小片的法向沿 x 轴方向,小片围绕点 P 缩小.

我们只申述了以这种方法定义出来的量是矢量, 但并未证明它. 为了与矢量的称呼相适应, 依前述定义所得诸分量必须在各方面均有矢量分量的性质. 假定根据式(76)我们已求出了 x, y, z 分量的确定数值,然后,若沿某第四方向选 $\hat{\mathbf{n}}$,则由式(76)给出的结果,应当被证明是与前述三个量相一致的, 因为三个分量唯一地确定一个矢量. 假使读者愿意考查此点, 习题 2.24 会提示一种方法,使你确信式(76)所规定的确实是一个矢量的分量.

2.16 斯托克斯定理

现在我们可以由围绕无限小表面的环流来求围绕原来大环 C 的环流

$$\Gamma=\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}=\sum_{i=1}^{N}\Gamma_i=\sum_{i=1}^{N}a_i\left[\frac{\Gamma_i}{a_i}\right].\qquad(77)$$

在最后一步中，只是乘以又除以 a_i. 我们再来观察当 N_i 变得极大而每个 a_i 全部缩小时，式(77)右边会发生怎样的变化。括号中的量成为 $(\text{curl }\mathbf{F})\cdot\hat{\mathbf{n}}_i$，$\hat{\mathbf{n}}_i$ 是垂直于第 i 个小面的单位矢量. 于是在等式右端，我们得到的是对于所有小片——它们构成跨在 C 上的全表面 S——的“小片面积乘 (curl $\mathbf{F}$) 法向分量”之积的总和. 这正是矢量 curl $\mathbf{F}$ 在 S 上的面积分

$$\sum_{i=1}^{N}a_i\left[\frac{\Gamma_i}{a_i}\right]=\sum_{i=1}^{N}a_i(\text{curl }\mathbf{F})\cdot\hat{\mathbf{n}}_i\to\int_S d\mathbf{a}\cdot\text{curl}\mathbf{F}.\qquad(78)$$

于是得到

$$\boxed{\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}=\int_S \text{curl }\mathbf{F}\cdot d\mathbf{a}.}\qquad(79)$$

式(79)所表示的关系是个数学定理，称为斯托克斯定理。注意它在结构上和高斯定理，即散度定理多么相似. 斯托克斯定理把矢量的线积分和矢量旋度的面积分相互联系起来了；高斯定理[式(51)]则把矢量的面积分和矢量散度的体积分相互联系起来了. 斯托克斯定理涉及一曲面和曲面的边界线；高斯定理则涉及一体积和包围这体积的曲面。

2.17 笛卡儿坐标系中的旋度

式(76)是 curl $\mathbf{F}$ 的基本定义，并未涉及任何特定的坐标

系. 此点和我们给出散度的基本定义式(49)一样. 同样,当矢函数 $\mathbf{F}(x, y, z)$ 具体给出后,我们就想知道如何计算 $\operatorname{curl} \mathbf{F}$. 为了得到这种法则,我们计算式(76)所要求的积分,但我们是沿一种形状最简单的路径去积分的,此路径是与 xy 面平行的表面上包围一个小块矩形的边界(图 2.26). 即选 $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$. 为了和我们的符号规则一致,沿矩形边界积分的取向必须是沿 $\hat{\mathbf{n}}$ 的方向看去是顺时针的. 在图 2.27 中是从上往下看这个矩形.

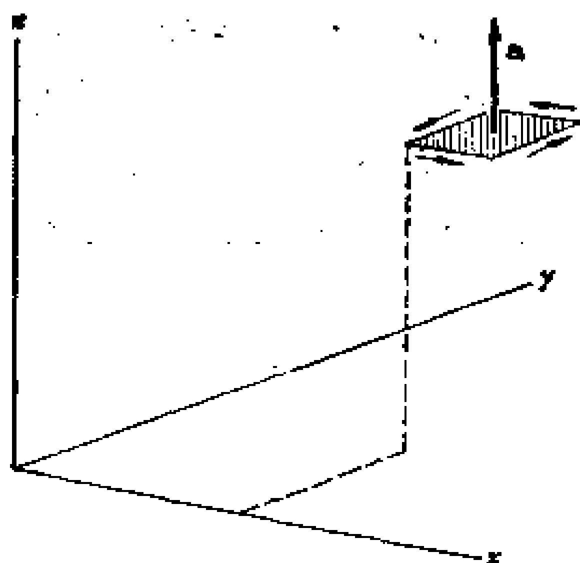


图 2.26 绕 $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$ 的矩形小片的环流.

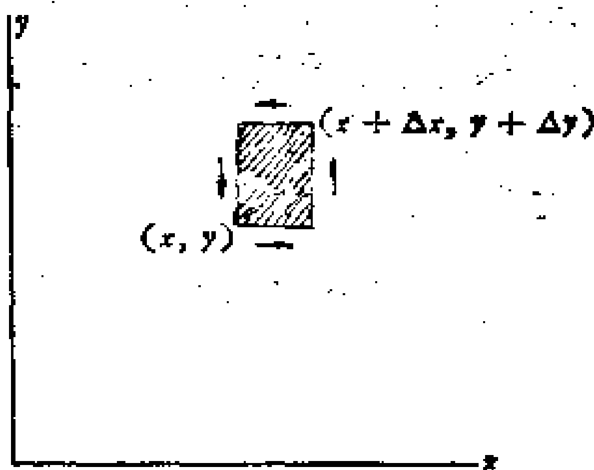


图 2.27 由上向下看图 2.26 中的小片.

$\mathbf{A}$ 绕这种路径的线积分取决于 A_x 随 y,以及 A_y 随 x 的变化. 因为在图 2.27 中,若 A_x 沿图形顶线的平均值与沿图形底线的平均值相同,则这两部分对整个线积分的贡献显然会抵消掉. 这同样也适用于矩形的另外两个边. 取到 Δx, Δy 的一阶微量,A_x 在路径顶段 $y + \Delta y$ 处的平均值与 A_x 在路径底段 y 处的平均值之差,为

$$\left(\frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \Delta y. \tag{80}$$

此论证与我们在图 2.16(b) 中所用的相似．

$$A_x' = A_x(x, y) + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial A_x}{\partial x} \text{（在图形底线的中点），}$$

$$A_x = A_x(x, y) + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial A_x}{\partial y} \text{（在图形顶线的中点）．} \tag{81}$$

这就是所提到的平均值，取到泰勒展开式的一阶． 正是它的差值乘以路径段的长度 Δx，决定它们对环流的净贡献． 这贡献为 $-\Delta x\Delta y(\partial A_x/\partial y)$． 前边负号的来源，是因为在顶上积分是向左边进行的，故若在顶上 A_x 更大些，则导致环流的贡献为负． 两个边的贡献为 $\Delta y\Delta x(\partial A_y/\partial x)$． 这里符号为正，因为若在右边 A_y 更大，结果导致对环流的贡献为正．

这样，忽略 Δx 和 Δy 的一切高阶项，围绕整个矩形的线积分为

$$\int_{\sqcup} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s} = (-\Delta x)\left(\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\Delta y + (\Delta y)\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}\right)\Delta x$$

$$= \Delta x\Delta y\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right). \tag{82}$$

$\Delta x\Delta y$ 是被环绕矩形的面积之值，我们已用沿 z 轴方向的矢量来表示它．显然，量值

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \tag{83}$$

是比值

$$\frac{\text{围绕小片的线积分}}{\text{小片面积}} \tag{84}$$

在小片缩小趋近于零时的极限．若矩形框架的法向沿正 y 轴方向取向，则我们会得到与式(84)相对应的比值表达式

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}. \tag{85}$$

若框架法向沿 x 轴方向取向，如图 2.28 右边那个框架，则我们将得到

$$\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}. \qquad (86)$$

虽然我们只考虑了矩形的情形，上述结果实际上与小片及其框架的形状无关。其原因与散度定理中所涉及的积分与小盒的形状无关相类似。例如，我们显然可以随意联结不同的矩形以组成其他样子的图形，因为沿合并部分边界的线积分恰好都相互抵消了（图 2.29）。

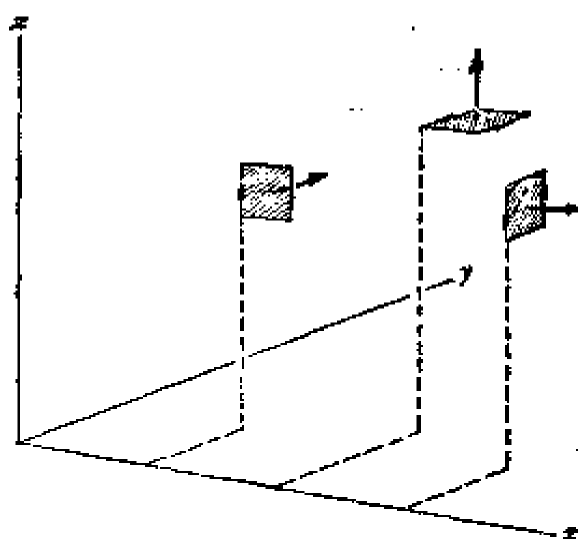


图 2.28　对每个方位，环流/面积的极值确定 curl **A** 在那点的一个分量。为了确定矢量 curl **A** 在任一点的全部分量，小片都应聚集在该点，这里为清楚起见，把小片分散开了。

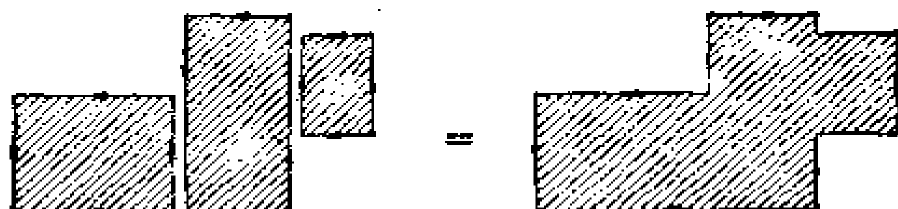


图 2.29　右边迴路的环流是左边各矩形的环流之和；右边的面积是左边各矩形面积之和。此图说明为什么环流/面积的比值与迴路的形状无关。

我们可以得出结论：不论这些方位中的哪一个，环流与其面积之比的极限和所选小片的形状无关。这样，当 **F** 作为 x、y、z 的函数被给定时，我们得出矢量 curl **F** 各分量的一般公式为

$$\operatorname{curl}\mathbf{F}=\hat{\mathbf{x}}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)+\hat{\mathbf{y}}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)$$

$$+\hat{\mathbf{z}}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right). \tag{87}$$

可以看出下面的规则比这个公式本身更易于记忆，做个这样的行列式

$$\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{88}$$

根据行列式的规则把它展开就会得出式(87)给出的 curl $\mathbf{F}$。注意，curl $\mathbf{F}$ 的 x 分量决定于 F_z 在 y 方向上的变化率和负的 F_y 在 z 方向上的变化率，等等。

符号 $\nabla\times$ 读作 del-cross，它常用来代替 curl 这个名称，这里的 ∇ 解释为"矢量"

$$\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z} \tag{89}$$

如果写出 $\nabla\times\mathbf{F}$，遵循矢量积的分量规则，我们就可自动地得到矢量 curl$\mathbf{F}$。所以，curl$\mathbf{F}$ 与 $\nabla\times\mathbf{F}$ 指的是同一件事。

2.18 旋度的物理意义

"旋度"这个名称使我们想到，一个非零旋度的矢量场具有环流或涡旋。麦克斯韦用了*旋转*这个名称，在德文中现仍用相似的名称，简写为 rot。设想一速度矢量场 $\mathbf{G}$，并假定 curl$G$ 不为零。这场中的速度有这样一些特性：把↑⇄↓或↓⇆↑那样的速度加到一种流动上；大多数情况可能是叠加在沿某一方向运动的一般流动上。例如由浴盆流出的水的速度场通常是带有环流的。在这表面的大部分地方，水流速度场的 curl 不为零。飘浮在水面上的东西随水流动时就会在水

面上旋转(参看习题 2.16 和 2.26). 在流动流体的物理学，流体动力学和气体动力学中，旋度的概念很重要，是一个核心问题.

为了制做电场"旋度计"，至少可以作这样的设想：可以用绝缘的辐条把正电荷固定在一个轴上，如图 2.30 所示．用这装置探测电场时，我们将发现，在curl **E**不为零的任何地方，这轮子都有绕轴转动的趋势．以弹簧抑制旋转，用弹簧扭转量来指示出转矩，则此量应与矢量 curl **E** 沿转轴方向的分量成正比．如果我们能找出转矩最大并且与转动是顺时针关系的转轴方向，这个方向就是 curl**E** 的方向(当然，在旋量计转轮范围内，如果场强变化很大，在这种场中，这种旋量计就不能再用了).

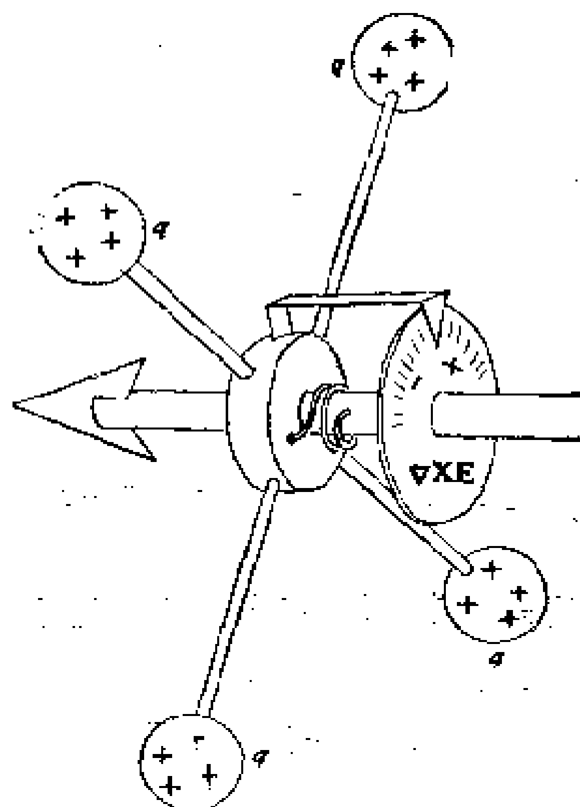


图 2.30 "旋度计"

按上面讲的这些，对静电场 **E** 我们能讲些什么呢？我们能够得出的结论是很简单的，旋度计的读数将永远是零！这是我们已知事实的必然结果；即在静电场中，**E** 绕任一闭合路径的线积分为零．为了想出为什么是这样的，我们记得，**E** 在任意两点(例如图 2.31 中的点 P_1 和 P_2 之间)的线积分与路径无关．当我们将 P_1 与 P_2 两点紧紧地放在一起时，图中较短路径上的线积分显然等于零——除非 P_1 和 P_2 的最终位置是奇点，例如在点电荷处；这种情形我们可以排除．故图 2.31 (d)中闭合迴路的线积分必为零．倘若沿任何闭合路径之环

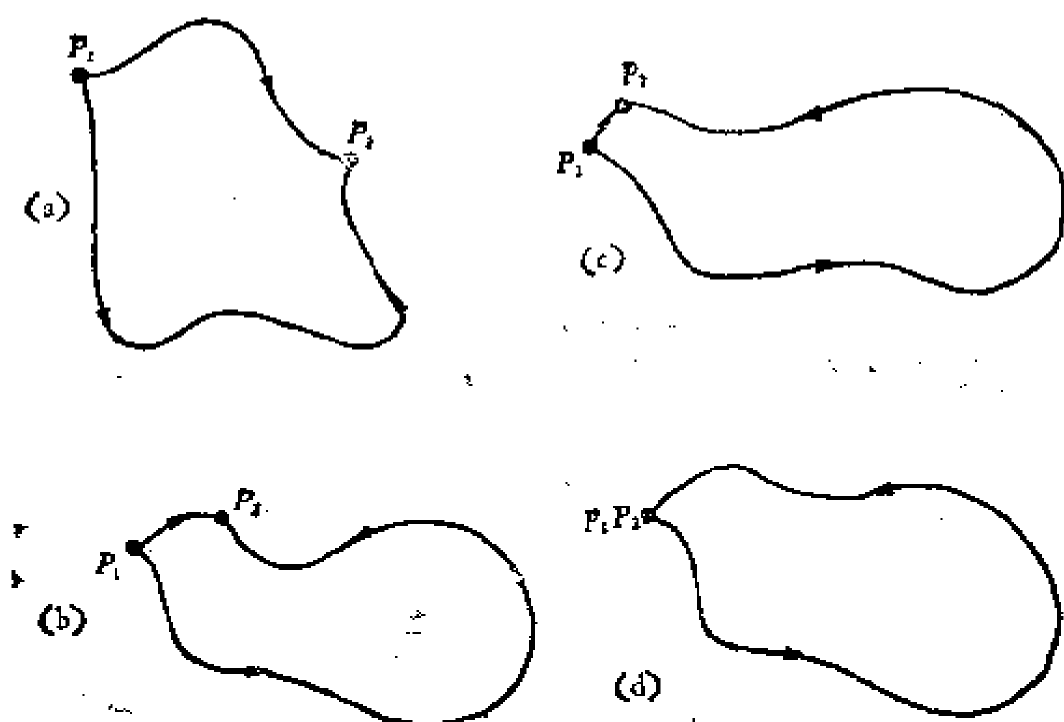


图 2.31 若 P_1、P_2 间的线积分与路径无关，则沿闭迴路的线积分必为零.

流都为零，则由斯托克斯定理，curl **E** 对任意形状、任意尺寸或位置的小面的面积分为零。于是，curl **E** 必处处为零，因为若 curl **E** 在某处不为零，则我们可在该处的邻域安排一个小片，使上述结论遭到破坏。所有这些讨论导致一个简单的叙述：在静电场中

$$\text{curl}\,\mathbf{E} = 0. \quad (\text{无论何处}) \tag{90}$$

反过来，可以说式(90)是保守场的充分条件。保守场是那种可以用某种势函数来描述的场。

这是很容易检验的。在图 2.2 中的矢函数第一次被引进时，我们就说过它代表一种可能的静电场，其分量由 $E_x = Ky$ 和 $E_y = Kx$ 给出。我们还该加上 $E_z = 0$ 以便完成对于三维空间的场的描述。计算 curl **E**，得出

$$(\text{curl}\,\mathbf{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0,$$

$$(\text{curl}\,\mathbf{E})_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0,$$

$$(\text{curl}\,\mathbf{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = K - K = 0. \tag{91}$$

这就告诉我们，$\mathbf{E}$ 是某个标势的梯度。附带讲讲，这个特殊场的散度碰巧必为零，即又有

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0. \tag{92}$$

因此，它表述无电荷区域的静电场。

另一方面，由 $F_x = Ky$，$F_y = -Kx$，$F_z = 0$ 所确定的同样简单的矢函数，其旋度却不为零。而是

$$(\text{curl}\,\mathbf{F})_z = -2K. \tag{93}$$

所以，不存在这种形式的静电场。倘若粗略地画画这场的形状，就可以立即看出，这场存在环流。

由研究图 2.32 画出的两维场，可以增进我们对矢函数方面的感性认识。在所画出的全部区域中，其中四个场的矢函数的散度为零。试鉴别出这四个来。散度意味着在某邻域有净通量流入或流出。在某些图型中很容易鉴别出来，而在另一些图型中可立即看出散度为零。三个场的图中所示部分的各处，矢函数的旋度为零。试在每个图中确定沿任一环路的线积分是否为零，以鉴别出这三个场来。这是旋度的本质之所在（在你已经研究了这些图后，在把你的论证和结论同图 2.34 中所给出的解释比较之前，请想想这些问题）。

当我们以后处理旋度不为零的电场和磁场时，矢量场的旋度会被证明是一个很有用的工具。我们之所以在这里引入旋度，是因为它所包含的概念和在散度中所包含的概念密切相关。可以说我们已遇到了矢量场的两类微商，第一类，散

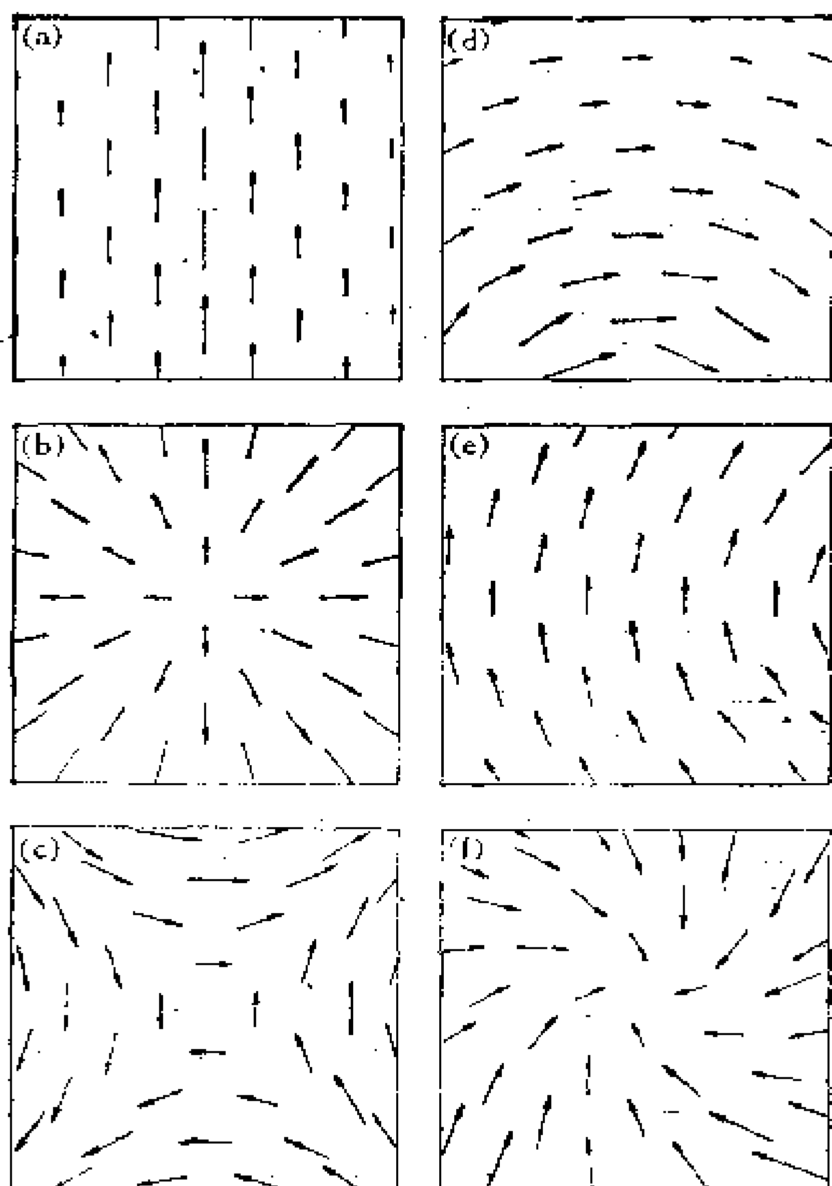


图 2.32 在所画出的区域，这些矢量场中的四个散度为零；三个旋度为零．能看出它们来吗？

度，包含矢量分量在它自己方向的变化率，$\partial F_x/\partial x$ 等等；另一类，旋量，是一种“横微商 (sideways derivative)”，它包含 F_x 沿 y 或 z 方向移动时的变化率．

现将称为高斯定理与斯托克斯定理的一些关系概括于图 2.33 中．标量势函数与其梯度的线积分之间的关系，也可以看成是这类定理之一而列于第三行．

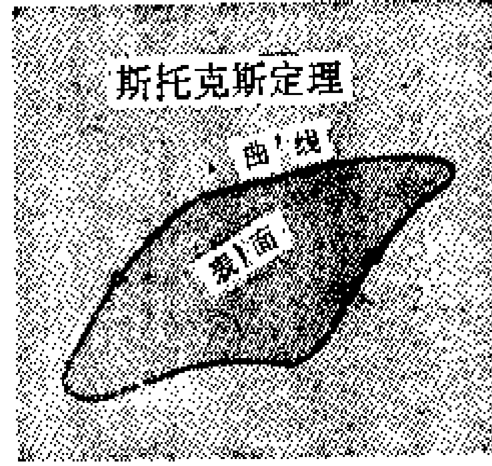
图 2.33 一些矢量关系的概括。



表面包围体积

$$\int_{\text{表面}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \int_{\text{体积}} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dv$$

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{F}$$



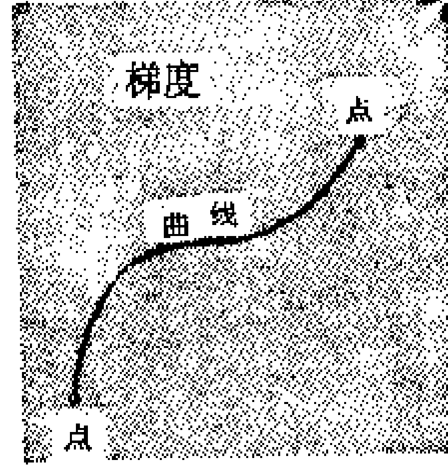
曲线包围表面

$$\int_{\text{曲线}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\text{曲面}} \operatorname{Curl} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}$$

在笛卡儿坐标系中

$$\operatorname{curl} \mathbf{A} = \hat{\mathbf{x}} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \hat{\mathbf{y}} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \hat{\mathbf{z}} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\nabla = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z}$$



点"包围"曲线

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_{\text{曲线}} \operatorname{grad} \varphi \cdot d\mathbf{s}$$

$$\operatorname{grad} \varphi = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \nabla \varphi$$

习　　题

2.1　下列函数表示一种可能的静电场：

$$E_x = 6xy,\quad E_y = 3x^2 - 3y^2,\quad E_z = 0$$

计算 **E** 从点 (0, 0, 0) 到点 (x_1, y_1, 0) 的线积分，先从 (0, 0, 0) 循直线到 (x_1, 0, 0)，然后再循直线到 (x_1, y_1, 0). 经过点 (0, y_1, 0) 沿这矩形的另外两边再作同样的计算. 如果此函数确实表示一种静电场，则沿此二路径应得到相同的答案. 我们由此也就有了势函数 $\varphi(x, y, z)$. 取 $\varphi(x, y, z)$的梯度，就会看到，又得到了所给场强的诸分量.

[线积分和梯度. 这个场在习题 2.11 和 2.20 中要进一步研究]

2.2　考查图 2.6 所示的两个电荷的系统. 令坐标轴 z 沿这两个电荷的连结线，并将 $z = 0$ 选在正电荷处. 画出沿这连线的电势 φ 的图形：φ 以静电伏特为单位，z 以厘米为单位，从 $z = -5$ 画到 $z = 15$.

[两个点电荷的势]

2.3　将半径为 r 的小球放在半径为 R 的大球的中心. 二球各携电荷 q 和 Q，电荷均匀地分布在球面上. 试计算二球之电势差. 注意，若 q 为正，则内球的电势总比外球的高. 若用一金属线将二球联结起来，则不管 Q 有多大，电荷 q 将全部流到外球上去.

[同心球的电势差]

2.4　一细杆沿 z 轴由 $z = -a$ 伸到 $z = a$，杆上携带的电荷沿杆长均匀分布，密度为每厘米 λ 静电单位. 试计算 x 轴上 $x > 0$ 各点的电势.

[带电杆的电势]

2.5　有三个无限大平面 $x = -a$，$x = 0$，$x = a$，每一

个平面上，都带着密度为 σ 的均匀面电荷. 求出整个空间的电场强度和电势，取 $x=0$ 处之 $\varphi=0$.

[带电平行平板]

2.6 对于图 2.20 中电荷密度均匀的圆柱，

(a)由高斯定律证明该图给出的柱内电场表达式；

(b)在圆柱内和圆柱外，求出作为 r 的函数的电势 φ；

(c)随手画个 φ 为 r 函数的图，奇点 $r=a$ 的性质如何？

[柱电荷分布]

2.7 $y=0$ 和 $y=b$ 两平面之间的空间充满体密度为 ρ 的均匀电荷，其他地方都没有电荷. 试求系统各处的电场，并求出这平板附近的势函数 φ，证明无论何处它都满足泊松方程.

[体电荷板的势]

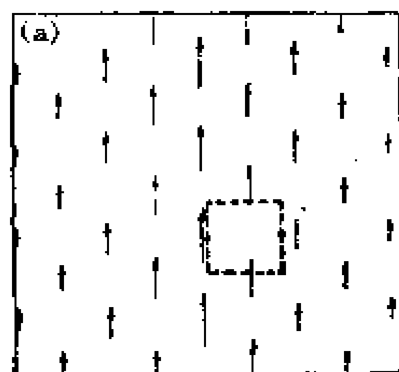
2.8 对于图 2.7 中的系统，画出紧挨着圆盘边缘的等势面的草图. 找出它与对称轴的交点.

[带电圆盘电场中的等势面]

2.9 用式(2.42)求出使四个电子环绕四面体中心的质子集合在边长 1A°的四面体的四角时所需之能量. 你能由能量的符号推断其中某一电子所受合力如何吗？

[用电势的公式表示电荷系的能量，和第一章中计算这类系统能量的方法没有本质的区别]

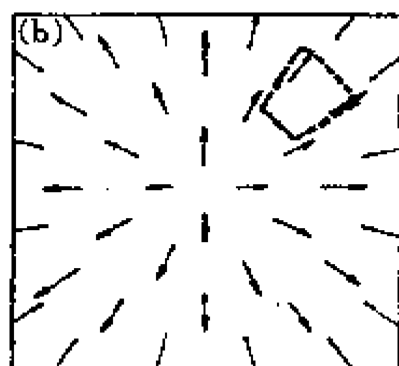
图 2.34 图 2.32 的讨论



div $\mathbf{F}=0$

curl $\mathbf{F}\neq 0$

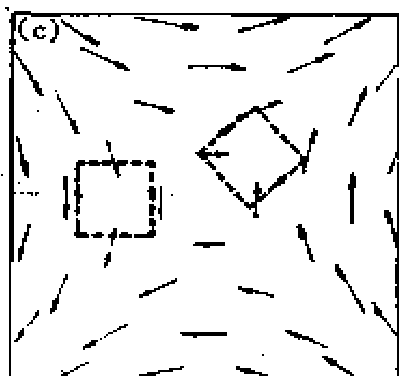
注意沿矢量所指方向前进时，矢量保持不变．即 $\partial F/\partial y = 0$ 和 $F_x = 0$. 所以 $\text{div}\mathbf{F} = 0$. 注意绕图上虚线路径的线积分不为零．



$\text{div}\,\mathbf{F} \neq 0$

$\text{curl}\,\mathbf{F} = 0$

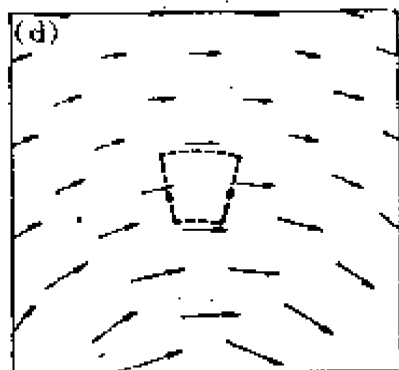
这是个中心场．即 **F** 沿径向，对于给定的 r, **F** 之值不变．任何中心场旋度为零．绕此虚线路径以及其它任何路径的环量均为零．但是，很明显，散度不为零．



$\text{div}\,\mathbf{F} = 0$

$\text{curl}\,\mathbf{F} = 0$

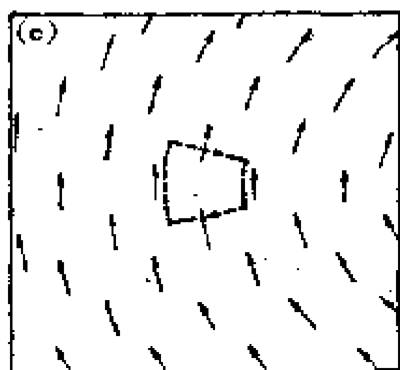
显然，绕所示二路径的环量会为零．实际上，这是与图 2.2 一样的场，是一种可能的静电场。仅从这个图，$\text{div}\ \mathbf{F} = 0$ 并不明显，但可以知道，它也会为零．



$\text{div}\,\mathbf{F} = 0$

$\text{curl}\,\mathbf{F} = 0$

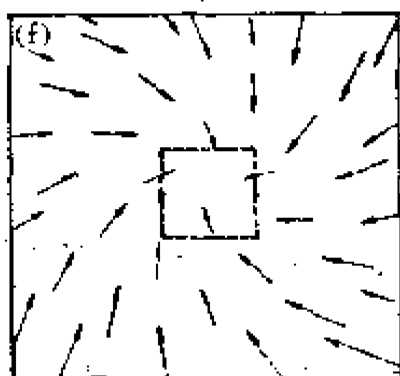
注意沿 **F** 所指的方向前进时，准确到一阶，**F** 的大小没有变化．这就足以保证散度为零．绕所示路径的环量可以为零．因为 F 在长边比在短边小．实际上这是一种可能的静电场，它的 F 值正比于 $1/r$，此 r 为到图外某点的距离．



div $\mathbf{F}=0$

curl $\mathbf{F}\neq 0$

与上面的理由相同，我们推断 div $\mathbf{F}=0$. 这里 F 的大小处处相同，故所示路径长边的线积分不为短边的线积分抵消，故环量不为零.



div $\mathbf{F}\neq 0$

curl $\mathbf{F}\neq 0$

很清楚，绕虚线之环量不为零. 并且还显示出散度不为零. 因为我们可以看到，矢量由各方向中心会聚.

2.10 半径为 r 的两个同样的球分开的距离 $d\gg r$，将电荷 Q 放在二球的球面上.

(a) 若在每个球上放置 $Q/2$ 的电荷，系统的势能如何?

(b) 若全部电荷都放在一个球上，另一球上无电荷，势能又如何?

(c) 在(a)、(b)二情形下，每个球的电势如何?

(d) 在情形(b)下，若我们用一根细导线把这两个球连接起来，于是电荷能由一球流到另一球上，则最终的电荷组态将是怎样的? 能量守恒怎样?

2.11 以直接计算 $\nabla\times\mathbf{E}$ 各分量的方法，证明习题 2.1 所给定的矢函数是一种可能的静电场.（自然，如果作完了习

题 2.1，就已经用另一种方法证明了它，即求出了一个标量函数，电场强度是它的梯度。)再求出此场的散度。

2.12 函数 $f(x, y) = x^2 + y^2$ 满足二维的拉普拉斯方程吗？函数 $g(x,y) = x^2 - y^2$ 呢？作出后一函数的草图，计算在 $(x = 0, y = 1)$；$(x = 1, y = 0)$；$(x = 0, y = -1)$ 和 $(x = -1, y = 0)$ 诸点的梯度，并以小箭头标出这些梯度矢量的指向。

2.13 在 xy 面上画出矢函数 $\mathbf{A} = -y\hat{\mathbf{x}} + x\hat{\mathbf{y}}$ 的"电力线"。计算 $\mathbf{A}$ 的旋度并画出一矢量表明它的方向。计算在闭合曲线，$x^2 + y^2 = 1, z = 0$ 上的线积分

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

并在以此曲线为边界的表面上计算 $\nabla \times \mathbf{A}$ 的面积分以说明斯托克斯定理成立。

[一个简单示例中的旋度和斯托克斯定理]

2.14 计算下述每一个矢量场的旋度和散度。若旋度为零，试找出一标函数 φ 来，其梯度为该矢量场的场强。

(a) $F_x = x + y$；$F_y = -x + y$；$F_z = -2z$；

(b) $G_x = 2y$；$G_y = 2x + 3z$；$G_z = 3y$；

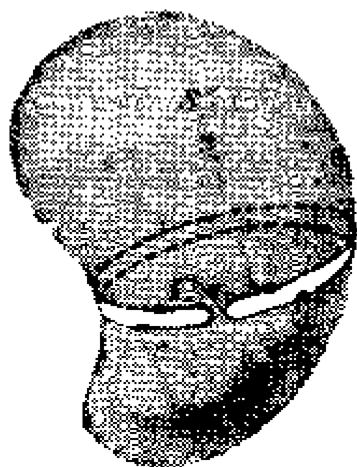
(c) $H_x = x^2 - z^2$；$H_y = 2$ ；$H_z = 2xz$。

2.15 若 $\mathbf{A}$ 为一连续可微的任意矢量场，则 $\text{div}(\text{curl}\mathbf{A}) = 0$；或者用 ∇ 符号，$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$。我们以后需要这个定理。现在的习题是要证明它。可以采用两种不同的方法去作。

(a)（在一特定坐标系中的直接计算）：用笛卡儿坐标系中 ∇ 的公式，算出 $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$ 中所包含的二级偏微商。

(b)（借助于散度定理和斯托克斯定理而无需坐标系）：

考虑图中的"气球"几乎被一切为二，它的表面 S 以闭合曲线 C 为界．考虑任意矢量场在像 C 那样的曲线上的线积分．然后，借助于斯托克斯定理和高斯定理，作适当的论证．



习题 2.15

[一个重要的矢量定理]

2.16 令矢量 $\mathbf{v}(x, y, z)$ 表示流体中任一点的速度．设此流体是不可压缩的，即各处密度相同．注意，这意味着，每秒通过任一固定于空间的小框架面积的物质与 $\mathbf{v}$ 成正比．若 $\mathbf{v}$ 在任意点是不随时间而变的常量，并且物质是守恒的，则 $\operatorname{div} \mathbf{v}$ 必处处为零．为什么？然而，这点是比较次要的，本题主要关心的是 $\operatorname{curl} \mathbf{v}$．考虑一类特殊的与时间无关的流动模型：流动是轴对称的，且 $\mathbf{v}$ 总是圆周指向的，即在任一点，$\mathbf{v}$ 都是与包含该点和轴的平面相垂直的矢量．由于轴对称，用柱坐标 z、r 和 φ 比较合适．作进一步限制，设 $\mathbf{v}$ 只是 r 的函数，则任何这种类型的流动都能以 $\mathbf{v} = \hat{\boldsymbol{\varphi}} v(r)$ 来描述．$\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ 为垂直于 $\hat{\mathbf{r}}$ 和 $\hat{\mathbf{z}}$ 的单位矢量．试由依据环绕一个小面的线积分而作出的关于 $\operatorname{curl} \mathbf{v}$ 的基本定义出发，证明具有这种特殊对称性的场，$\operatorname{curl} \mathbf{v}$ 简单地由

$$\operatorname{curl} \mathbf{v} = \hat{\mathbf{z}} \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r v(r))$$

给出．试用这个结果来研究相应于下述特殊情形的函数 $v(r)$：

(a) 液体像刚体一样，以角速度 ω 绕轴旋转，此时 $\operatorname{curl} \mathbf{v}$ 怎样？

(b) 液体运动满足 $\operatorname{curl} \mathbf{v} = 0$．无论何处这都能成立吗？函数 $v(r)$ 是什么样？试给一草图表示这种流动．

(c) 液体运动的 $v(r)$ 遵从行星迴转运动的开普勒定律，试问 curl $\mathbf{v}$ 怎么样？会不会像土星环那样运动？

[具有特殊对称（轴对标和圆周指向）的速度矢量场的物理实例]

2.17 我们在讲式(36)和与之相当的式(39)时，没有证明．而对式(43)，我们可以认为是作过粗略推导的．这样，我们试试由式(43)来证明式(39)．借助于以下的数学工具，应该能够做到这点：

(a) 矢量恒等式 $\nabla\cdot(f\nabla f)=(\nabla f)^2+f\nabla^2 f$，它尽管很难证明，但可以这么假设．

(b) 泊松方程．

(c) 散度定理．

[电场中所储存能量的一般公式之推导]

第三章 导体周围的电场

3.1 导体和绝缘体

最早期的电学实验工作者观察到物质具有不同的带电能力．有些物质通过摩擦很容易起电，并保持带电状态；另一些物质看来不能用这种方法起电，或者即使使它们起电了，也不能维持带电的状态． 18 世纪初期的实验工作者编列出表格，把物质分成“电质”（electricks）或“非电质”（non-electricks）．在 1730 年前后，英国格兰的一些重要实验表明“电质的特性”（“Electrick Vertue”），电能够通过水平的绳子，从一个物体传导到相距几百英尺远的另一个物体上，这水平的绳是用丝线从上边悬吊起来的[1]．当时的电学工作者们掌握了导体与非导体之间的差别以后，他们发现：如果把“非电质”的物质用玻璃支架支上或用丝线挂起时，也能很好地起电．当时流行的电学演示中曾有这样一项生动的表演：把一个男孩用丝带悬挂在梁上，使他带电；他的头发便会竖起来，并从他的鼻尖上放出电火花来．

从格兰和与他同时代的电学工作者们的工作中精心累积的有关电质与非电质的资料看来，总的说，是把物质划分为电的绝缘体和电的导体． 在自然界中物质所显现的差异之中，绝缘体和导体的区别还仍然是其中最惊人、区别最大的一种．普通金属那样的一般良导体的电导率要比玻璃和塑料那样的

1）他所用的绳子是“打包绳”． 和金属线相比它无疑是相当坏的导体，但在静电实验中用来传送电荷还是足够好的，格兰也发现细铜线是导体，但是在作较长距离传导实验时，他总是用打包绳．

一般的绝缘体的电导率大 10^{27} 的数量级. 用 18 世纪的实验工作者，如格兰或富兰克林，可能了解的话来说：安装在金属棒上的金属球能在百万分之一秒的时间内失去它所带的电荷；而安装在玻璃棒上的金属球在几年时间内仍能保持它的“电质特性”. (为了证实上述论断，我们需要采用一些高于 18 世纪实验室的实验手段来防止漏电. 你能提出一些办法来吗?)

良导体和良绝缘体在电学上的差别正如液体和固体在力学上的差别一样大. 这并不完全是偶然的. 这两种性质都取决于原子质点的流动性：在电的情形，是载流子(电子或离子)的流动性；在力学性质方面，是构成这些物质结构的原子或分子的流动性. 再作进一步的类比，我们知道有流动性介于固体和液体之间的物质，例如沥青或冰淇淋. 确实有些物质，如玻璃就是很好的例子——从易流动的液体逐渐地连续地变为持久刚硬的固体，同时温度降低几百度. 在导电性方面，我们也可以从“良导体”到“良绝缘体”的广泛范围内找到例子，有一些物质可以随着一些条件(如它们的温度)的变化在很广的范围内改变它们的导电性. 有一类引人注意的，极有用的物质，叫做半导体，就具有这种性质，以及一些更为奇特的性质.

我们把一种物质叫做固体或者液体；这取决于时间尺度，或许也取决于所涉及到的距离尺度. 如果你手里拿起一块天然沥青，这块天然沥青似乎是足以称为固体的了. 但从地质学的观点来看，它是液体的，它从地下矿层喷出来，甚至造成湖泊. 由于一些类似的理由，我们可以认为一种物质是绝缘体或是导体，这取决于我们所关心的现象的时间尺度. 我们对于比较简单的和一般的现象将只以时间尺度作为判据，而不用距离尺度. 现在还不需要把这种差别确切地表示出来.

3.2 静电场中的导体

我们先研究包括导体的静电系统。这就是说：我们要研究导体内电荷重新分布后所呈现的电荷及电场的稳定状态。出现的任何绝缘体都假定是理想的绝缘体。如前所述，通常的绝缘体是非常接近这一理想的，因此我们所要讨论的系统就不是不现实的。我们所想到的这些系统可以典型化为这样的例子：移近彼此相互绝缘，并和其它任何东西都绝缘的两个带电金属球。把它们固定在相当靠近的位置上。围绕这两个球以及两球之间的整个空间所形成的电场是怎样的？在每一球上的电荷又是怎样分布的？我们先从更一般的问题开始：在电荷达到稳定状态以后，导体内部的电场是怎样的？

在静电情形，电荷不再移动。你就可以说：导体内部的电场必为零。你能够这样论证：如果电场不为零，可移动的电荷会因受到作用力而移动，这样电荷就不会处在静止状态。这样的论证忽视了可以作用在电荷上的其它的力的存在的可能性，可能必须有这样的力来与电力相平衡而导致稳定状态。为了提醒我们自己，在物理上还可能有电力之外的力作用于电荷上，我们只要想到万有引力就行了。一个正离子有重量，在重力场中受到一个不变力的作用，一个电子也是如此；当然它们所受的力是不相等的。但这是一个相当奇特的例子。我们知道在原子尺度上，重力是完全可以忽略不计的。但仍有其它的力在起作用，我们可以不严格地称之为“化学力”。在电池中和在许多其它化学反应场所，包括在有生命的细胞中，电荷携带者有时会反着一般的电场方向运动；它们所以这样运动是因为在那里可以发生一种反应，这种反应提供的能量比抵抗电场所消耗的能量还多。人们很难把这些力称作非电的，据我们所知，原子的和分子的结构以及它们之间的

作用力可以用库仑定律及量子力学来解释．但是我们从经典的电学理论来看，必须把它们全部当作外加力来处理．当然它们的行为完全不同于我们理论所根据的平方反比力．在第二章中我们发现只有平方反比力是不能形成稳定静止的结构，这就预示，一般必须有在这种意义下的非电力．

论点很简单，就是：在某些情形下，我们必须准备找出导电介质内作用于电荷携带者上的，未被平衡的，非库仑力．当出现这样的情形时，是由于在导体内存在一定的电场，它恰好抵消任何其他力的作用而达到静电状态．

提出上述注意事项之后，我们便可转到一个非常熟习的重要情形，即均匀的各向同性的导电物质的情形，这样就不会有上述那样的力来麻烦我们了．在静电的情形，我们可以确切地说在这种导体内部电场必须是零[1]．如果不是这样，电荷必定要运动．因此在导体内部的所有区域，包括刚刚在表面内的所有各点，必然有相同的电势．我们知道电势可以在导体内部和外部之间突然跳跃（参阅习题 3.21）．但是对于均匀的各向同性的导体（我们现在只考虑这种情形），在导体面上各处这种跳跃都是相同的．导体外部的电场不是零．导体表面必定是这电场的一个等势面．

假想我们能够随意地把一种物质从绝缘体改变为导体．（这不是不可能的——玻璃加热之后可以成为导体；任一气体都能被 X 射线电离．）图 3.1(a) 表示放在两个固定电荷层所

1）所谓物质内部的电场，我们指的是，相对于微细的原子结构来说，在大区域内的平均场．当然，如果研究原子核附近的小尺度范围，我们知道包括良导体在内的所有物质都存在着极强的场．这场毕竟还是电场，卢瑟福，盖格，马斯登等用 α 粒子轰击金箔时就是这种电场使 α 粒子偏转（参阅第一卷第十五章，历史资料 1）．核的电场通常对物质的平均场无贡献，因为这种电场在原子核的一边指向一个方向，而在另一边则指向相反的方向．应怎样定义，和怎样测量这种平均场，这些问题现在不会遇到，无需要讨论它．

产生的电场中的一个未带电的非导体。这物体内的电场和物体外的电场是相同的.(一稠密的物体，如玻璃，实际上将使电场变形，我们将在第九章研究这种效应，但在这里它是不重要的.)现在，通过某种方法，产生可运动的电荷(或离子),使物体成为导体。正离子被电场引向一方，负离子则被引向相反的一方，如图 3.1(b)所示．它们不能移动到导体表面以外的地方去，在表面上堆积起来．它们本身在物体内部开始形成电场，所产生的电场有抵消原来电场的趋势．实际上，电荷不断地移动直到恰好抵消原来的电场为止．表面上最后的电荷分布，如图 3.1(c)所示，表面电荷产生的场和固定外源形成的场在导体内部相加结果形成零电场．因为在每一导体内这种情形是“自动”进行的，所以当我

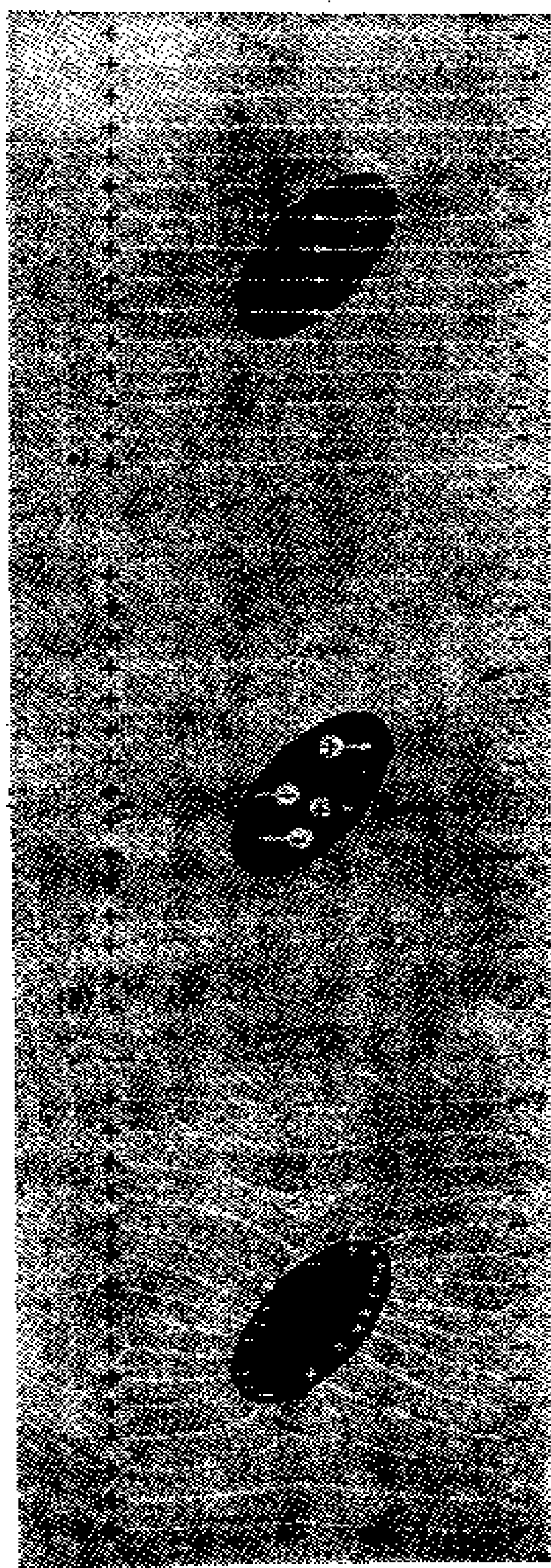


图 3.1 (a)中的物体是中性状态的非导体．其中正电荷和负电荷不能运动．(b)中电荷分离，并开始运动．它们继续运动一直达到如(c)的最终状态．

们研究外部电场时，实际上只需考虑导体的表面就行了.

知道这些以后，让我们来看一看在本来是空的空间中的一组带不同电量的导体系统是怎样的. 在图 3.2 中我们看到几个物体. 如果你喜欢的话，可以把它们看成是固体金属块，

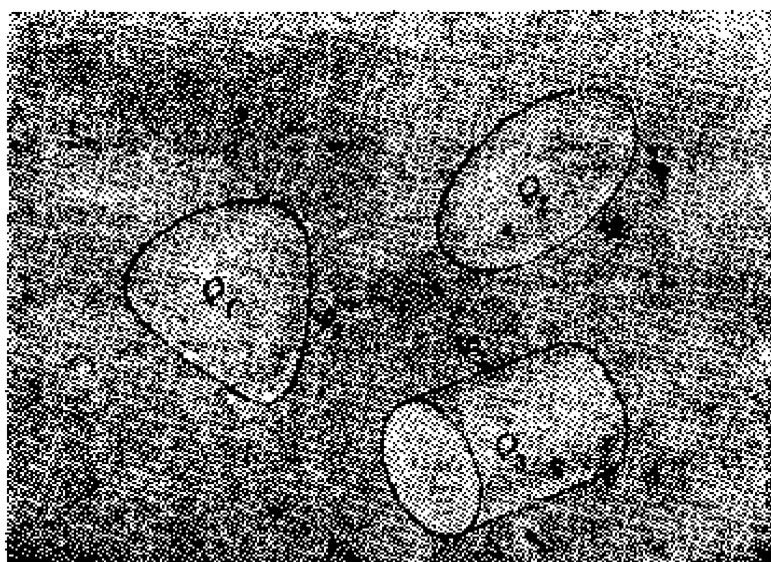


图 3.2 三个导体的系统. Q_1 是导体 1 上的电荷，φ_1 是它的电势，等等.

用绝缘体把它们固定起来（图上未画出），这种绝缘体可以是格兰所用的丝线. 每一物体的总电荷，我们指的是过剩的正的或负的净电荷，是固定的，因为没有什么途径让电荷漏出去或漏进来. 我们用 Q_k 来表示第 k 个导体上的电荷. 每一物体的特性也可以用电势函数 φ 的一个特定值 φ_k 表征出来. 我们说导体 2 是"处于电势 φ_2". 象图上所示的这个系统在没有实际物体伸展到无穷远处的情况下，通常把无穷远处的电势定为零往往是很方便的. 在这情形，φ_2 是把一微小试验电荷从无穷远处移到导体 2 上的任何地方，对单位电荷需作的功.（请注意，这正是在第 1.7 节中所指出的，试验电荷必需保持很小的那种系统.）

因为图 3.2 中的每个导体的表面必定是一个等势面，所以表面上每一点的电场（等于 $-\mathrm{grad}\varphi$）必定垂直于表面. 我

们从导体内部向外看，在导体表面处出现电场的突变；**E** 在外部不等于零，而在内部等于零．**E** 的这种不连续性是由于存在密度为 σ 的表面电荷而引起的，这表面电荷的密度可以用高斯定理直接和 **E** 联系起来．我们可以用一个扁匣子把一小片表面包围起来(图 3.3)，就象在第 2.6 节中我们分析带

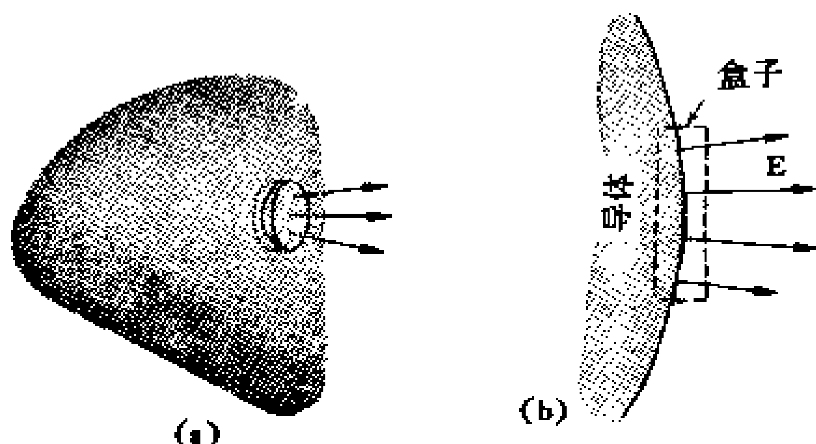


图 3.3 (a) 高斯定理把导体表面的电场强度和表面电荷密度联系起来[式(2)]．(b) 通过导体表面和匣子的横截面．

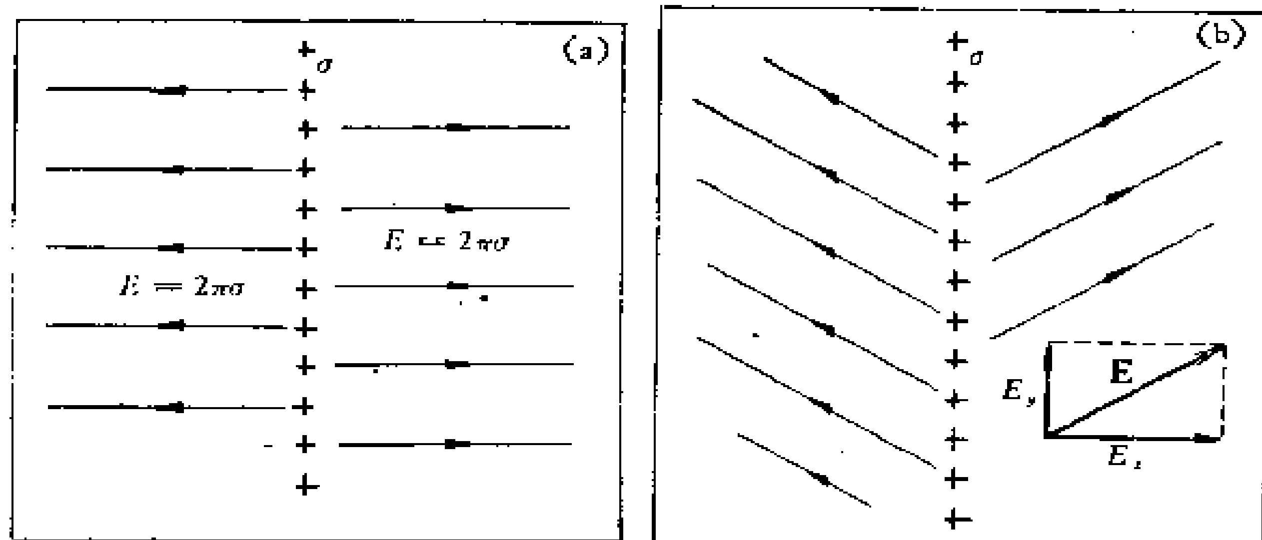
电圆片时所采用的扁匣子．在这种情况下，没有通量通过位于表面内部的匣"底"，我们得出 $E_n = 4\pi\sigma$，这里 E_n 是电场垂直于表面的分量．正如我们已经知道的，在这情形中没有其它分量，电场总是垂直于表面的．表面电荷必定是总电荷 Q_k．就是说，在整个导体表面上对 σ 的面积分必定等于 Q_k．总之，对于任何这样的导体系统，不管它们的形状怎样，排列怎样，我们能够得到如下的结果：

在第 k 个导体表面上所有各点，$\varphi = \varphi_k$． (1)

在紧靠导体外表面的任何点上，**E** 垂直于表面，且 $E = 4\pi\sigma$，这里 σ 是表面电荷的局部密度 (2)

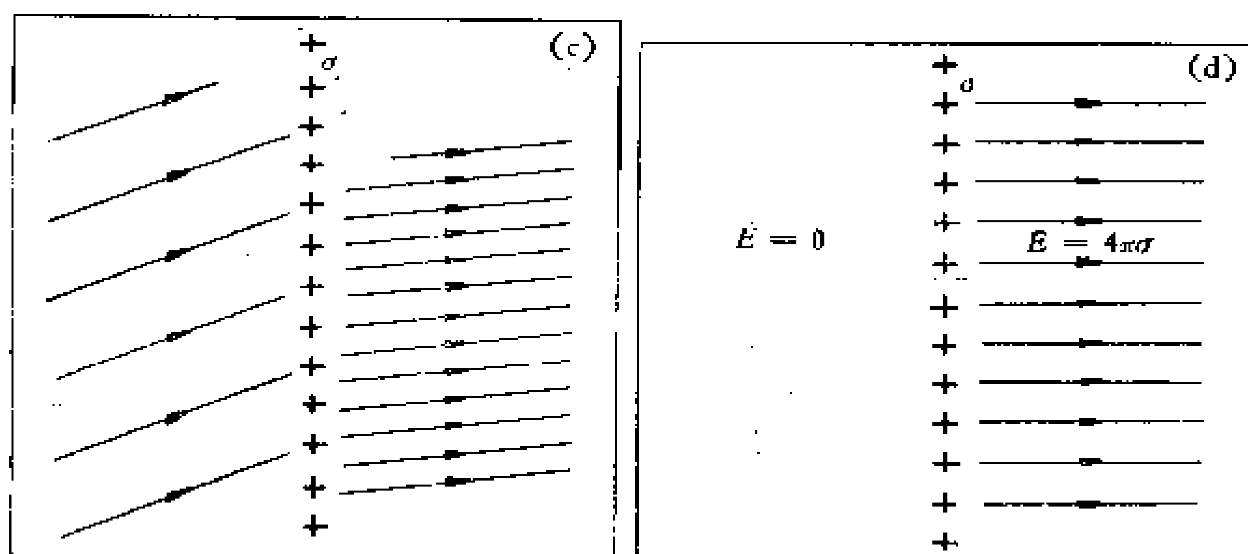
$$Q_k = \int_{S_k} \sigma da = \frac{1}{4\pi}\int_{S_k} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}. \tag{3}$$

因为(2)把 **E** 和局部表面电荷密度 σ 唯一地联系起来了，你可能会把 σ 当作 **E** 的源来想．这样想是错误的．**E** 是这系统中的近处和远处的全部电荷所产生的总电场，表面电荷只是其中的一部分．导体上的面电荷不得不"自行调整"一直到



(a) 带面电荷的孤立平面，系统中没有其它东西．这在图 1.23 中分析过．在对称的假定下，板两边的场都是 $2\pi\sigma$．

(b) 如果在这系统中还有其它的电荷，我们只能说在表面上 E_x 的改变必为 $4\pi\sigma$，E_y 的改变为零．



(c) 除了上面 (a) 的场外，还有很多场可能具有这种性质．如 (b) 及 (c) 就是．

(d) 如果我们知道在表面一边的介质是导体，则在另一边的 E 必垂直于表面，并且 $E=4\pi\sigma$．

图 3.4

满足关系式(2)为止. 导体是一种特殊的情形，和其它面电荷分布不同，其特点可以通过图 3.4 中的比较显示出来.

图 3.5 表示一个简单系统的场和电荷分布，这个系统我

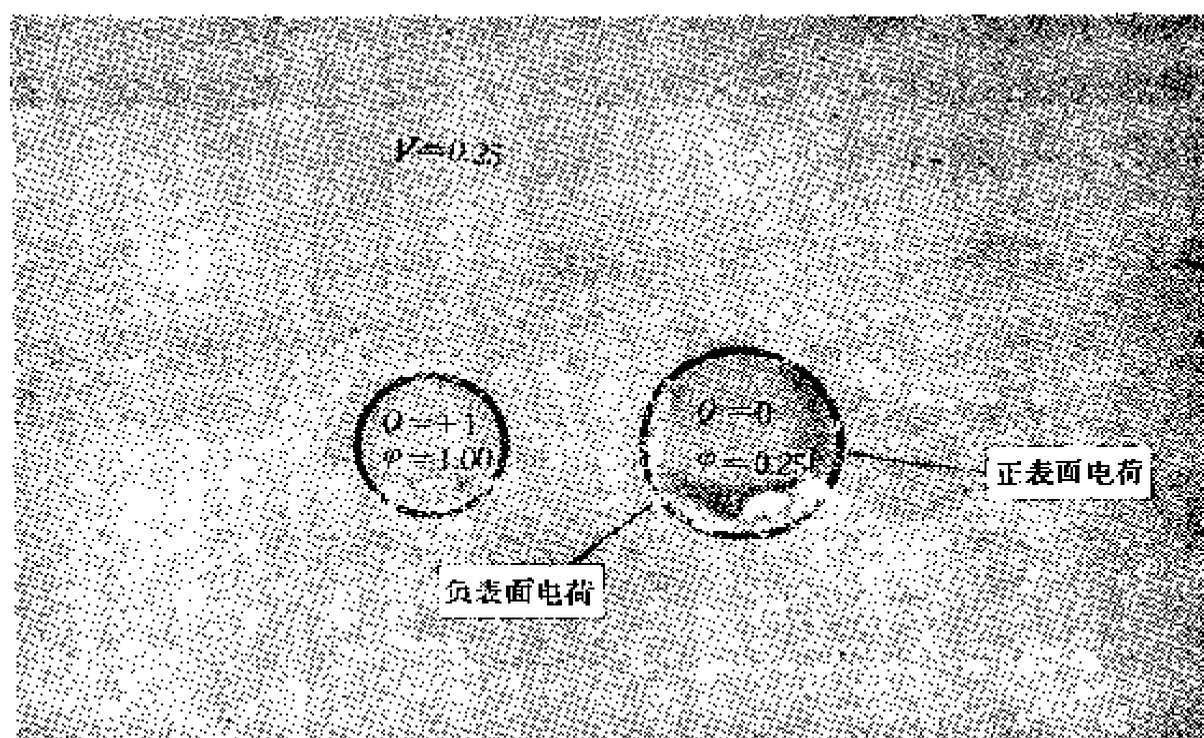


图 3.5 二个球形导体周围的电场，其中一个的总电荷为 +1，另一个为零. 虚线表示等势面和图面的交线. 零电势在无穷远处.

们以前已经提到过. 有两个导体球，一个球的半径是单位长度，带的总电荷为 +1 单位，另一个是比较大一点的球，总电荷为零. 注意每一个球上的面电荷密度都不是均匀的. 右边的球上总电荷为零，它对着另一球的那部分区域具有负的面电荷密度. 图 3.5 中的虚线表示等位面，确切地说，表示等位面和图平面的交线. 如果向外扩展出去，我们将会看到等位面成为近于球形的面，电力线几乎是辐射状的，而电场看起来非常象是电量为 +1 的点电荷的场，+1 是整个系统的净电量.

图 3.5 至少定性地表明了我们所预料到的一切特征，不过我们画出它来还有另外的原因. 即使象这样简单的系统也

不可能有什么直接的方法求得精确的数学解．图 3.5 是从一个似近解作出的．事实上，导体三维几何排列的组态能获得严格数学解的只是极少数，这点真是令人遗憾．只把注意力集中于少数几个可以获得完美解的例子，并不能得到很多的物理知识．让我们转过头来设法去了解这一系统所表现出来的数学问题的普遍性质．

3.3 一般的静电问题；唯一性定理

我们可以用势函数 φ 说明这问题，因为如果能够求出 φ，我们就可以立刻从它得到 $\mathbf{E}$．导体外部各处的 φ 都必须满足我们在第二章中所遇到的偏微分方程，即拉普拉斯方程：$\nabla^2\varphi=0$．在笛卡儿坐标中拉普拉斯方程可写作

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0. \tag{4}$$

问题是要求出满足方程(4)，同时又满足导体表面上的特殊条件的函数．这些条件可能是以各种方式提出来的．可能是每一导体的电位，φ_k，是固定的或是已知的．（在一个实际系统内，各导体的电势可以通过把导体持续地连接到电池上或其它恒压"电源"上以保持固定．）我们的解 $\varphi(x, y, z)$ 在每个表面上的所有点上都必须取正确的值．如果我们把 φ 趋近于零的"无穷远处"的大表面也算在内的话，那么，总体说来这些表面就包围了 φ 的定义域．有时我们所要研究的区域总是被一个导体表面包围起来的；这样，我们就可以给这个导体规定一个电势，而把它外部的一切情况忽略不计．在任何一种情形，我们都会遇到典型的*边界值问题*，在那里，函数在边界上所取的值在全部边界上都要规定出来．

或者我们也可以规定每一导体上的总电荷 Q_k．（我们不能任意指定所有的电荷和电势，这样做将使确定问题的条件

过多.）当明确了导体上的电荷以后，实际上我们就已经确定了每一导体表面上的 gradφ 的面积分值. 这是一个以略微不同的形式给出的数学问题. 或者我们可以把这两种类型的边界条件"混合"起来.

在某种意义上，这是一个普遍的问题，这问题是：当边界条件以某种方式给出后，算题是没有解，有一个解，还是有更多的解呢？我们不想用各种可能的形式来回答这一问题，但有一种重要情形一定要指明的，如何处理这样的问题，而且会给我们带来一个有用的结果. 假定已经规定了每一导体的电势 φ_k，同时还要求 φ 在无穷远处趋近于零，或者在包围这系统的一个导体上趋近于零. 我们可以证明对这样的边界值，问题不会有多于一个的解. 作为一个物理的问题来说，它有一个解似乎是显然的事情，因为如果我们当真把导体按规定的方式安排起来，用极小的导线把它们接到适当的电势上，则这个系统必在某种状态上固定下来. 但是用数学方法证明总是只存在一个解那完全是另一回事了，我们也不试图去作这个证明. 代替以上证明，我们先假定它有一个解 $\varphi(x, y, z)$，并证明这是唯一的. 这种证明的典型论证方法如下.

假定还有另一函数 $\psi(x, y, z)$ 也是一满足相同边界条件的解. 由于拉普拉斯方程是线性的. 所以当 φ 及 ψ 都满足方程(4)时，$\varphi + \psi$ 或任意的线性组合 $c_1\varphi + c_2\psi$ 也满足式(4)，这里 c_1 及 c_2 是常数. 特别是两个解的差，$\varphi - \psi$，必定满足方程(4). 把这函数称作 W：

$$W(x, y, z) = \varphi(x, y, z) - \psi(x, y, z). \qquad (5)$$

当然，W 并不满足边界条件. 事实上因为在导体 k 的表面上 ψ 和 φ 必取相同的值，φ_k，所以在每一导体的表面上 W 必是零. 这样，W 是另一静电问题的解，这一问题中具有同样的导体，而且所有导体都保持在零电势. 我们可以断言，如果是这

样的话，则在空间所有的点 W 必为零. 因为如果不是这样的话，则在某处必有一极大的或一极小的值——要记着在无穷远处和在所有导体的边界上 W 是零. 如果 W 在某点 P 有一极值，我们考虑一个以此点为中心的球. 在第二章中我们已经知道，满足拉普拉斯方程的函数在球上的平均值就等于它在球心的值. 如果在球心值是一极大值或一极小值，这就不能成立了. 因此 W 不可能有一极大值或一极小值；所以它必在每处都等于零. 这就要求在每处 $\psi = \varphi$，也就是说，方程(4)只有一个解满足所规定的边界条件.

我们现在容易证明另一重要事实. *在任何形状的空心导体内部，如果这空间本身没有电荷，其电场为零.* 无论在导体外部有什么样的场，这都是成立的. 我们已经熟悉这样的事实，在一孤立的均匀带电球壳内部电场是零，这正和在空心球壳形质量的内部所引起的引力场为零一样. 刚才讲过的定理，在某种程度上，更加出人意料. 我们来研究一个闭合的金属匣，图 3.6 所示的有一部分已经被切割掉了. 在匣的附近有电荷存在，外部的场近似地象画出来的那个样子. 在匣的表面上有非常不均匀的电荷分布. 空间每处的场（*包括匣子内部*），是匣子表面上电荷的场和外边电源场的总和. 似乎很难相信，表面上电荷能这样巧妙地安排它自己，使得匣内每一点由它自己引起的场恰好抵消由外部电源引起的场. 然而这毕竟是已经发生了的事实，我们可以用几句话来证明它.

在匣内的势函数 $\varphi(x, y, z)$ 必定满足拉普拉斯方程. 这区域的全部边界，即匣身，是等势的，因此可有关系式 $\varphi = \varphi_0$，在边界上每处都是常数. 在整个体积内显然有一个 $\varphi = \varphi_0$ 的解. 但根据唯一性定理，只能有一个解，所以这个解就是唯一的解. 因为 $\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi$，而“$\varphi =$ 常数”，也就是 $\mathbf{E} = 0$.

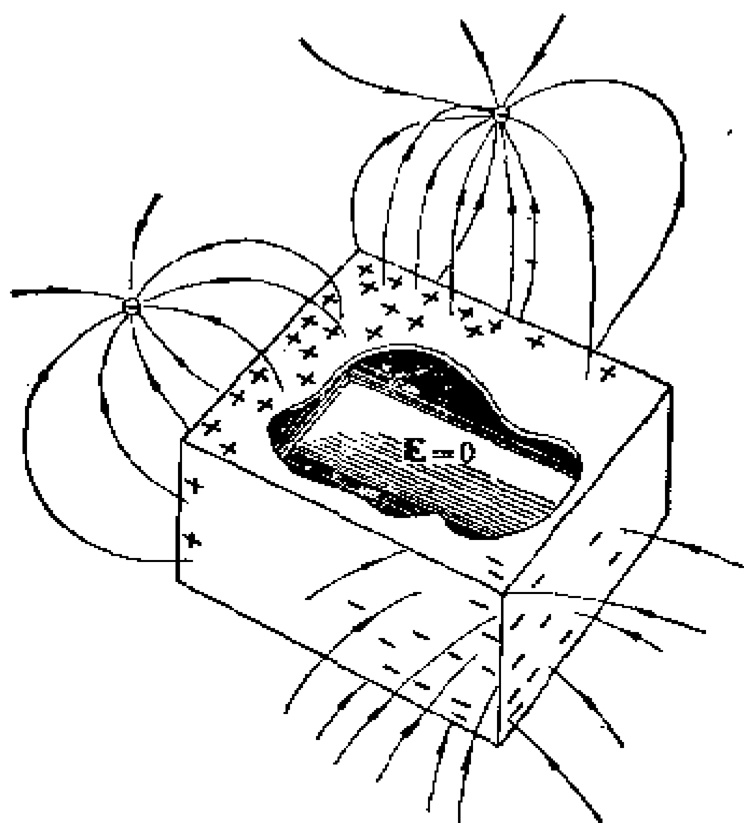


图 3.6 在闭合导体匣内每处的场都是零.

在封闭的导体壳内不存在电场这一事实，不仅在理论上引人注意，而且也有实用价值．这是电屏蔽的基础．在大多数实际应用中，包围壁不需要完全密闭．如果把包围壁打上小孔，或是用金属纱作成，除了直接紧靠小孔的附近，其它地方电场是非常弱的．两端开口的金属管，如果长度有几个直径长的话，就可以把不靠近管端的管内空间非常有效地屏蔽起来．当然，我们所考虑的只是静电场，但对缓慢变化的电场这些说法仍然有效．

3.4 几个简单的导体系统

在这节里我们将研究几种最简单的导体排列系统．我们先研究两个半径为 R_1 及 R_2 的同心金属球，各带总电荷 Q_1 及 Q_2（图 3.7）．这问题并未出现新的困难．由于对称性，显然，

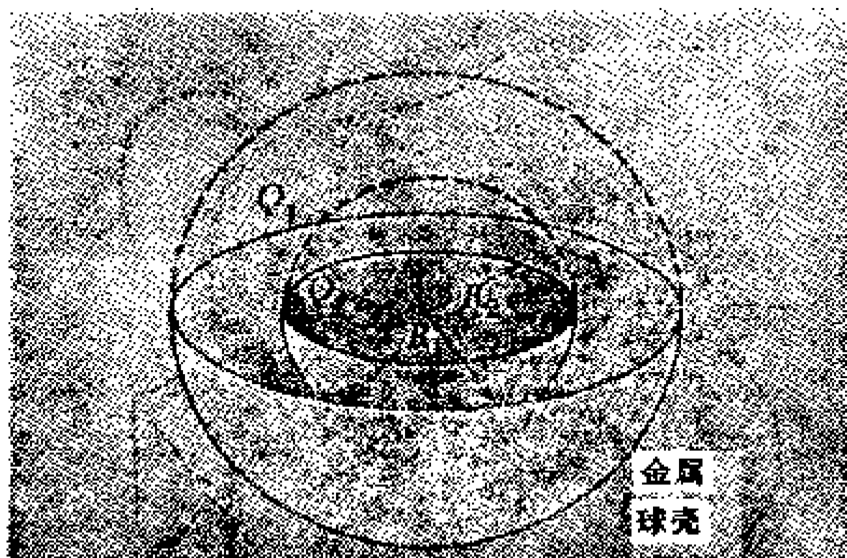


图 3.7　球壳上的电荷是 Q_1 及 Q_2，
方程 (6) 给出了球壳内部的电势.

每一球上的电荷必然都是均匀分布的，因此我们的例题实际上又回到第一章中去了！在大球外面的场是电量为 Q_1+Q_2 的一个点电荷所产生的场，所以外球的电势 φ_1 是

$$\frac{Q_1+Q_2}{R_1},$$

内球的电势是

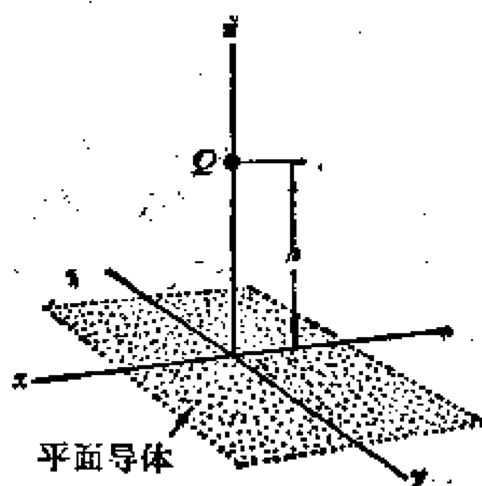
$$\varphi_2=\frac{Q_1+Q_2}{R_1}+\int_{R_1}^{R_2}-\frac{Q_2}{r^2}dr=\frac{Q_1}{R_1}+\frac{Q_2}{R_1}+\frac{Q_2}{R_2}-\frac{Q_2}{R_1}$$
$$=\frac{Q_1}{R_1}+\frac{Q_2}{R_2},\tag{6}$$

φ_2 也是内球内部所有点上的电势. 我们可以利用简单的叠加求得 $\varphi_2=(Q_1/R_1)+(Q_2/R_2)$. Q_1/R_1 是只有外球存在时在外球内部的电势，Q_2/R_2 是只有内球存在时在内球内部的电势. 如果两球带有大小相等，符号相反的电荷，$Q_1=-Q_2$，则只有两球之间的空间电场不为零.

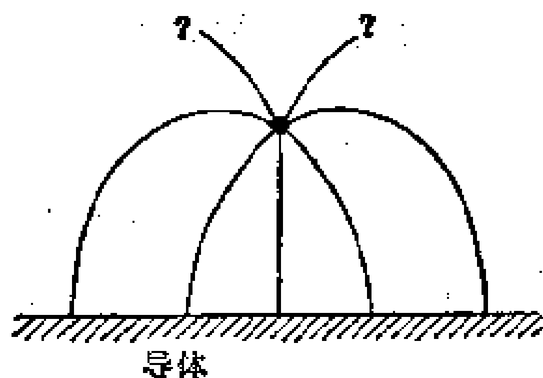
一个靠近导体平面的点电荷大概是能显示导体内电荷的迁移性的最简单的系统. 假定 xy 平面是扩展到无穷远的导

体表面．并把这个平面的电势定作零．现在引进一个正点电荷 Q，置于 z 轴上，在平面以上 h 厘米处，如图 3.8(a)所示．我们预料会有什么样的电场和什么样的电荷分布呢？我们将预料到正电荷 Q 将会吸引负电荷，但是我们很难预料负电荷会无限地密集于从 Q 点落下的垂线的底部．为什么？我们还记得在导体表面处，电场总是垂直于导体表面的．另一方面，在距点电荷 Q 极近的地方，导体平面的存在不会使情况有什么改变；场线从 Q 发出一定好象是从点电荷以辐射状发出来的．因此我们可以定性地预料它们是象图 3.8(b)那样形式的，但还有些详细情况不能肯定．当然全部电场的分布必然对 z 轴是对称的．

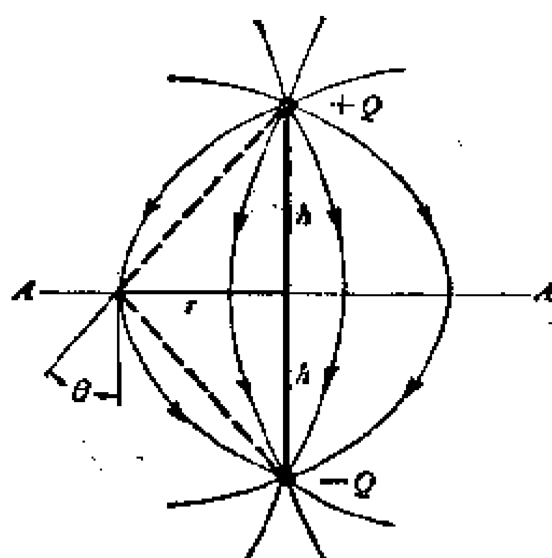
但是，我们怎样去真正地解决这个问题呢？我们可以利用一种技巧，这种技巧是有启发性的并且往往是有用的．我们找到一个容易解



(a) 在无限大的平面导体上边的一个点电荷 Q．



(b) 电场的大概图象．



(c) 一对相反符号电荷的电场．
图 3.8

决的问题，它的解，或其中一部分，是适合我们眼下要解决的问题的．这个易解的问题就是两个大小相等符号相反的点电荷 Q 和 $-Q$．在垂直平分这两个电荷的联结线的平面上，各处的电场都是垂直于这个平面的，这平面的横截线在图 3.8(c) 中以 AA 表示出来．如果使 Q 离这平面的距离和我们原题中的距离 h 相等，则图 3.8(c) 中上半部的电场就满足我们的一切要求：场垂直于导体的平面，而且在 Q 附近的场接近于点电荷的场．

这里的边界条件并不完全是上节的唯一性定理中所指出的．导体的电势是固定的，但在这系统中有一点电荷，在点电荷处电势趋近于无穷大．我们可以把点电荷看作是一个小球形导体的极限情形，球上的总电荷 Q 是固定的．对于这样的“混合”边界条件——在某些表面上给出电势，在另一些表面上给出总电荷——唯一性定理也是成立的．如果我们所“借用”的解也能满足这样边界条件，那末它就是我们所要求的那个解．

图 3.9 表示平面上边的场的最后的解，并提示出面电荷的密度．我们回到图 3.8(c) 的两个点电荷的问题，我们能用库仑定律计算在任一点上的场强及其方向．考虑在表面上，距原点 r 的一点．这点离 Q 的距离的平方等于 r^2+h^2，在这点上，Q 的场强的 z 分量是 $-Q\cos\theta/(r^2+h^2)$．在平面下边的“象电荷”，$-Q$，给出一相等的 z 分量．因此这里的电场强度是

$$E_z=\frac{-2Q}{r^2+h^2}\cos\theta=\frac{-2Q}{r^2+h^2}\cdot\frac{h}{(r^2+h^2)^{1/2}}$$

$$=\frac{-2Qh}{(r^2+h^2)^{3/2}},\tag{7}$$

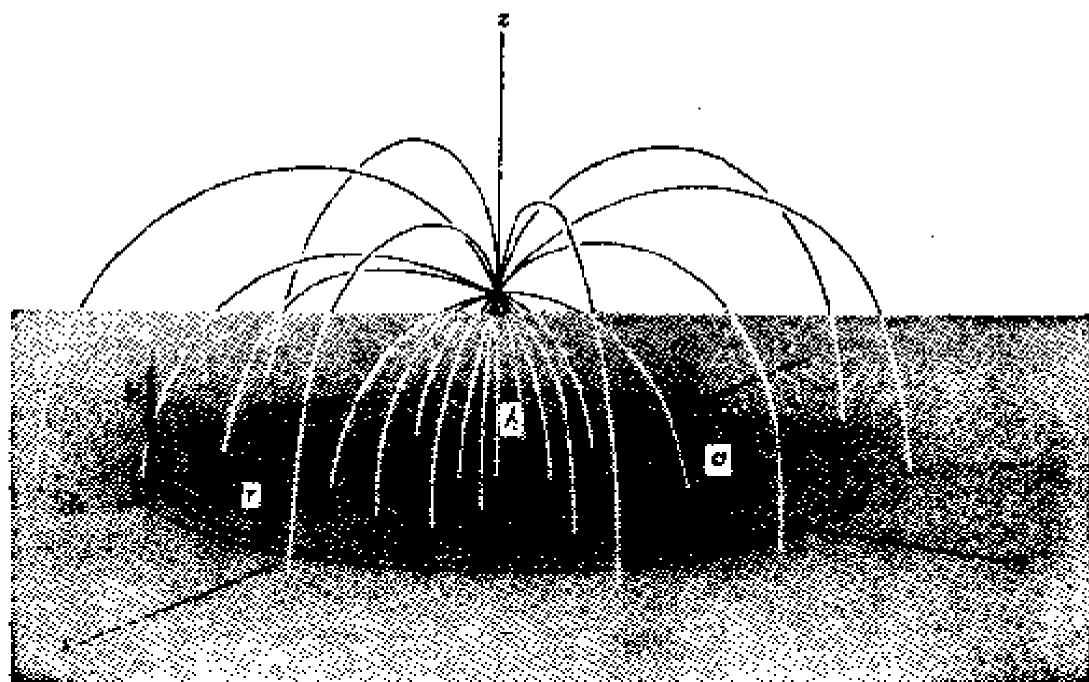


图3.9　在平面上边的点电荷的一些场线．由方程(7)给出的在表面上的场强决定面电荷密度 σ．

这可给出面电荷密度 σ：

$$\sigma=\frac{E_z}{4\pi}=\frac{-Qh}{2\pi(r^2+h^2)^{3/2}},\tag{8}$$

总面电荷应等于 $-Q$．作为核对，我们可进行面积分，看看是不是，

$$\text{总面电荷}=\int_0^\infty \sigma\cdot 2\pi r dr=-Q\int_0^\infty \frac{hrdr}{(r^2+h^2)^{3/2}}$$
$$=-Q.\tag{9}$$

这里所用的解题方法传统上叫作源像法．我们可以设想一个假想的负电荷，位于导体平面下 h 远的地方，把它看作是点电荷 Q 的"像"，好象是镜子后面的虚像，而场线好象是穿进导体平面似的．由于平面上的电荷的吸引，作用在电荷 Q 上的电力等于放在像电荷位置上的 $-Q$ 对于 Q 的作用，但注意这种力的真实来源是面电荷．

然而用镜子作类比实际上并不是很好的，也没有很大的

助益．我们最好是把这方法看作是一个更为普遍的方法的特例，这种方法可称之为“使边界条件适应于解”的方法． 为了说明这是什么意思，请看图 3.10(a) 中电量相等、符号相反的两个电荷的电场中的一些等势面．图中的平面只是这些等势面中的一个．其它的都是闭合曲面，没有一个是真正球形的，但是如果必要的话，我们可以通过简单计算把这些面的位置定出来． 如果现在我们取其中的任意两个面，作两个形状完全相同的金属壳，并置于各自相应的位置上，如图 3.10(b)，

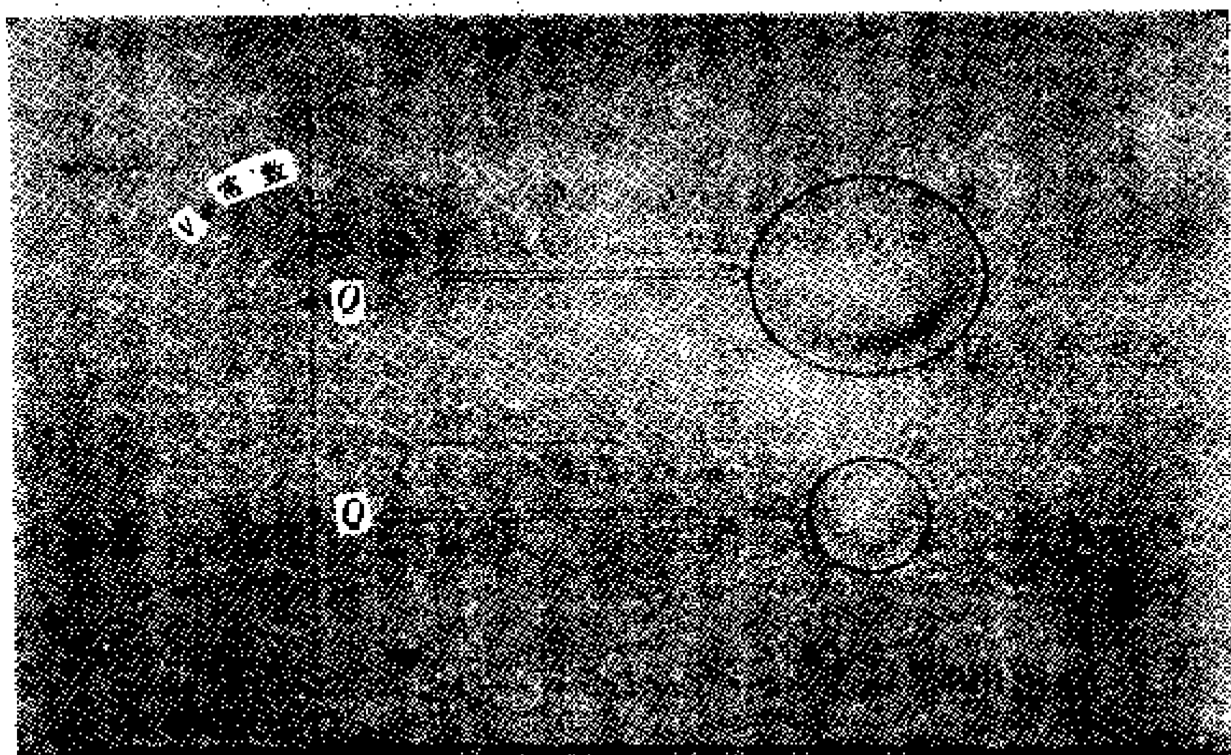


图 3.10 (a) 两相等符号相反的电荷的等势面的横截面．(b) 和两个等势面同形状的金属体．具有和等势面完全相同形状和距离的导体，给以 Q 和 $-Q$ 的电荷，在外部的各点上将具有完全相同的电场．

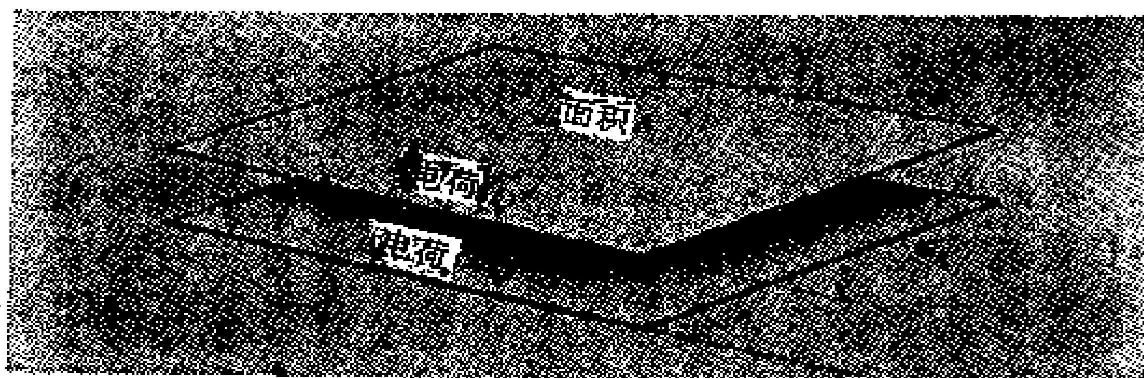
这样我们就掌握了这两个带电导体的静电场的正确的解！它就是相对应的两个电荷的场的解．遗憾的是可能没有人见到过对确是这样形状的电极，去寻求解题的方法；虽然这一方法作为对球体问题的近似解，有可能有人要用它．

我们可以找一些更有用的例子来继续研究其他简单系统

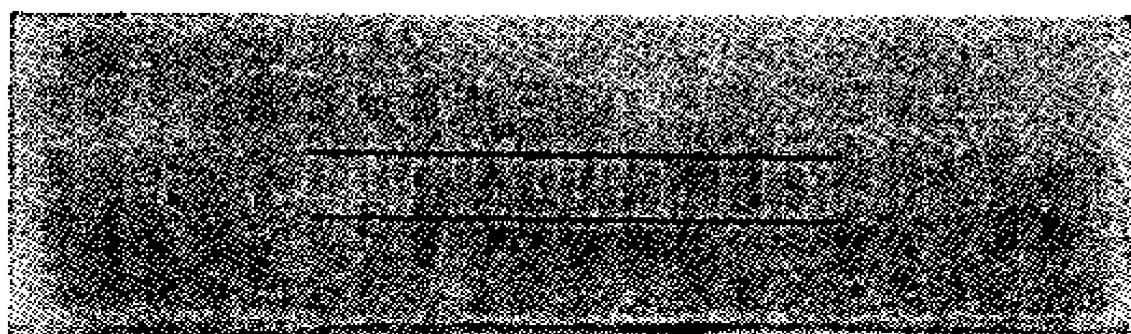
的等势面问题，或许我们可以把这种方法称为"以解求题"法。习题 3.22 是研究应用这种方法的一个很好的示例。麦克斯韦对这种情形作过很好的说明："所以看来似乎我们理应称之为逆问题的那种先给出电势的样子再决定导体的形式的问题比那种先给出导体的形状再决定电势的直接问题更容易处理。"[1]

3.5 电容器和电容

如图 3.11(a)，两块相似的平面导体板，相互平行，相隔距离为 s. 设每块板的面积为 A，一个板上带电荷 Q，另一板



(a) 平行板电容器.



(b) 在 (a) 的横截面上画出场线.

图 3.11

1) 麦克斯韦，电磁学理论 (Treatise on Elec. & Mag.)，第一卷，第七章，(第 3 版……). 每一个学物理的学生都应不时查阅麦克斯韦的书，当我们讨论现在这一课题时，第 VII 章是需要深入钻研的. 在卷 I 结尾处可看到不少美好的电场图形，而且稍稍超出我们的引句范围之外，我们也将会看到麦克斯韦给出这些图形的理由. 可以推想他自己也很喜欢这些图形的结构和优美.

上带电荷$-Q$. φ_1 和 φ_2 是每块板上电势的值. 图 3.11(b)以横截面图表示这系统的场线. 在两板之间不靠近边缘的区域内的电场几乎是很均匀的. 如果把它当作均匀的看待, 场强的大小必为 $(\varphi_1-\varphi_2)/s$. 每个板的内表面上相应的面电荷密度是

$$\sigma=\frac{E}{4\pi}=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{4\pi s}. \tag{10}$$

如果我们可以略去实际上主要在边缘处出现的不均匀性, 以及因而出现的 σ 的不均一性, 我们可以把一块板上的总电荷写成一个简单表示式:

$$Q=A\frac{(\varphi_1-\varphi_2)}{4\pi s}. \text{(略去边缘效应)} \tag{11}$$

我们可以看到两板的间距 s 对板的边长之比值愈小则式(11)愈近于准确. 当然, 如果我们能精确地解决一特定形状的板并包括边缘在内的全部的静电问题, 我们就可以用一精确的公式代换式(11). 为了表明式(11)的近似程度的好坏, 在图 3.12 中把二个导体圆板在不同间距下的校正因子 f 的值列成一个表, 公式(11)给出的电荷 Q 的值和实际结果差 f 倍. 总电荷总是要比用式(11)所估计的值大一些. 这似乎是合理的, 因为当我们观察图 3.11(b) 时, 可以看到在边缘处显然有超量的电荷聚集, 甚至在靠近边缘附近的外表面也有一些电荷.

我们现在不涉及这些校正的详细内容, 而是讨论两个导体系统的一般性质. 我们的一对平板是由普通元件组成的电学系统的一个例子, 即**电容器**. 一个电容器只是两个相互靠近的, 处于不同的电势, 带着异号电荷的导体. 我们注意的是在一个板上的电荷 Q 和两板之间电位差的关系. 对于式(11)所适用的这个特定系统, $Q/(\varphi_1-\varphi_2)$ 的值是 $A/4\pi s$. 即

使这仅是近似的，但也很明显，精确的公式也只和两板的大小以及它们的几何排列有关．这就是说，对于一对固定的导体来说，电荷对电势差的比值是恒值．我们把这值叫作电容器的**电容**，通常记作 C.

$$Q = C(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (12)$$

所以如果忽略边缘的电场不计，则平行板电容器的电容是

$$C = \frac{A(\text{平方厘米})}{4\pi s(\text{厘米})}. \quad (13)$$

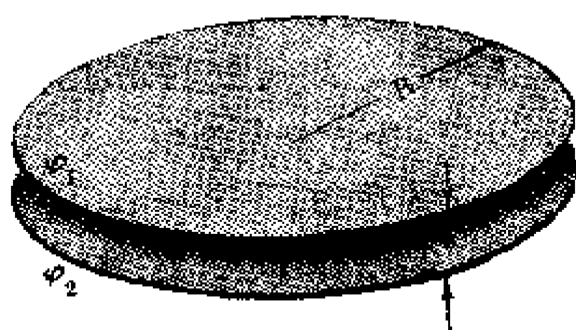


图 3.12　对于平行板的间距与板半径各种不同比值，把圆平行板电容器的实在电容和由方程式(11)所决定的值相比较．

边缘校正可用如下的表达式表示出来：

$$Q = \frac{A(\varphi_1 - \varphi_2)}{4\pi s} \cdot f,$$

对于圆板，f 和 s/R 有如下的关系：

s/R	f
0.2	1.286
0.1	1.167
0.05	1.094
0.02	1.042
0.01	1.023

在我们所采用的 CGS 制（厘米·克·秒制）中，电荷以静电单位（esu）为单位，电势以静伏为单位，电容的量纲是长度，于是电容可以简单地以厘米为单位．面积各为 100 厘米^2，相距 1 毫米的两个平板所形成的电容器的电容为 $100/(4\pi)(0.1)$ 厘米，即 79.5 厘米．

在我们应该熟悉的另一种单位制，即“实用”制里，电荷的单位是库仑，或安·秒，电势的单位是伏．在这种单位制里，单位电容是指当两板之间的电势差为 1 伏时，每板的电荷为 1 库仑的电容器．这单位称作**法拉**．为了求出法拉和 CGS 制电容单位，厘米，的关系，须知 1 伏 = 1/300 静伏，1 库仑 = 3×10^9 静电单位，于是

$$1\text{法拉} = \frac{1\text{库仑}}{1\text{伏}} = \frac{3\times10^9\text{静电单位}}{(1/300)\text{静伏}}$$

$$= 9\times10^{11}\frac{\text{静电单位}}{\text{静伏}} = 9\times10^{11}\text{厘米}.$$

1 法拉的电容器是非常大的。如果用两平行板制作，使相距为 1 毫米，则每板的面积需要 100 平方公里大[1]。因为这个“实用”单位的大小很不合实用，通常采用微法(μF)和微微法($\mu\mu$F)为单位。后一单位，10^{-12}法拉，也称作沙法拉（picofarad，简写作 pf)。这单位和 CGS 制的电容单位的大小大约相同。

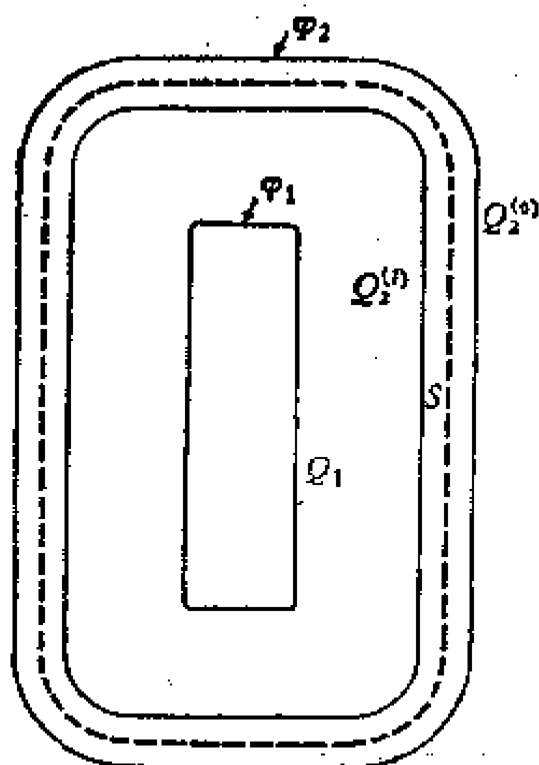


图 3.13 一电容器，它是由一导体包围另一导体作成的.

任何一对导体，不管它的形状或排列如何，都可以看作是一电容器。上述的平行板电容器是一种通常的装置，这样电容器的电容的近似计算是很容易的。图 3.13 表示两个导体，一个被包围在另一个的里边。我们也可以把这种装置叫做电容器。作为实际器件，内部导体还需要一些机械支撑物，但我们不考虑这些。还有，从导体输出电荷或输入电荷到导体上的导线本身也是导体。因为从内部导体引出的导线一定要穿过两导体之间的空间，必然对这部分空间的电场造成

---

1) 当然有更为紧缩的方法制造大电容的电容器！我们可从任一电料商店买只一微法的电容器，很容易地带回家去。在生物物质中，细胞壁形成一个电的绝缘层，它把细胞内部和外围液体隔离开来。这膜的电性质典型地类似电容为 1 微法/厘米^{2}的电容器。这个“板间距”意味着什么？（实际上电容的大小还和板间介质的介电常数，即电极化性质有关。这将在第九章中讨论。）

干扰．为了减小这一干扰，我们可以假定导线是极细的．或是假定在确定电势以前把导线撤掉．

在这系统内我们可以识别出三种电荷：Q_1 是内导体上的总电荷；$Q_2^{(i)}$ 是外导体的内表面上的电荷；$Q_2^{(o)}$ 是外导体的外表面上的电荷．首先看到 $Q_2^{(i)}$ 必等于 $-Q_1$．这是因为像图 3.13 中 S 这样的面，只包围这些电荷而不包围其它电荷，而且通过这个面的通量是零．通量之所以为零，是因为 S 面位于导体的内部，面上的电场为零．

显然，Q_1 的值唯一地决定两导体之间的区域内的电场，所以也就决定了它们之间的电势差，$\varphi_1-\varphi_2$．因此，如果我们把这两个导体看作电容器的两个"板"，只有 Q_1，或与之对应的 $Q_2^{(i)}$，对确定电容有关系．这电容的值是

$$C=\frac{Q_1}{\varphi_1-\varphi_2},\qquad(14)$$

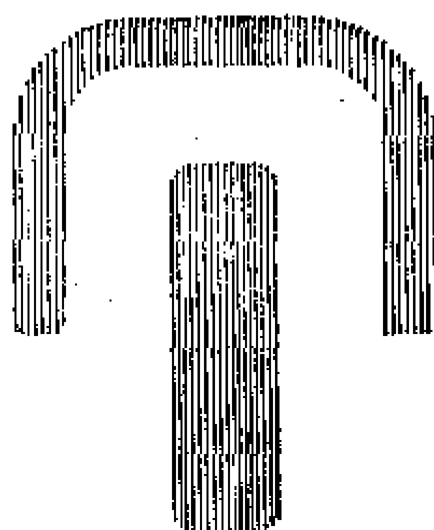


图 3.14　不对称的电容器．

只确定 φ_2 的 $Q_2^{(o)}$，在这里没有关系．事实上一个导体完全被另一个导体包围时所产生的电容和外部的任何情况无关．假如我们遇到两个不怎么靠近的不对称的电容器板，例如像图 3.14 那样的，我们就会被这样的问题所迷惑了：是什么电荷在起着确定电容的 Q_1 的作用呢？答案是：确定电容的电量一定等于要使两个导体的电势相等时从导体 1 传移到导体 2 上的电量．（于是在两个导体上的电荷的总量保持不变．）

3.6　一组导体上的电荷和导体的电位

我们已经接触到更一般问题的边缘了，就是关于具有某

种几何组态的任意数目的导体上的电荷和电势之间的关系问题．两个导体组成的电容器只是一种特殊情形．这也许使你感到奇怪，对于一般的情形有什么有用的东西可说的呢？在解决这种问题时，可以应用的几乎只有唯一性定理和叠加原理．为了在脑子里有明确的概念，考虑三个分开的导体，都被包围在一个导体壳内，如图 3.15 所示．这个壳的电势可取为零；以这一电势作为参考，在这系统的某一状态下，三个导体的电势是 φ_1，φ_2 和 φ_3．唯一性定理保证，当 φ_1，φ_2 及 φ_3 给定以后，整个系统的电场就决定了．从而各导体上的电荷

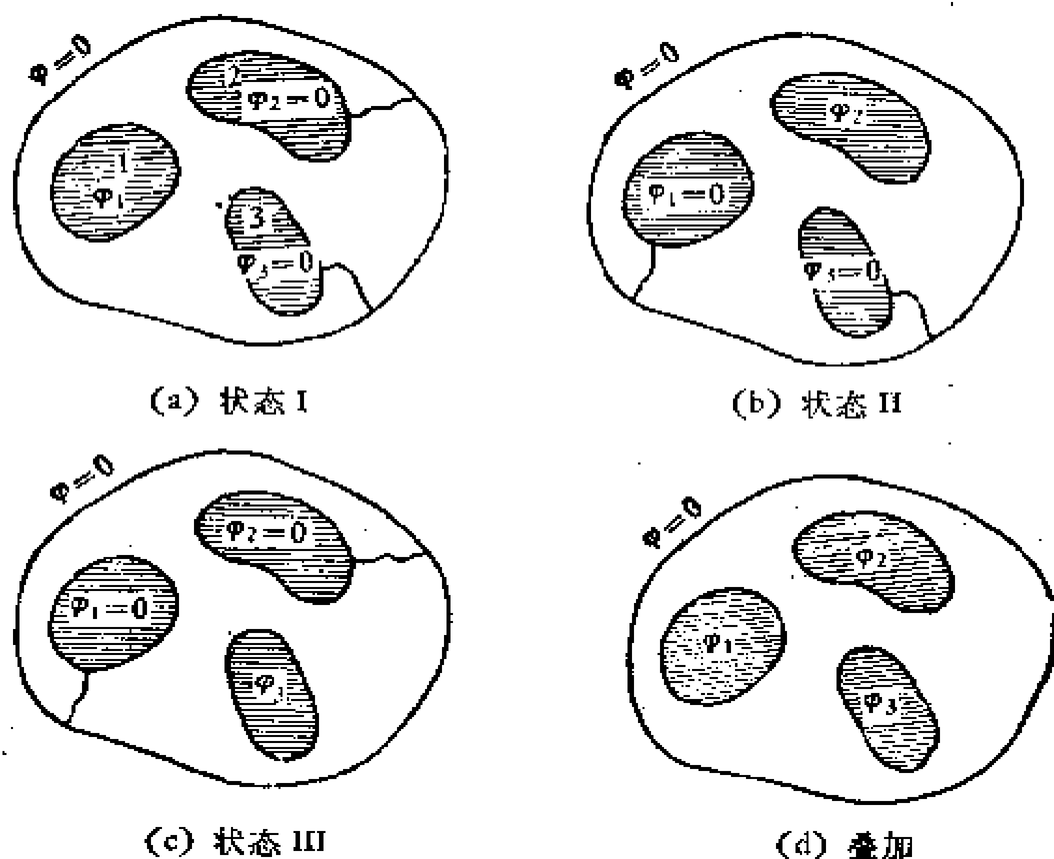


图 3.15　这系统的一般状态可用 (a—c) 三个状态的叠加 (d) 来进行分析，(a—c) 的各个状态中除了一个导体外其它导体都处于零电势．

Q_1，Q_2 及 Q_3 也同样唯一地决定下来了．

我们无需对包围壳的内表面上的电荷进行计算，因为它总是等于 $-(Q_1+Q_2+Q_3)$ 的．如果你愿意的话，可以设想

这外壳无限地扩展出去，并令“无限远”起外壳的作用。我们把它画在图上是为了如果我们有些东西把它接通时，使人们容易了解电荷的转移过程.

φ_2 和 φ_3 都为零是这系统的可能状态之一. 我们把导体 2 和 3 连接到零电势壳上，就可以达到这样的状态，如图 3.15(a) 所示. 如前所述，我们可以假定所接的导线是这样细，以致存留在这线上的电荷可忽略不计. 当然我们不必考虑怎样来实现这一条件. 我们把这一状态称作状态 I，在这一状态中全系统的电场和每一导体上的电荷由 φ_1 的值唯一地决定。而且，如果 φ_1 的值加倍，则各处的场强加倍，因而 Q_1，Q_2 和 Q_3 中的每一电荷值也加倍. 就是说，如果 $\varphi_2=\varphi_3=0$，则三个电荷必都和 φ_1 成比例. 数学的描述是:

$$\left.\begin{array}{l}\text{状 态 I}\\ \varphi_2=\varphi_3=0\end{array}\right\}Q_1=C_{11}\varphi_1;\quad Q_2=C_{21}\varphi_1;\quad Q_3=C_{31}\varphi_1. \quad (15)$$

这里三个常数 C_{11}，C_{21} 及 C_{31} 只和导体的形状和排列有关.

我们可以用同样的方法来分析 φ_1 和 φ_3 为零的状态，把这状态叫状态 II [图 3.15(b)]. 我们仍然必须求出唯一不为零的电势，在这情形下是 φ_2，和各电荷之间的线性关系:

$$\left.\begin{array}{l}\text{状 态 II}\\ \varphi_1=\varphi_3=0\end{array}\right\}Q_1=C_{12}\varphi_2;\quad Q_2=C_{22}\varphi_2;\quad Q_3=C_{32}\varphi_2. \quad (16)$$

最后，当 φ_1 及 φ_2 保持为零时，电场及各电荷和 φ_3 成比例:

$$\left.\begin{array}{l}\text{状 态 III}\\ \varphi_1=\varphi_2=0\end{array}\right\}Q_1=C_{13}\varphi_3;\quad Q_2=C_{23}\varphi_3;\quad Q_3=C_{33}\varphi_3. \quad (17)$$

现在，三个状态 I，II 及 III 的叠加也是一种可能的状态. 每一点的电场是这三种状态在这一点上的电场的矢量和，在

一导体上的电荷是它在三种状态下所带电荷的和．在这一新状态下电势是 φ_1，φ_2 和 φ_3，其中没有一个必须是零的．总而言之，我们得到了完全一般的状态．简单地把式（15）到式(17)相加就可以得出联系电荷和电势的关系式．

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= C_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2 + C_{13}\varphi_3,\\
Q_2 &= C_{21}\varphi_1 + C_{22}\varphi_2 + C_{23}\varphi_3,\\
Q_3 &= C_{31}\varphi_1 + C_{32}\varphi_2 + C_{33}\varphi_3.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

看来好像这系统的电学特性可以由九个常数 C_{11}，$C_{12}\cdots C_{33}$ 表征出来．事实上只有六个是必需的，因为可以证明在任何系统中 $C_{12}=C_{21}$，$C_{13}=C_{31}$，和 $C_{23}=C_{32}$．为什么应该这样，是不明显的．在习题 3.27 中根据能量守恒定律提出了一个证明，但为了达到此目的，还需要第 3.7 节中所提出的概念．式(18)中的 C 称为电容系数．显然，我们的论证对不管多少个导体都是适用的．附带讲一下，以前所定义的由两块板组成的电容器的电容和 C_{11}（或 C_{22} 或 C_{12}）不同，但是，当然和它们是有联系的．

从方程组(18)可以解出用 Q 表出的 φ 的表达式．就是说有一组相应的线性关系式：

$$
\begin{aligned}
\varphi_1 &= P_{11}Q_1 + P_{12}Q_2 + P_{13}Q_3,\\
\varphi_2 &= P_{21}Q_1 + P_{22}Q_2 + P_{23}Q_3,\\
\varphi_3 &= P_{31}Q_1 + P_{32}Q_2 + P_{33}Q_3,
\end{aligned}
\tag{19}
$$

这里的 P 称为电势系数；它们可以从 C 计算出来，反之也可以从 P 计算出 C 来．

在这里我们提出了一个可以决定某一线性物理系统关系式的简单例子，这样的关系式在机械结构（表示应变和负载的关系）的研究中，电路（表示电压和电流的关系）分析中都出现过，一般说来，凡是可以应用叠加原理的地方都会出现这种关系式．

3.7 贮存在电容器中的能量

我们来研究一个电容为 C 的电容器，两板之间的电势差是 φ_{12}. 电荷 Q 等于 $C\varphi_{12}$. 在一块板上有电荷 Q，在另一块板上有电荷 $-Q$. 假使我们把一正电荷 dQ 从负板输送到正板上,使电荷从 Q 增加到 $Q+dQ$，这需要克服电势差 φ_{12} 作功. 必须作的功是 $dW=\varphi_{12}dQ=QdQ/C$. 所以要把电容器从不带电的状态充电到最后带电 Q_f 需做功

$$W=\frac{1}{C}\int_{Q=0}^{Q_f}QdQ=\frac{Q_f^2}{2C}. \tag{20}$$

这就是"贮存"在电容器中的能量 U. 它也可以用下式表示:

$$U=\frac{1}{2}C\varphi_{12}^2. \tag{21}$$

对于面积为 A，板间距为 s 的平行板电容器，我们得出了 $C=A/4\pi s$，电场 $E=\varphi_{12}/s$. 所以式(21)也可写作

$$U=\frac{1}{2}\left(\frac{A}{4\pi s}\right)(Es)^2=\frac{E^2}{8\pi}\cdot As=\frac{E^2}{8\pi}\times \text{体积} \tag{22}$$

这和表示贮存在电场中的能量的一般公式,式(2.36),是一致的.[1]

3.8 处理边界值问题的其它意见

认为没有处理拉普拉斯边界值问题的一般的方法，留下这样印象那是错误的. 虽然我们不能再深入地研究这一问题,但我们提出三种有用的，有意义的方法，这是将来在学习物理或应用数学时可能遇到的.

首先讲一种叫做保角变换的巧妙的分析方法，它是以复

---

1) 这都是应用在导体之间是空的"真空电容器"上的. 在实验室中可以看到的，在电路中使用的大多数电容器都是充满绝缘体或"电介质"的. 我们将在第 9 章中研究它的效应.

变数函数理论为基础的．令人遗憾的是这方法只能应用于二维系统．例如，在这种系统中，φ 只和 x 及 y 有关，所有导体的边界都是圆柱体（在一般的意义下），其中的组成部分都平行于 z．拉普拉斯方程简化为

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0. \tag{23}$$

它的边界值规定在 xy 平面中的一些直线或曲线上．许多有实际意义的系统就是这样的，或是与此非常相似的，所以这种方法是很有用的，更不用说这种方法在数学上有内在的意义．举例来说用保角变换方法很容易求得两平行长板条的电势的精确解．图 3.16 表示在一截面上的场线及等势线．这图表示出任一平行板电容器的边缘电场，这种电容器的边缘比起板间距来要长得多．图 3.11(b) 所示的场是从这个解复制的．我们学完了更高等的复变函数以后就能应用这种方法了．

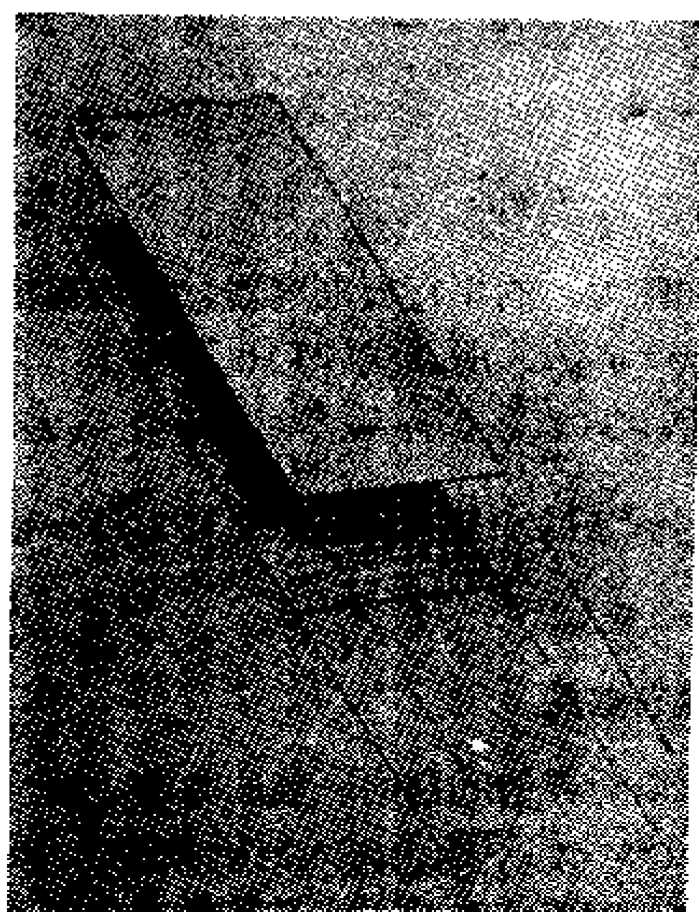


图 3.16　两个无限长的导体条的场线和等势面．

第二，我们讲一下，在给定边界值时，求出静电势的近似解的数值计算法．这方法非常简单并且几乎能普遍应用．它是以我们所熟悉的调和函数的特性为根据的：函数在某一点的值等于这个函数在该

点邻域上平均值．在这种方法中，电势函数φ只用一组不连续的点的值（包括在边界上的不连续的点的值）来表示．然后调整不在边界上的各点的值直到每个值等于邻域值的平均值为止．原则上我们可以通过解内部点的数目一样多的联立方程式来求解．但是我们也可以很简单地通过系统地改变每一值使它和邻域的平均值相一致，并重复这样的步骤直到改变可以忽略不计时为止，从而得到近似解．这方法叫做**张弛法**．这种方法因需计算者有极大的耐心而受到限制，这可以借助于高速计算机而得到解决，这种方法是非常适于用高速计算机计算的．如果你想知道这种方法是怎样进行，习题 3.29 及 3.30 提供了一个初步介绍．

求边界值问题近似解的第三种方法叫做变分法．这个方法涉及到一个概念，在物理学的许多部门，从牛顿力学，光学到量子力学，都会遇到这个概念．在静电学中，这原理以以下形式出现：我们已经知道静电场的总能量可用下式表示，

$$U=\frac{1}{8\pi}\int E^2dv \tag{24}$$

如你已做过习题 2.19，就会看到在这个极简单的情形中，分布在具有恒定电势的导体的边界上（由二个球用一根导线连接起来组成）的电荷将把自己分布成这样的情况：使得贮存在全部电场中的能量为最小．这种情形是非常普遍的．这就是说：在电势固定的任何导体系统中，每一导体上电荷会流来流去，直到贮存在电场中的能量达到尽可能的小为止．如果我们注意到每当电场总能量减少时，就有能量可用以促使电荷移动，那么上述情形就是不证自明的了[1]．碗中的水面为什

1）我们这样论证是因为我们考虑到在电荷移动时会出现能量的消耗．通常都是这样的．如果不是这样的话，原来不平衡的系统就不能耗散它的能量来达到平衡．你想这系统将发生什么样的情形？

么是平的，其理由与此基本相同。

现在我们来研究某区域中的势函数 $\varphi(x, y, z)$，这个区域被若干已知电势的边界包围着。*正确的* $\varphi(x, y, z)$，也就是说是适合于给定边界电势的 $\nabla^2\varphi=0$ 的解，它和只适合于边界条件但不满足拉普拉斯方程的其它函数，例如 $\psi(x, y, z)$ 的区别在于：对应于 φ 所贮存的能量少于对应于 ψ 所贮存的能量。我们可以像式(2.39)那样把能量用 φ 表示出来，

$$U=\frac{1}{8\pi}\int|\nabla\varphi|^2dv. \tag{25}$$

我们现在可以不用拉普拉斯算符，而以一新的方式表述边界值问题。势函数 φ 是这样一个函数，*和适合同样边界值的任何其它函数相比，它使积分式(25)为最小*。因此求对一给定边界值问题的解(至少是近似解)的一个方法是：只要试用适合已知边界值的很多函数，并从其中挑选出使 U 的值为最小的那个函数。或者我们可以试用具有一个或二个可调参数的函数，然后旋转这些数学"旋钮"使 U 成为最小。对于估计能量本身这方法特别好，能量往往是最重要的未知量。由于正确的 φ 是给出了 U 的最小值，所以由偏离正确的 φ 所引起的 U 的变化是很小的。习题3.32可以表明变分法的简单性和正确性。

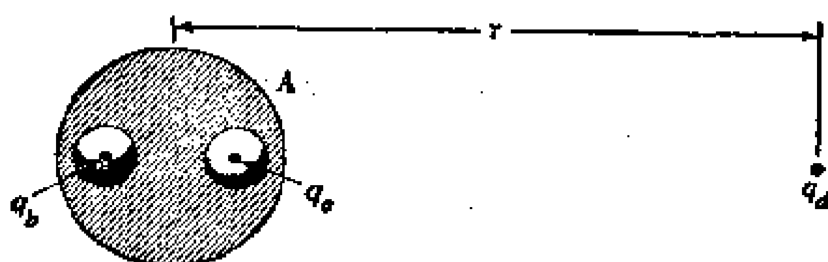
对我们来说，比在计算上的实用价值更为重要的是，变分原理代表着静电场基本定律的*另一种表述方式*。像变分原理那样对物理学定律重新进行表述，已经证明往往是富有成果的，有启发性的。费曼教授(R. P. Feynman)是以在这方面的卓越工作而著名，在*费曼物理学讲座*第II卷，第19章中给出关于变分概念的生动的初步说明。

习 题

3.1 一个实验者携带着测量电场强度 **E** 的仪器，位于离一固定点电荷 q 一定距离处．用绝缘绳子把不带电的短金属管降到点电荷处，罩住点电荷．这样做会怎样影响远处的观测者所测的电场强度？解释清楚．如果你的实验室是在大的铜箱里，你能不能测知外边的电荷是在运动着？说明理由．

3.2 一球形导体 A 包含着二个球形空腔．在这导体本身上的总电荷是零．但在一空腔的中心有一点电荷 q_b，在另一空腔的中心有一点电荷 q_c．离很远的 r 处有另一电荷 q_d．A，q_b，q_c，及 q_d 每一物体上受到多大的力？答案中那些只是近似的，并且取决于 r 要相对地大？

［必须确切理解这问题的各个方面］



习题 3.2

3.3 假定已经达到如图 3.1 (c) 所示的条件，再使这物体成为非导电的，让电荷固定在原来的位置上．然后把产生原来电场的正电荷层和负电荷层都移开．在这物体的内部及外部遗留下的电场将是什么样子？

3.4 科学幻想的陈词滥调以及许多科学上无知的发明者的梦想之一，就是所谓的*重力屏蔽*，要象用金属板"封锁"电场那样用某种东西"封锁"重力场．思考一下重力源和电源之间的差别．要注意图 3.6 中的箱壁并不封锁外边电源的电

场，而只是使表面电荷建立一补偿场．为什么对于重力不能想出类似的办法来呢？要想作到需要些什么？

3.5 如图 3.9，在平面上方的一个点电荷所产生的电场里，如果场线从点电荷出发时是沿着水平方向的，即平行于这平面的方向，它将在那里碰到这导体的表面？（须利用高斯定理和简单的积分）

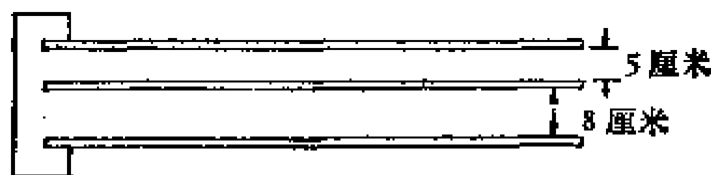
3.6 用解点电荷和平面导体题目的方法，实际上我们就能通过叠加法解决所有由它组成的问题．例如，假定我们有一直导线，每厘米均匀地带 10^3静电单位的电荷，平行于地面，离地 5 米高．离直线最近的地面上的电场强度是多大？每单位长度的直线受电的作用力是多大？你能设想出任何一种以这些成分所组成的其它简单的静电组态吗？

[由点-平面系统的叠加所组成的系统]

3.7 如图 3.8(a)，一电荷 Q 位于一导体平面上方 h 厘米处．问到把这电荷移离平面到无穷远处所需作的功时，某一同学回答说：等于两电荷 Q 及 $-Q$ 从原来相距 $2h$ 分开到无穷远处所需的功，即 $W = Q^2/2h$．另一同学计算当电荷移动时，作用在电荷上的力，并对 Fdx 积分，但得到不同的结果．这第二个同学所得的结果是什么？谁是正确的？

[从导体移开一电荷所需的功（注意：用单位电荷的功来定义一点的电势，要求将微小电荷移到此点．）]

3.8 如图所示有三块相互平行的导体板．外边二块用导



习题 3.8

线连接．中间一块板是绝缘的，板上带有 10 静电单位/厘米²

的电荷．中间这块板上的电荷分在两表面上，一面上的电荷密度为σ_1，另一面上为σ_2，电荷是按什么比例分在两表面上的？

3.9 把两个$+q$电荷和两个$-q$电荷分别放在正方形的四个角上，同号电荷置于对角线两端的角上．试证在这系统里有两个平面等势面．用这样的方法，求出并定性地画出一个点荷的电场，这个点电荷对称地位于一个金属板折成的直角内．平板和点电荷在什么样的组态下能用这样的方法下求解？在什么样情形下不能？一个点电荷位于两导体平面组成的 120° 面角的平分面上，这点电荷产生的电场是怎样的？

[“镜象”法的一个扩充．]

3.10 一金属薄片置于平行板电容器的两板之间，并和两板平行．电容受到什么影响？如把它和一板用导线接起来，又将怎样？

3.11 一个 100 pF 的电容器充电到 100 伏．把充电电池断开后，再把这电容器并联在另一电容器上，最后的电压是 30 伏．第二个电容器的电容多大？损失了多少能量？发生了什么情形？

[并联电容器]

3.12 两个同心球壳，内球壳半径为r_1，外球壳半径为r_2，所组成的电容器的电容C是多大？把$r_2-r_1\ll r_1$的极限情形和平板电容器的情形相比较以校对你所得的结果．

[球形电容器]

3.13 设φ_{12}是上题球形电容器的两个球壳的电势差．求出以半径为函数的场的表示式．计算场的总能量$\int(E^2/8\pi)dv$，试证它等于$\frac{1}{2}C\varphi_{12}^2$．

[球形电容器电场的能量]

3.14 单个孤立导体上的电荷和它的电势之比定义为它的电容，取无穷远处的电势为零. 试证球形导体的电容以厘米为单位时等于这球的半径. 如以微法为单位，地球的电容多大?

[孤立球形导体的电容]

3.15 设想如习题 3.12 中的一球形电容器，象卫星一样地绕地球转动. 内外两球壳之间没有机械的连接. 真空是很完全的，而且外球上的阻力可忽略不计. 换句话说，是处于完全的"零 g"的状态. 假定内球上有一些净电荷，对外球来说，处在中心的位置上. 这情况是稳定的吗?

(如果内球移出中心，这系统的能量怎样改变? 为了预言改变的符号，你可以考虑如果你使内球非常靠近外球，电容将怎样改变)

[一个机械稳定的问题]

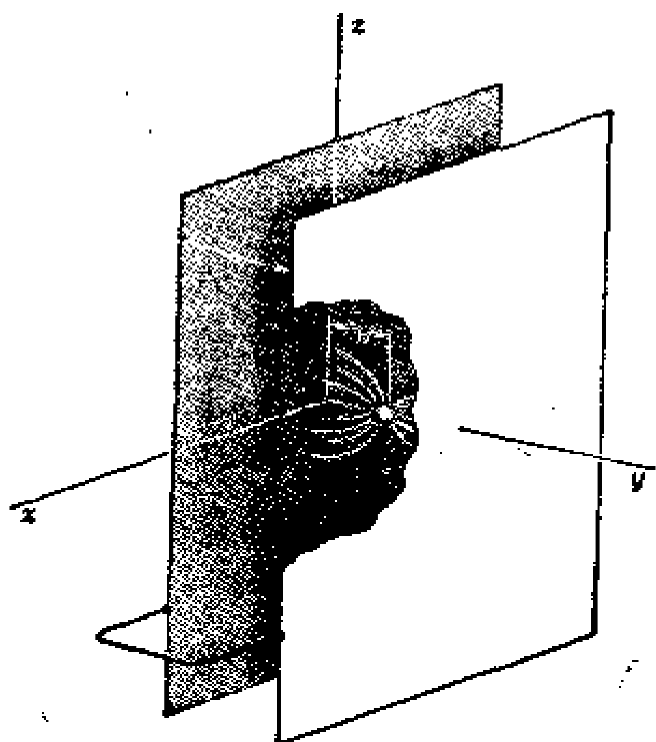
3.16 计算平行板电容器的一板上所受的力. 两板间的电势差是 10 静伏，板是每边 20 厘米的正方形，相距 3 厘米. 如果板是被绝缘的，电荷保持不变，使这二板靠拢能对外界作多少功? 这等于原来贮存在场内的能量吗?

[作用在电容器板上的力]

3.17 两平行板用导线连接起来，并保持相同的电势. 使一板与 xz-平面重合，另一板与 $y=s$ 平面重合. 两板的间距 s 远小于板的尺寸. 一点电荷 Q 放在两板之间 $y=b$ 处(见图). 在每一板的内表面上总表面电荷是多少? 两板的内表面上的总电荷当然是 $-Q$ (为什么?)，我们可猜想到在靠得较近的板上的电荷所占的比例要大一些. 如果这一电荷非常靠近左侧的板，$b \ll s$，则右侧板的存在不产生多大影响. 但是，我们想确切地知道在两板上的电荷的分配比例. 如果我们试图应用"源象法"，我们将会发现需要一条无限长串的像

向着两个方向扩展出去，好象在理发店里从两面墙上的镜子里所看到的那些像一样．很难计算在一表面上任一点处的总场强．但是可以用叠加方法通过简单计算来解决我们的问题．（提示：下面的附注可提供一个很好的线索．在 $y=b$ 的平面上的任一处加上另一电荷 Q，每一板上的面电荷都将加倍；事实上，在这平面上任何数目的电荷所感生的总面电荷和这些电荷在这平面上的位置无关．如果在这平面上只有一层均匀电荷，电场将是简单的，我们可以想法用高斯定律处理．从此出发来解这问题）

［感生电荷的分配，先作习题 3.8，或至少把它从头到尾思考一下］



习题 3.17

第四章　电　　流

4.1 电荷输运和电流密度

电流是由载流子运动而形成的．导线中的电流是单位时间内通过导线中任一点的电荷数量的量度．用我们已经用过的单位，电流应以静电单位/秒来表示．电流的实用单位是安培，它等于每秒一库仑的电荷．一安培的电流和 3×10^9 静电单位/秒的电流相同，它等于每秒流过 6.2×10^{18} 个电子．当然，起作用的总是净电荷的输运，正确地考虑电荷所带的符号．一个中性物体的运动可以说包含着大量电荷的输运（每克物质大约 10^5库仑左右！），但并没有电流，这是因为正好等数目的正电粒子和负电粒子以相同的平均速度运动着．

更一般的电流，或电荷输运，包括载流子在三维体积中的运动．我们需要用*电流密度*的概念来描述它．因为载流子是一些分散的粒子，我们必须考虑它们的平均值．正如我们在定义电荷密度 ρ 时所作的那样，我们必须假定，我们的距离尺度是这样的，以致于我们要平均的任何小区域内都包容着大量的所涉及到的任何类型的粒子．

首先研究一特殊情形，每立方厘米有 n 个粒子，平均地说，所有粒子都以相同的速度矢量 $\mathbf{u}$ 运动，带着相同的电荷 q．在图 4.1(a) 中，设想在任意方向上放着面积为 $\mathbf{a}$ 的小框架．试问在 Δt 时间内有多少粒子通过这框架？如果开始计时的时刻，如图 4.1(a) 及 (b) 所示，那末在以后 Δt 秒内预定通过这框架的粒子将恰好是在图 4.1(b)中的斜棱柱体内的那些粒子．这棱柱体的底面积就是框架的面积，它的边长是

$u\Delta t$，即粒子在 Δt 时间所移动的距离．在这棱柱体以外的粒子就是对不准框架或是达不到框架的粒子．这棱柱体的体积是底面积×高，即 $au\Delta t\cos\theta$，可写作 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}\Delta t$．平均地说，这个体积中的粒子数是 $n\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}\Delta t$．因此电荷通过框架的平均率，即通过这框架的电流，记作 $I(a)$，是

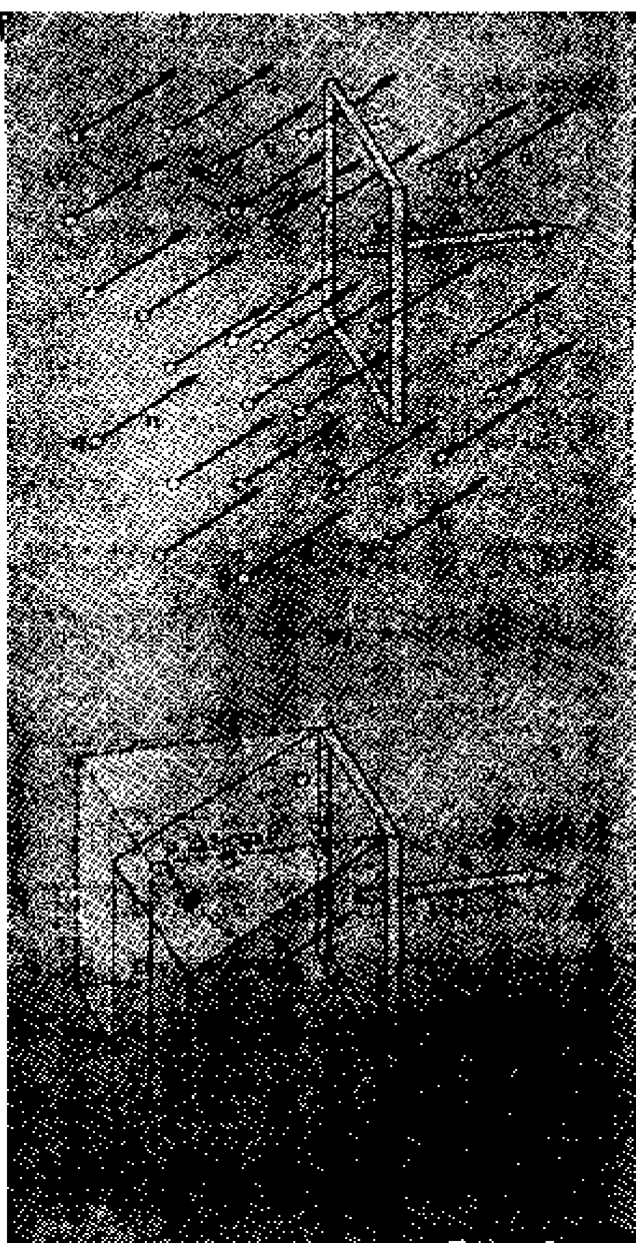


图 4.1 (a)以同一速度 $\mathbf{u}$ 运动的一群带电粒子．框架面积是 $\mathbf{a}$．在 Δt 秒内通过框架的粒子是包含在斜棱柱体 (b) 内的那些粒子．棱柱体的底面积是 $\mathbf{a}$，高是 $u\Delta t\cos\theta$，因此，它的体积是 $au\Delta t\cos\theta$，即或 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}\Delta t$．

$$I(a)=\frac{q(n\mathbf{a}\cdot\mathbf{u})\Delta t}{\Delta t}$$

$$=nq\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}. \quad (1)$$

假定在这一群粒子里有许多种类型的粒子，所带的电量不同，或速度矢量不同，或两者都不同．每一种粒子都对通过 $\mathbf{a}$ 的电流作出自己的贡献．把每一种类型用下标 k 标记出来，第 k 类的每一粒子带的电荷是 q_k，以速度矢量 $\mathbf{u}_k$ 运动，平均密度是每立方厘米有 n_k 个这种粒子，那末我们可以把电流写成一般的形式：

$$I(a)=n_1q_1\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}_1+n_2q_2\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}_2+\cdots=\mathbf{a}\cdot\sum_k n_kq_k\mathbf{u}_k. \quad (2)$$

我们把在式(2)中和 $\mathbf{a}$ 相乘的矢量叫作电流密度 $\mathbf{J}$. $\mathbf{J}$ 可以用每秒每平方厘米的静电单位为单位来表示. 如果我们用实用单位制,以库仑为电量的单位,则电流密度以每平方厘米的安培数表示.

$$\mathbf{J}=\sum n_k q_k \mathbf{u}_k. \tag{3}$$

我们来看某一类型的载流子,例如电子,对电流密度的贡献. 它们可以有各种不同的速度. 在导体中电子的速度分布几乎完全是杂乱的,方向和大小的差异很大. 设 N_e 为各种不同速度的电子在单位体积中的总数. 我们可以把电子分成很多群,每一群的电子有几乎相同的速率和方向. 所有电子的**平均速度**,和任何平均数一样,可以从对群求和算出,即对每一速度乘以该群中的粒子数求和之后除以总粒子数. 即

$$\bar{\mathbf{u}}=\frac{1}{N_e}\sum_k n_k \mathbf{u}_k, \tag{4}$$

$\bar{\mathbf{u}}$ 上的横线表示分布的平均值. 比较式(4)和式(3),可以看到电子对电流密度的贡献可简单地用平均电子速度写出. 要注意对电子来说,$q=-e$. 用下角标 e 表示的所有量都属于这种类型的载流子,我们可以写出

$$\mathbf{J}_e=-eN_e\bar{\mathbf{u}}_e. \tag{5}$$

这似乎是相当明显的,但我们已经逐步地弄清楚通过框架的电流只和载流子的**平均速度**有关,在大小上,它只是它们的杂乱速率的一个极小的分数. 不要忘记式(4)表示的是一个**矢量平均**;对于各个方向均等的速度分布,不管它们的速率多大,这一平均矢量将为零.

4.2 稳定电流

像在一根导线那样的长导体中流过的电流当然恰好是电

流密度 $\mathbf{J}$ 对导线横截面的积分。的确，通过任一表面 S 的电流 I 正是面积分

$$I=\int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{a}, \tag{6}$$

I 是与矢量 $\mathbf{J}$ 相联系的“通量”，在这种情形，这名称是适当的。

若电流密度矢量 $\mathbf{J}$ 在各处都不随时间而变，则我们称之为稳恒或稳定电流系统。稳恒电流必须服从电荷守恒定律。我们来研究被象气球一样的面 S 所完全包围的空间区域。$\mathbf{J}$ 对总表面 S 的面积分等于电荷从被包围的体积中流出的流出率。如果是正载流子向外流出或负载流子向内流入，则这值是正值，以此类推。如果这样无限地继续进行下去，则这体积内的电荷迟早终将流尽，除非有新的电荷产生。但是电荷是不能产生的。所以，对于真正与时间无关的电流分布，$\mathbf{J}$ 对任意闭合面的面积分必等于零。这完全等于说，在空间的每一点，

$$\operatorname{div}\mathbf{J}=0. \quad \text{（与时间无关的电荷分布）} \tag{7}$$

要理解这两种说法的等效性，须回忆高斯定理同用面积分表示的散度的基本定义，这个面积分是在包围着所研究点的小闭合面上进行的。

我们可以作出比式(7)更一般的叙述。假定电流不是稳定的，$\mathbf{J}$ 是 t 及 x，y 与 z 的函数。由于 $\int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{a}$ 是电荷离开被包围的体积的瞬时流出率，而 $\int_V \rho dv$ 是任一时刻，在这体积内的总电荷，我们有关系式，

$$\int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{a}=-\frac{d}{dt}\int_V \rho dv. \tag{8}$$

让这体积围绕任一点 (x, y, z) 收缩，则式(8)所表示的关系

成为[1)]

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad \text{（与时间有关的电荷分布）} \tag{9}$$

因为 ρ 一般是空间坐标及时间的函数，所以电荷密度 ρ 的时间导数写作偏导数．式(8)和式(9)表示电荷守恒：如果一个地方没有电荷量的减小，就不可能从那里流出电荷来．

在真空二极管中出现的稳定电流分布是一个有启发性的例子．一个极，作为阴极，涂上一些材料，加热时可以发射很多的电子．另一极，阳极，只是一金属板．利用电池使阳极对阴极维持一正的电势．电子以很低的速度从热阴极发射出来，然后被阴极与阳极之间的电场向阳极加速．在阴极与阳极之间的空间里电流是由这些运动的电子组成的．电子流再通过外部导线而构成闭合电路，在电池中可能还有离子的运动等等，这里不去考虑它们．在二极管里各区域的电荷密度 ρ 只是 $-ne$，n 是本地域的电子密度，以电子数/厘米^3 表示．局部电流密度 $\mathbf{J}$ 自然是 $\rho\mathbf{v}$，$\mathbf{v}$ 是在这区域的电子速度．在平行板二极管里可以假定 $\mathbf{J}$ 没有 y 或 z 的分量（见图4.2）．如果条件稳

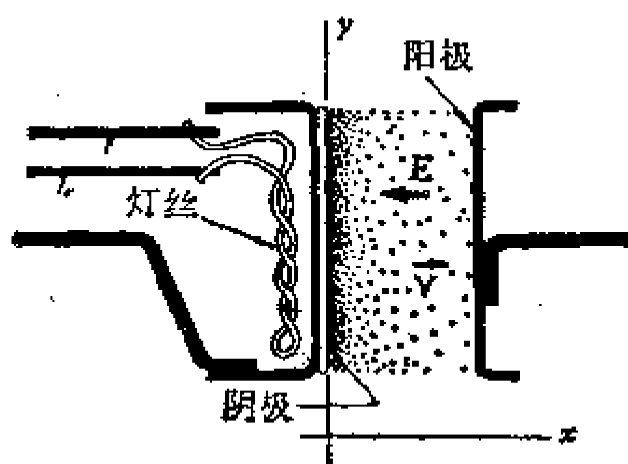


图 4.2　装有平行板阴极和阳极的真空二极管．

1) 如果式(8)与式(9)之间的步骤还不清楚，可回顾第二章中的散度的基本定义．当体积收缩时，最后等号右边可以把 ρ 移到体积分符号外面．体积分是在某一时刻进行的．它的时间导数决定于在 t 时刻及 $t+\Delta t$ 时刻的体积分的差．这差是由体积里的 ρ 的改变而引起的．因为体积的边界是保持在同一位置的．

定，则 $\mathbf{J}_x$ 必定和 x 无关，因为按照式(7)，$\operatorname{div}\mathbf{J}=0$，如果 $J_y=J_z=0$，则 $\partial J_x/\partial x$ 必定是零．这是非常清楚的；如果只有沿 x 方向运动的稳定电子流，那末每秒横过阴极和阳极之间的任一中间平面的电子数必定相同．我们断定 ρv 是常数．但是我们看到 v 不是常数；它随 x 而变化，因为电子是被电场加速的．所以 ρ 也不是常数．而是靠近阴极的负电荷密度大，靠近阳极的小．这正如大道上的车辆密度一样，在车慢行的地方密度高；在车高速行进的地方密度小．

在二极管里的电流受到一种有趣的效应的限制：即负电荷密度（“空间电荷”）对电场的影响，这样就影响电子的加速度和速度，反过来又影响电荷密度本身(完成一个循环)．习题 4.25 探索了“限制空间电荷”的二极管的特性，并指明怎样能推导出控制它的电压-电流的特殊关系式．这关系式在电子学中不但在设计和应用二极管时是重要的，而且在设计阴极射线管的电子枪以及类似的其它方面也是重要的．

4.3 电导率和欧姆定律

有很多使电荷运动的方法，包括所谓的载流子的“全部输运”．在范德格拉夫静电起电机中(习题 4.3)给一根绝缘的带子带上表面电荷，带子把表面电荷运送到另一电极上，象自动梯运送人一样．这形成一完好的电流．在大气中，由于本身的重量而下落的带电雨点构成地球的电流系统的一部分．在这一节里我们要研究电荷输运的更普通的作用力，即电场施加于载流子的作用力．电场有使电荷运动的倾向，因之有形成电流的可能．至于是否能形成电流则决定于电场所在的系统的物理性质，即介质的物理性质．

关于物质中电流最早的实验发现之一，被概括为欧姆定律：

$$I = \frac{V}{R}. \tag{10}$$

流过导线的电流 I 和导线两端的电势差 V 成正比。我们以前曾用 φ 来表示电势，用 $(\varphi_1 - \varphi_2)$ 或 φ_{12} 表示电势差。在这一节里我们用符号 V，这在初等物理的电路中更通用一些。它来源于"Volts"("伏特")或"Voltage"("电压")。[我们曾避免采用V，只是因为它使我们联想到许多不同的东西：Volume（体积），Velocity（速度），Voltage（电压）等。]

保持在同一温度下的一段导线，其电阻 R，即式(10)中的比例常数，和通过它的电流大小无关。电阻明显地和导线的长度及横截面有关，和长度 L 成正比，和横截面 A 成反比。当然也和导体的材料有关，所有这些可以简单地表示为

$$R = \rho \frac{L}{A}, \tag{11}$$

因子 ρ 称为物质的体电阻率。电阻一般以欧姆(欧)来量度。在欧姆定律中，和欧并列的是以安作为电流单位，以伏作为电势差的单位。如果长度以厘米为单位，则相应的电阻率单位是欧·厘米；这是表中通常给出的单位。

电气工程师注重式(10)及式(11)主要是为了计算电路中各部分的电阻以及这些电路的电压和电流的关系。物理工作者们，除了设计电气仪表时候以外，他们把这些式子看作是反映物质的最显著和最一般特性的，物理工作者的任务就是要了解物质的特性的。这些式子总起来所反映的基本事实是：在均匀的固体中任一点的电流密度和电场强度成比例，并且比例常数只和物质的性质有关——而，例如和导体的形状无关。这就是说，

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \tag{12}$$

这里 σ 是物质的特性常数。

在大多数的导体内部，三个正交方向在物理上是等效的。例如铜的原子排列在立方（面心立方）晶格上。但即使原子排列不是立方的，一块金属一般是由很多任意取向的小晶体组成的，这就使各个方向在任何大范围内的平均是相同的。在这类物质中没有优先的方向，**J** 将和 **E** 的方向相同，常数 σ 只是个标量[1]。我们称这个量为物质的**电导率**。电导率 σ 正好是电阻率 ρ[2] 的倒数。图 4.3 把这些简单关系摘录在一起，并表明式(12)是怎样推导出式(10)及式(11)的。

说一说关于单位和量纲的问题。电导率的通用单位是从电阻的实用单位，欧，推导出来的。如所周知，一欧是每安一伏(伏/安)。电导率是$\frac{\text{电流密度}}{\text{电场强度}}$，它的实用单位是 $\frac{\text{安/厘米}^2}{\text{伏/厘米}}$，或(欧·厘米)$^{-1}$常常读作"欧·厘米的倒数"。通常给出的是电导率倒数，称为**电阻率**。它的实用单位是欧·厘米，常用符号是ρ。在室温下良导体的典型电阻率是百万分之几的欧·厘米。例如纯铜的电阻率在室温下是 1.7×10^{-6} 欧·厘米，或它的电导率是 5.8×10^{5} (欧·厘米)$^{-1}$。

在 CGS 静电单位制里电导率或电阻率的单位没有专用的名称，但是因为这单位制是建立在厘米、克，秒上的，此外没有其他的东西，它的单位一定是由这些组成的。例如，什么是电阻率的量纲呢？

$$\text{电阻率}=\frac{\text{场强}}{\text{电流密度}}=\left(\frac{\text{电量}}{\text{厘米}^2}\right)\Big/\left(\frac{\text{电量/秒}}{\text{厘米}^2}\right) \qquad (13)$$

---

1) 一般地讲，两个矢量之间的线性关系涉及到张量。我们将在第九章中遇到关于张量的一个重要例子。在有些物质中电导率在不同方向是十分不同的，必须作为张量来处理，但是我们不必为此担心。

2) 希腊字母 ρ 和 σ 通常用作电阻率和电导率的符号，虽然他们通常也同样地用作体电荷密度和面电荷密度的符号。没有足够的字母供我们换着用。

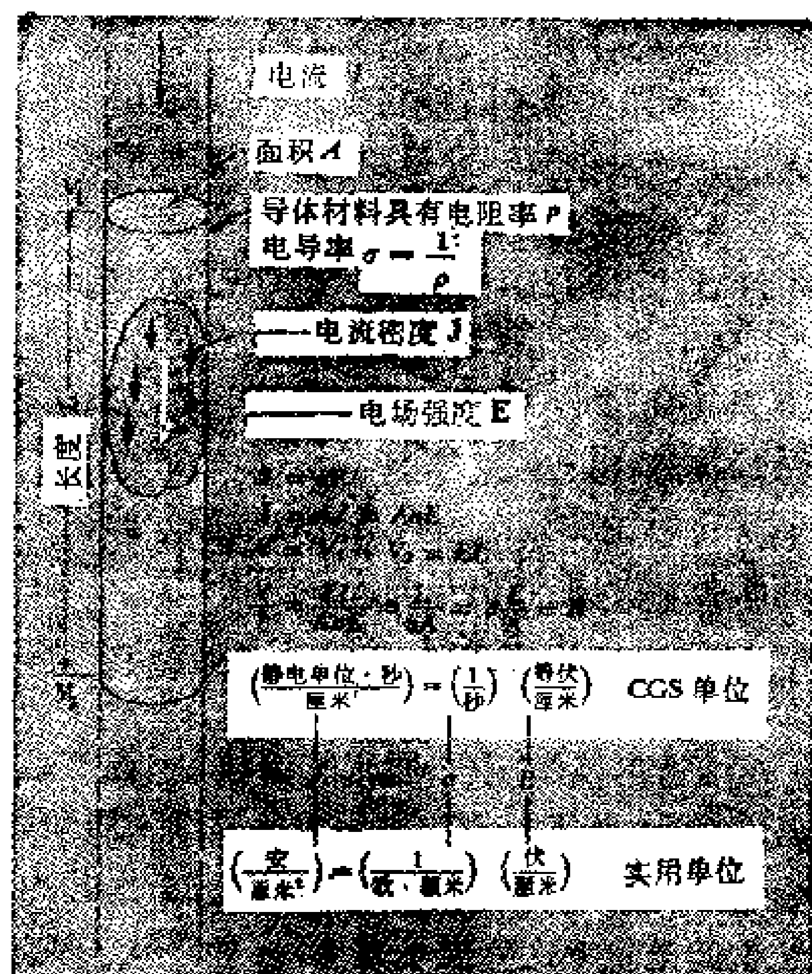


图 4.3　流过导体的电流．电流密度 J 和电场强度 E 之间的基本关系包含了欧姆定律，$V = IR$．

它简化为秒．电阻率的量纲是时间，这单位的适当名称是秒！在这种单位制里，铜的电阻率是 10^{-17} 秒，在室温下玻璃的电阻率的数量级是 10^{3} 秒．我们以后将会看到时间和物质的这一奇特的联系是有合理的物理解释的．

4.4　电传导的一个模型

式(12)只是在某些条件范围内对一些观察到的最普通的物质的特性的一个描述．我们不能从电场的基本定律把它推导出来．要了解它的意义，我们必须了解当加上电场时在某特

定物质中所发生的过程，在不同种类的物质中这些过程可能是很不相同的．值得注意的是对于许多物质以及它们在很大范围的场强作用下欧姆定律都相当精确地成立的．（当然在某些情况下，它确实失效，而也*必定*失效，我们将找出它为什么失效的原因．）我们现在要详细说明一个模型系统中的电传导过程．这对很多种导体是典型的，但不是对所有的导体都是典型的．

我们需要载流子，所以我们设想一含有相等数目的正载流子和负载流子的介质，每一种载流子都是每立方厘米N个．正载流子是质量为M_+的离子，带电量是e，负载流子是质量为M_-的负离子，带电量为$-e$．电流密度$\mathbf{J}$将由这些载流子的平均速度决定．

把稳定的均匀电场$\mathbf{E}$加到这系统上，对每个载流子都施加一作用力．在本卷里这是初次研究作用于在电场中*运动*电荷上的力．仔细地处理这一问题将在第六章中进行．正如我们在第一卷中已经引用过的事实，这力和作用于静止载流子上的力是一样的．就是说，每个电量为q的载流子，不管它们的运动，受一恒力$q\mathbf{E}$．

这时候让我们暂时停下来想一想，为什么欧姆定律总是有效的！作用在自由载流子上的恒力应产生一恒加速度．但是恒电流密度不是和恒加速度，而是和恒*速度*相联系的．如果我们的系统确实是服从欧姆定律的，那必然是因为，对于载流子来说，平均*速度*是和*力*成正比的．这就提醒我们电荷不能是自由运动的；一定有某些东西反抗电场所引起的运动．

我们不必到远处去寻求阻力的来源——阻力是由载流子在它们彼此之间以及在介质中的其他粒子之间运动时受到碰撞而引起的．

过程的进行方式多少和我们所取模型的细致结构有关．

具体地说，设想一种由中性原子，正离子和负离子组成的气体，它的密度和标准气体的差不多一样，大约每立方厘米 10^{19} 个原子(图 4.4)。假设中性原子是主要成份，正负离子分散在他们之间。粒子之间的距离，不论是中性的或是带电的，都比离子或原子的半径大得多，所以离子在大部分时间内不互相碰撞。

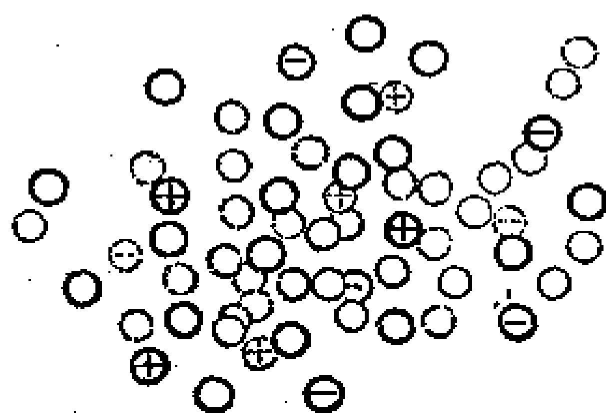


图 4.4　在中性原子中间的正、负离子。

在不加电场时，原子和离子运动的方向是杂乱的，运动的速率由温度决定。如果我们需要的话，气体分子运动论能给出温度和粒子平均动能的关系。如果我们可以观察某一特定时刻，例如说 $t=0$，一个特定离子，我们将会发现它以某一速度 $\mathbf{u}$ 运动。以后将怎样呢？这离子将沿一直线作恒速运动，直到过一会儿后，它偶然靠近一个原子，靠近到足以引起短距力开始起作用。在这一碰撞下，两个粒子的总动能和总动量是守恒的，但是离子的飞行速率和方向将改变为新的速度 $\mathbf{u}'$，可能改变很小，也可能很大。以后又发生一次新的碰撞，使速度改变为 $\mathbf{u}''$，依次进行下去。也有可能远处的另一个离子由于长程的库仑力和我们的离子发生相互作用，使这个离子的路径产生偏转。长程作用在离子与离子之间可能是重要的，主要是以较小的无规则增量的方式来改变速度，但最终效果是相同的。

最终效果——这是我们的问题的关键——是消除了离子在 $t=0$ 时的速度 $\mathbf{u}$ 和在经过了一段时间之后的速度之间的联系(或是大小上或是方向上的联系)。这就是说：在 $t=\tau$ 的某一时间后，不管离子在 $t=0$ 时的方向怎样，它的速度

矢量的指向在空间的各个方向是同样可能的．离子已经“忘记”了原来运动的方向．换句话说，如果我们挑选 10,000 个水平地向南方向运动的离子，跟踪每一个离子 τ 秒，这些离子的最后速度方向将均匀地分布在一个球上．它们可能要经过很多次碰撞才消失大部分的方向记忆，或是只要几次碰撞，方向记忆就消失了，这取决于导致大动量改变的碰撞出现的多，还是导致小的动量改变的碰撞多；而这又取决于相互作用的性质．刚体弹性球碰撞是一极端的情形，已经证明它只要一次碰撞就完全改变了方向．我们无需为这些差别而感到麻烦．关键在于不论碰撞的性质怎样，存在某一时间间隔 τ，它是给定系统的特征，这特征的意义是经过时间 τ 后，这系统中的离子将基本上失去了原来速度方向和最后速度方向之间的相互关联[1]．这个特征时间 τ 决定于离子及其平均环境的性质；碰撞越频繁，τ 一定越短，因为在我们的气体中碰撞之间的间隔时间内离子不会发生变化．

现在我们准备把均匀电场 $\mathbf{E}$ 加到这系统上去．如果我们假设象我们曾经说过的刚体球的情形那样，在一次碰撞后离子便完全失去了方向的记忆，这会使叙述更容易一些．我们的主要结论实际上和这假设无关．在一次碰撞后，离子立即沿一任意方向出发．我们把碰撞以后离子立即有的速度记作 $\mathbf{u}^c$．作用在这离子上的电场力，$\mathbf{E}e$，不断地给离子增加动量．在时间 t 后，离子从电场获得的动量增量是 $\mathbf{E}et$，它应用矢量加法加到原来的动量 $M\mathbf{u}^c$ 上去．现在它的动量是 $M\mathbf{u}^c+\mathbf{E}et$．如果相对于 $M\mathbf{u}^c$ 来说，动量的增量是很小的

1）通过给出初始和最后方向之间的相互关系的定量测量，有可能确切地定出一般系统的 τ 来．这是一个统计的问题，这和找出老鼠出生时体重和成长以后的体重之间相互关系的测量方法一样．但我们不需要一个一般的定量的定义来完成我们的分析．

话，这就意味着离子速度没有受到大的影响，所以我们可以预料，下一次碰撞将会象没有电场时的情形一样。换句话说如果电场不太强的话，碰撞之间的平均时间间隔 $\bar{t}$，是和电场强度 $\mathbf{E}$ 无关的。

从电场获得的动量永远是和电场同一方向的矢量。但是事实上在每一次碰撞时这动量消失了，因为在每一次碰撞后运动的方向是随机的，不管碰撞前的方向如何。

在某一时刻所有正离子的平均动量是怎样的？ 如果我们这样来看，这问题是很容易回答的：假定在所研究的时刻把钟停下来，并询问每一离子，从它的上次碰撞之后已经过了多长时间。假定从正离子 1 得到的回答是 t_1。那末这离子一定除它在上次碰撞后所具有的动量 $M\mathbf{u}_1^0$ 之外又增加动量 $e\mathbf{E}t_1$。所有的 N 个正离子的平均动量是

$$M\bar{\mathbf{u}}_+ = \frac{1}{N}\sum_i (M\mathbf{u}_i^0 + e\mathbf{E}t_i) \tag{14}$$

这里 $\mathbf{u}_i^0$ 是第 i 个离子在上次碰撞后所具有的速度。这些 $\mathbf{u}_i^0$ 在方向上是非常任意的，所以它们对平均值的贡献是零。第二部分只是 $\mathbf{E}e$ 乘上 t_i 的平均值，即乘上从上次碰撞后的时间平均值。这必定和到下一次碰撞的时间的平均值相同，而这两个平均时间都等于碰撞之间的平均时间 $\bar{t}$[1]。所以在有稳定电场 $\mathbf{E}$ 的情况下，一个正离子的平均速度是

---

1) 你可能认为碰撞之间的平均时间间隔等于从上一次碰撞到此刻的平均时间和此刻到下一次碰撞的平均时间之和。如果碰撞是在绝对有规则的间隔发生的，这是正确的，但是它们并不如此。它们是独立的随机事件，因此以上的说法是正确的，尽管初看起来是似非而是的。请思索思索。这问题不会影响我们主要结论。如果你能说明它，你可以增长统计方面的智慧。（提示：如果一次碰撞并不影响其它次碰撞的几率，即所谓独立事件，那么你在任意时刻计时，或者在一次正碰撞的时刻计时，是没关系的。）

$$\bar{u}_+ = \frac{\mathbf{E}e\bar{t}_+}{M_+}. \tag{15}$$

这表明载流子的平均速度和所加给它的力成正比. 如果我们只观察平均速度，则看来好象介质以一正比于速度的力抵抗着运动.这是一种摩擦阻力,象你用匙搅动浓糖浆时所感觉到的一样,是"粘滞"阻力. 无论在什么时候载流子象这样行动,我们就可以预料有象欧姆定律那样的规律显示出来.

在式(15)中我们用了符号 $\bar{t}_+$，因为正离子之间和负离子之间的碰撞所需的平均时间间隔可能是很不一样的. 负离子所获得的速度是沿相反方向的,但是因为它们是带负电荷的,它们对电流密度 **J** 的贡献是应该加到正电荷所形成的电流密度上去的. 包含两种离子对电流密度的贡献,式(3)可写为

$$\mathbf{J} = Ne\left(\frac{e\mathbf{E}\bar{t}_+}{M_+}\right) - Ne\left(\frac{-e\mathbf{E}\bar{t}_-}{M_-}\right) = Ne^2\left(\frac{\bar{t}_+}{M_+} + \frac{\bar{t}_-}{M_-}\right)\mathbf{E}. \tag{16}$$

我们的理论预示出这系统必将服从欧姆定律,因为式(16)表示 **J** 和 **E** 之间是线性关系，其它的量是介质的特性常数. 比较式(16)和式(12),常数$Ne^2\left(\frac{\bar{t}_+}{M_+} + \frac{\bar{t}_-}{M_-}\right)$ 起到电导率 σ 的作用.

我们对这系统作了许多相当特殊的假定,但回过来看,可以发现,这些假定对于 **E** 与 **J** 之间的线性关系来说不是必不可少的. 在具有恒定密度的自由载流子的系统中,载流子的运动常常由于碰撞或由于系统的其他相互作用而被"再随机化". 如果场 **E** 不太强，这系统应当服从欧姆定律. **J** 与 **E** 的比值，即介质的电导率 σ，和载流子的个数及特征时间(即消失方向的相互关联所需的时间)成正比. 只是通过上述常量,碰撞过程的所有复杂细节才反映到我们的问题中来. 假定载流子的数目已知，建立任何给定系统的电导率的详细理

论就等于建立τ的理论．在我们的特殊例子中，这个量为$\bar{t}$所代替了，并且给出了电导率σ的完全确定的结果．引入更一般的量τ，并考虑到正负载流子的数目不同的可能性，我们可以把我们的理论总结如下

$$\sigma \approx e^2\left[\frac{N_+\tau_+}{M_+} - \frac{N_-\tau_-}{M_-}\right]. \tag{17}$$

这里用了符号≈以表示我们没有给τ一个确切的定义．但这是能够作到的．

为了着重指出电传导在一般情况下只涉及到在载流子的杂乱运动上叠加上微小的有系统的漂移，我们画出图4.5把它当作所讨论系统的人为的微观图象．正离子用黑点表示，负离子用小圆表示．我们假定后者是电子，因为它们的质量小，比正离子容易运动得多，所以我们完全可以不考虑正离子的运动．在图4.5(a)中我们看到粒子是完全杂乱分布的，电子速率也是完全杂乱分布的，在作这图时，粒子的位置和符号是由“随机数”表决定的．电子的速度矢量同样也是根据随机分布画出的，它相当于气体中分子速度的“麦克斯韦”分布．图4.5(b)中，我们用了相同的位置，但所有的速度都增加了一个向右的小增量．就是说，图4.5(b)是电离了的物质的一个图象，其中有负电荷向右的净流量，相当于向左的正电流．图4.5(a)表示平均电流为零的情况．

显然，我们不会料想到图4.5(a)中的46个电子的实际平均速度正好等于零，因为它们是统计上各自独立的量．一个电子不影响另一个电子的行为．在没有作用电场的情形下，事实上存在着电流的随机涨落，这只是由于电子速度矢量和的统计涨落所形成的．这种自然涨落的电流是可以测出的．它是所有电路中“噪音”的来源，并常常决定测量弱电信号仪器的灵敏度的最高极限．在这教程的第V卷中我们将读到更

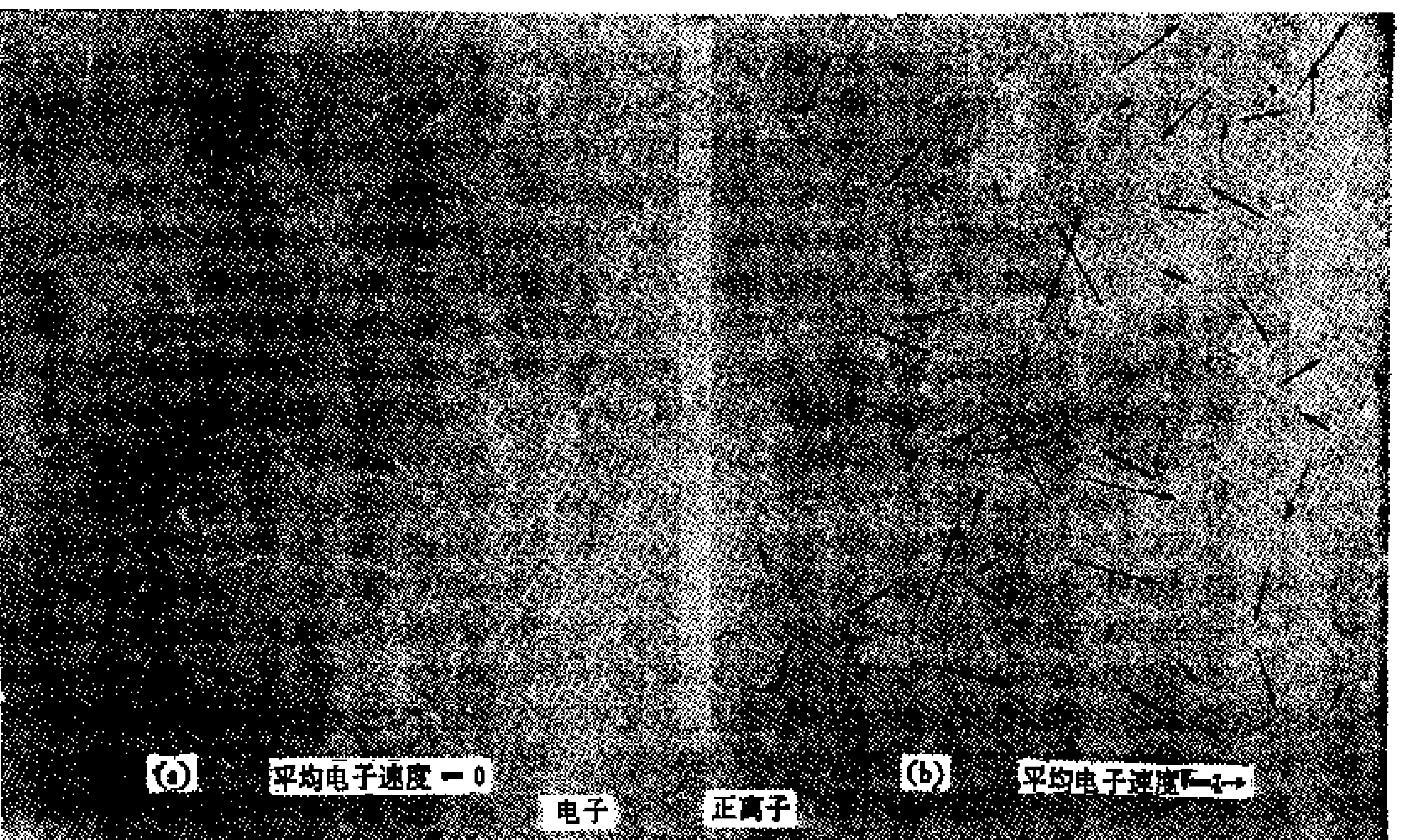


图4.5 (a)电子与正离子的无规分布，两者的数目大体相等．电子速度以矢量表示，在(a)中它们是完全无规的；在(b)中已经加进了一个向右方的漂移，以速度矢量→(黑箭头)表示．这个速度矢量加到原来的每一个电子的速度矢量上去，就像图的左下方的那个电子上所表示的那样．

多的这方面的东西.

4.5 欧姆定律失效之处

我们现在可以来看看在什么情形下欧姆定律失效. 假如电场是如此强,以致在碰撞之间,离子所获得的附加速度可以和平均热运动的速率相比拟. 这将严重影响式(16)中的碰撞间的平均时间 $\bar{t}_+$ 或 $\bar{t}_-$.现在这些时间是 **E** 的函数,而不是常数,式(16)不再是线性的了. 这就是说,场强 **E** 加倍,如果 $\bar{t}$ 也要改变,就不会使电流密度 **J** 加倍了. 我们从一个典型的例子来看一下这种情况.我们的模型类似一种弱电离的气体. 在标准密度下,气体中离子平均自由程约为 10^{-6} 厘米的数量级. 随机运动的平均动能是 kT 的数量级,这里 k 是玻耳兹曼常数,它在气体运动论中经常出现. 我们的速度判据也可以这样说: 如果离子在两次碰撞之间从电场获得的动能可以和 kT 相比拟时,我们就会遇到麻烦. 令这两种能量近似相等

$$eE \cdot 10^{-6}\text{厘米} \approx kT. \tag{18}$$

把数值代入,得 $E \approx 80$ 静伏/厘米. 就实验室中常用的电场而言,这是中等强度的电场;等于 24 千伏/厘米. 当然这一极限直接和自由程有关. 低气压下的电离气体,自由程很长,即使在很弱的电场下也可能不符合欧姆定律.

很强的电场能引起更巨大的变化,例如载流子数的改变. 这就是在电火花中所发生的现象. 已有的载流子从电场得到如此多的能量以致和其他原子的碰撞如此剧烈,而足以使后者电离,于是产生更多的载流子,如此继续下去. 由此引起的离子雪崩导致欧姆定律的突然破坏!

我们可以预想到我们理论的失败,如果不是属于欧姆定律的,也会是属于其它方面的问题. 假定电场 **E** 仅作用一个

极短的时间. 如果这个时间可以和临界时间 τ 相比拟，或者更短一些，显然我们必须修正我们的图象. 为了弄清楚以上的说明，考虑采用一交变电场，其交变周期比碰撞时间间隔短，载流子的反应象自由物体一样，主要决定于它们的惯性. 不论这问题的性质如何，这是你将来会遇到的一个有意义的问题，我们所提出的理论对它是不合适的. 但是要注意在我们刚才的例子中所用过的气体中碰撞间隔的平均时间［对于正离子大约(10^{-6}厘米/分子速率)］是 10^{-10}秒的数量级，电子碰撞的时间间隔甚至还要短一些. 所以，我们的理论虽然是根据稳定电场建立起来的，但对很多的系统也有效，即使是很快的交变电场也是有效的.

在第 4.2 节中所讨论的真空二极管明显地是“非欧姆”器件. 在一定条件下，当电子的供应受到阴极的电子发射率的限制时，如果阳极是正的，电流实际上和电压无关. 如果阳极是负的，则电流为零，因为阳极根本不能发射电子. 二极管只能向一个方向通过电流. 它通常用作交变电流的整流器. 在习题 4.25 中所研究的，在受空间电荷限制的条件下，二极管的电流和电压的 3/2 次方成正比，而不是如欧姆定律所要求的和一次方成正比.

两种半导体材料的结，或半导体和金属之间的结可以是高度地非欧姆的，和真空二极管一样，是单向的. 非线性器件在电子设备中（象在日常生活中一样）是不可缺少的. 如果要求每一个事物都服从欧姆定律，电子技术就将不复存在了.

4.6 金属的电导率

据我们所知，金属是最好的导电体. 我们刚才介绍的关于电导的简单图象是在 19 世纪后期由德罗特(Drude)和其他

一些人提出的，用来说明金属的电导率。洛仑兹在细节上大大地改进了这个理论，并且在某些方面是相当富有成果的。毫无疑问，金属的高电导率是由于自由电子，自由的意义是指不束缚于任何单个原子，能够在全晶格中运动。令人信服的证明是在流过电流的金属电路中完全没有化学上能够鉴定出来的物质的迁移现象。金属元素的化学和早期的原子结构的量子理论相结合，从而指出金属原子很容易失去一个或两个外层电子。如果原子是孤立存在的，这些电子就束缚于原子上，但是当很多相同的原子在晶体中紧密地聚集在一起时，这些电子就会松散开。晶格本身由留下的正离子组成，固定成规则的坚硬的点阵。"导电电子"就在这离子晶格中漫游。即使每一金属原子释放出一个电子，形成的载流子密度也比用其他方法在物质中产生的离子密度大得多。钠金属中每立方厘米的原子数是 2.5×10^{22}。

我们已经看到一个载流子的迁移率主要决定于时间 τ，在时间 τ 内，所加电场的作用使它能够累积定向的动量。不论可能进行的是什么过程，这都是正确的。如果我们承认钠中载流子的数目是每个原子一个，并且它们是质量为 m_e 的电子，我们只用实验测出钠的电导率就可以算出 τ 来。在室温下钠的电导率 σ，以静电单位表示，是 1.9×10^{17} 静电单位/秒·厘米·静伏，用式(17)，并完全略去正载流子，可得

$$\tau_- = \frac{\sigma m_e}{N_- e^2} = \frac{(1.9\times10^{17})\times(9\times10^{-28})}{(2.5\times10^{22})\times(23\times10^{-20})}$$

$$\approx 3\times10^{-14}\text{秒}. \qquad (19)$$

一个电子能够在这么长的时间内在晶格中穿行而不发生严重偏转，看来是令人惊异的。根据分子运动论，在室温下一个电子的热运动速率大约为 10^7 厘米/秒，所以在 3×10^{-14} 秒的时间里一个电子将移动 30 埃——大于十个晶格间距。

为什么电子是这样容易通过离子的晶格呢？我们记得，只要我们谈到离子的大小，在紧密的晶格中离子几乎是互相挨在一起的．并且，在穿过晶格的路程上电势的上升和下降和在室温时电子动能（以电子伏为单位）相比是很大的．从另一方面来说，如果妨害电子飞行的原因不是和离子的碰撞，那又是什么原因呢？这些关键性的问题在发现电子的波动性质之前是不可能回答的．的确，在量子力学之前，电子在金属中的行为使物理学面临着一系列难于理解的佯谬．在学习了一些量子物理学基础知识以后我们还要回到这些问题上来．对于我们现在的工作来说，我们能作的只能象过去几代物理学者所不得不作的那样，认为金属的显著的电导率是理所当然的．

但是，甚至在这里，我们还能保持我们的导电图象的一些要点．传导电流是由电子载流的；它代表载流子缓慢的系统漂移运动叠加在快得多的不规则的运动上的一种运动。电子为晶格所散射或偏转，使得电子的漂移速度和电场强度成正比，而且因此才使电流服从欧姆定律．

对于大多数金属，在比可能长久维持的任何电流密度要高得多的范围内，欧姆定律都是非常精确有效的．在实验上从来没有表现出来过明显的偏差．根据一种理论的估计，在电流密度达 10^9 安培/厘米^2 时可能出现 1% 的偏差．这样大的电流密度大约是通常电路导线中的电流密度的一百万倍．

纯金属的电导率随着温度的降低而增加．这用我们以前的理论有些难于解释．想用“弹子球”之类的图象来解释金属导电的所有现象的任何意图，在令人惊奇的超导现象的面前都显得是可笑的．许多金属在低温下开始以另一种方式导电，如果有人想用电导率来描述它，那就需要承认电导率是无限大！（甚至这一假设也不真正地适合它们的奇异的电学行为．）

图 4.6 中的图表表示各种纯物质的电导率以及它们随温

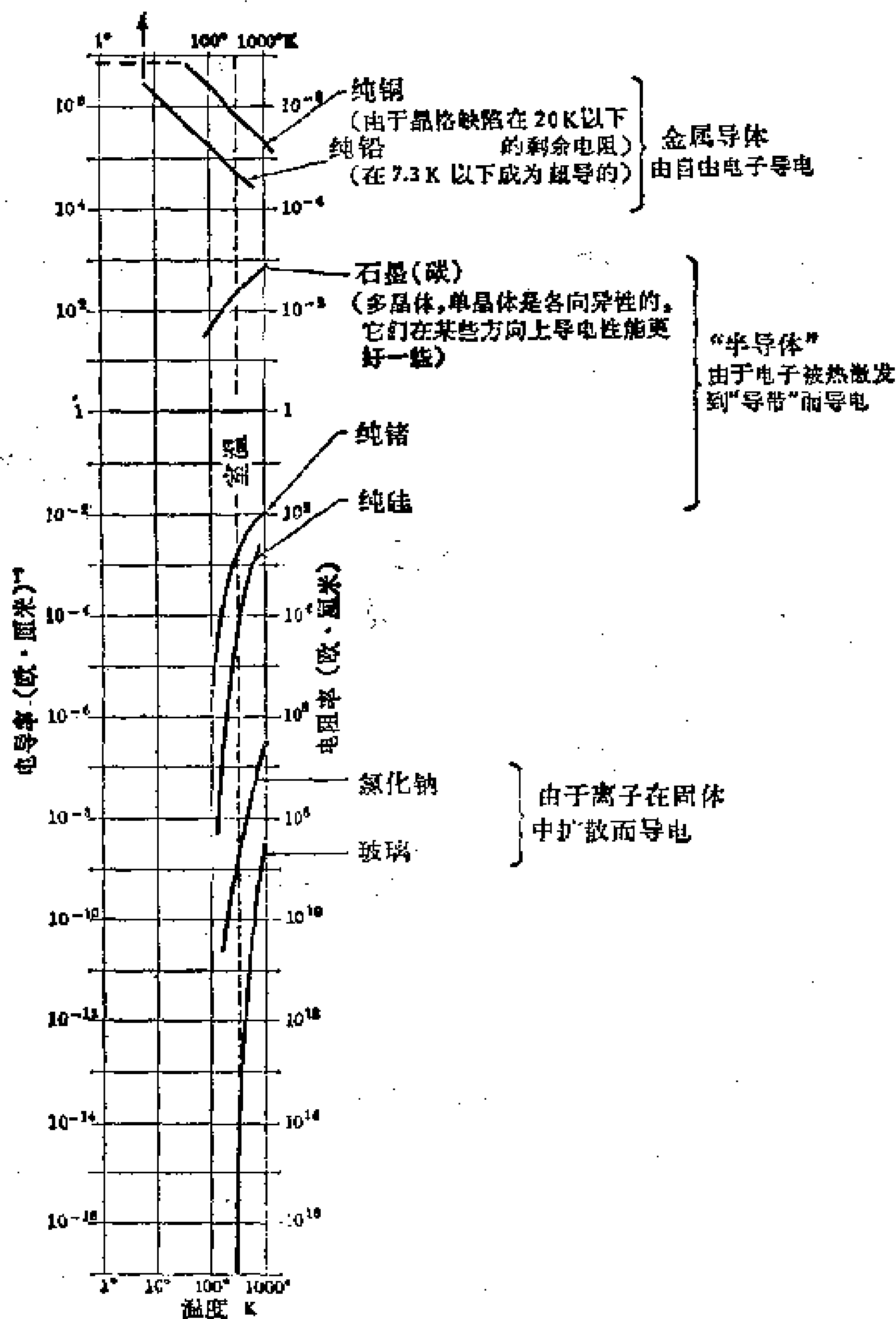


图 4.6 一些代表性物质的电导率．注意电导率和绝对温度都用的是对数标度．

度的变化．它的主要目的是显示数值和性能的广阔范围．注意横坐标(温度)和纵坐标(电导率)都是对数标度．

4.7 导体的电阻

当材料的电阻率为已知时，计算一均匀导线的电阻 R 是一个简单的事情．我们已经在式(11)中写出过公式：

$$R = \frac{\text{长度}\times\text{电阻率}}{\text{横截面积}}. \quad (20)$$

只是对于轮廓清楚的电流，电阻 R 才有意义．在导线的情形，意义是明确的．如果是更一般的体分布的电流情形，不确定电流流进和流出"接线柱"的位置，我们就不可能谈到电阻的问题．体积中各处的电流密度分布必须用我们的基本关系式 $\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}$ 来确定．

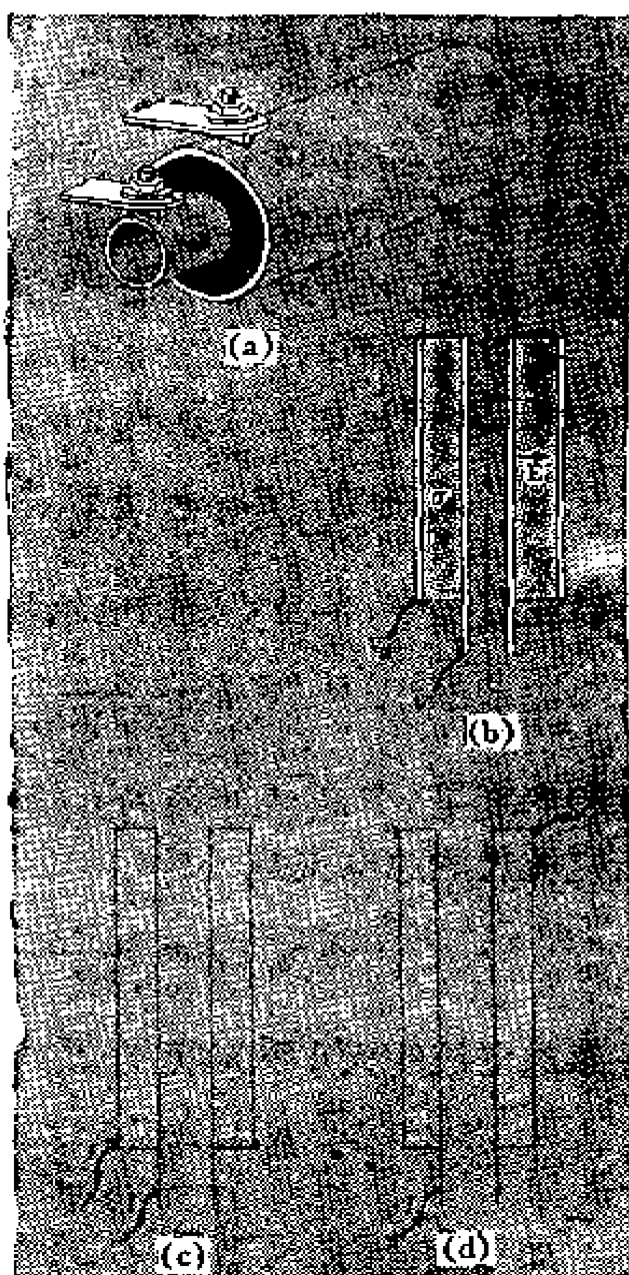


图 4.7　石墨填满了两圆柱形铜管之间的空间(a, b)．如果铜管的电阻可忽略不计，则电流径向地流过石墨．否则电流线就会象(c)和(d)那样，(c)及(d)表示接线柱在两个不同的位置．

为了举例说明这个问题，我们来研究图 4.7(a)及(b)所示的物体中的电流流动情形，物体由二个圆柱形铜套管组成，其中空间装满石墨．那末两个接线柱之间的电阻多大？如果铜管对纵向电流的电阻比石墨对径向电流的电阻小

得多，则电流从哪里流进铜管和从哪里流出铜管（即，不论接线柱放在哪里）都不会造成很大差别．在这样情形下我们可以假定每一铜管是等势的．查看图 4.6 的图表，我们看到在室温附近石墨的电阻率和铜的电阻率之比大于 10^3倍，所以如果铜管不太薄的话，我们的假设看来是可靠的．根据这一假设进行，令 V_0 为两铜极之间的电势差．为求出石墨中的电场，我们回想带电圆柱之间的电场和 $1/r$ 成正比，所以可设 $E=k/r$，并通过如下计算求出常数 k，

$$V_0 = \int_{r_1}^{r_2} E\,dr = k\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = k\ln\frac{r_2}{r_1}, \tag{21}$$

所以在石墨中，半径 r 处的电场强度的大小是

$$E = \frac{V_0}{r\ln(r_2/r_1)}, \tag{22}$$

电流密度是 σE．在半径为 r 处电流通过的总面积是 $2\pi rL$，所以流过的总电流是

$$I = \frac{2\pi L\sigma V_0}{\ln(r_2/r_1)}. \tag{23}$$

注意这电流的大小和 r 无关，它本应如此．电阻是

$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{1}{2\pi L\sigma}\ln\frac{r_2}{r_1}. \tag{24}$$

如果铜管是一层很薄的金属片，纵向流动的电阻和石墨的横向电阻相比不小，那将会怎样呢？我们不打算解这一问题，但想一想电流的流线是什么样子，是有意义的．图 4.7(c)及(d)示出接线柱在两个不同位置时的分布．

4.8 电路和电路元件

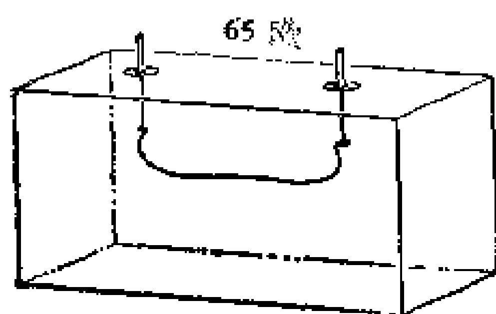
电器件通常具有装好的接线柱，用以连接导线．电荷可以通过这些路线流进或流出器件．特别是，如果两个接线柱

(只是两个)用导线和外部连接，并且如果电流是稳定电流各处电势都是恒定的，则显然在两端的电流必定是相等而相反的[1]. 在这情形，我们可以说这电流 I 流过了这个器件，并可以说"两端之间的"，或"横跨两端"的电压是 V，这指的是它们之间的电势差. 对于某已知的电流 I 来说比值 V/I 是以电阻为单位的某一数值(如果 V 是以伏[特]为单位，I 是以安[培]为单位，则电阻单位则是欧[姆]). 如果电流所流过的物体的所有部分都服从欧姆定律，这个数值将是一个常数，和电流无关. 要是两端之间通过的是稳定电流("dc")，这一数值就完全描述了物体的电特性. 用这些相当明显的意见，我们引进一个简单的概念，即*电路元件*的概念.

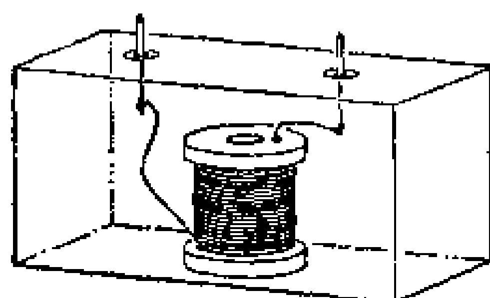
请看图 4.8 中的五个箱子. 每个箱子有二个接头，每一箱内有某种材料，而且各箱的材料不同. 如果把导线连接在任一个箱子的接头上，使这个箱子成为电路中的一个部分，并且两个接头间的电势差和流过连接在接头上的导线中的电流的比值都是 65 欧. 我们说，每个箱子的两个接头间的电阻是 65 欧. 对于所有可能的电流值或电势差值来说，这一说法不一定是正确的. 当升高两端间的电势差(即电压)以改变电压/电流的比值时，会发生各式各样的情形，有的箱子比另些箱子发生得早一些. 你可能猜得出哪只箱会首先出问题. 但仍存在某一极限，在此极限之下，电压、电流的关系是线性的. 在这范围内，对*稳定*电流来说，各箱是相同的. 所谓相同是表现在这种意义上：如果任一电路包括其中的一个箱子，不管是哪个箱子，电路的特性都是相同的. 一个箱子等效于 65 欧

---

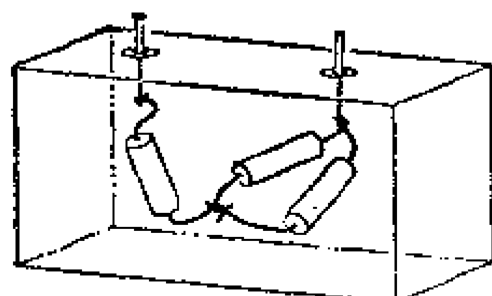
1) 有二个接头的物体，一个接头流进 4 安电流，而在另一接头流出 3 安的电流，这完全是可能的. 则此物体就以 1 库仑/秒的速率积累正电荷. 它的电势必定很快地改变——但这不可能长久地继续下去. 所以这不可能是稳定的电流(即与时间无关的电流).



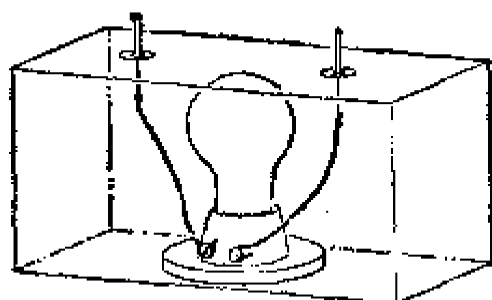
(a) 28 厘米长 40 号的镍铬丝。



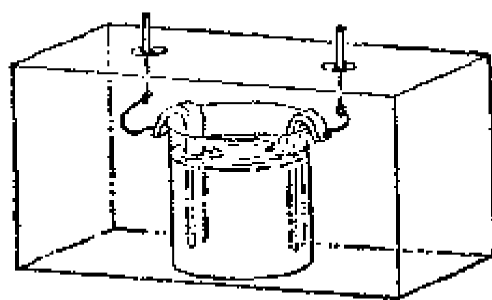
(b) $\frac{1}{2}$ 磅的一卷 28 号漆包铜线（1030 英尺）。



(c) 二个 70 欧和一个 30 欧的电阻器。



(d) 25 瓦，115 伏钨丝灯泡(冷)。



(e) 浓度为 0.5N 的 KCl 溶液，两极有一定大小和一定距离。

图 4.8 各种器件，对于直流电流都是等效于 65 欧的电阻器。

的电阻器。[1]我们用符号 -ᐱᐱᐱ- 表示它. 如果这箱子是电路的一部分，则在描绘电路时我们用这抽象符号代替箱子. 一个电路或电路网络就是这些电路元件彼此用电阻可以忽略不计的

---

1) 我们用电阻器这个术语来表示专为起着这样作用而设计的实际物件. 例如"200 欧，10 瓦，线绕电阻器"是在绝缘体上用导线绕成的具有接头的器件，要求在使用时其中所耗散的平均功率不能大于 10 瓦。

导线连接起来的组合.

把许多元件连接起来组成网络，选其中两点作为端点，就这两个端点而言，我们可以认为整个系统等效于一个单个的电阻器. 我们说，图 4.9(a) 中的实物的物理网络用图 4.9(b) 的图表示，以 A_1A_2 为端点的等效电路是图 4.9(c). 以 B_1B_2 为端点的等效电路是图 4.9(d). 如果你把这一组合装进箱子

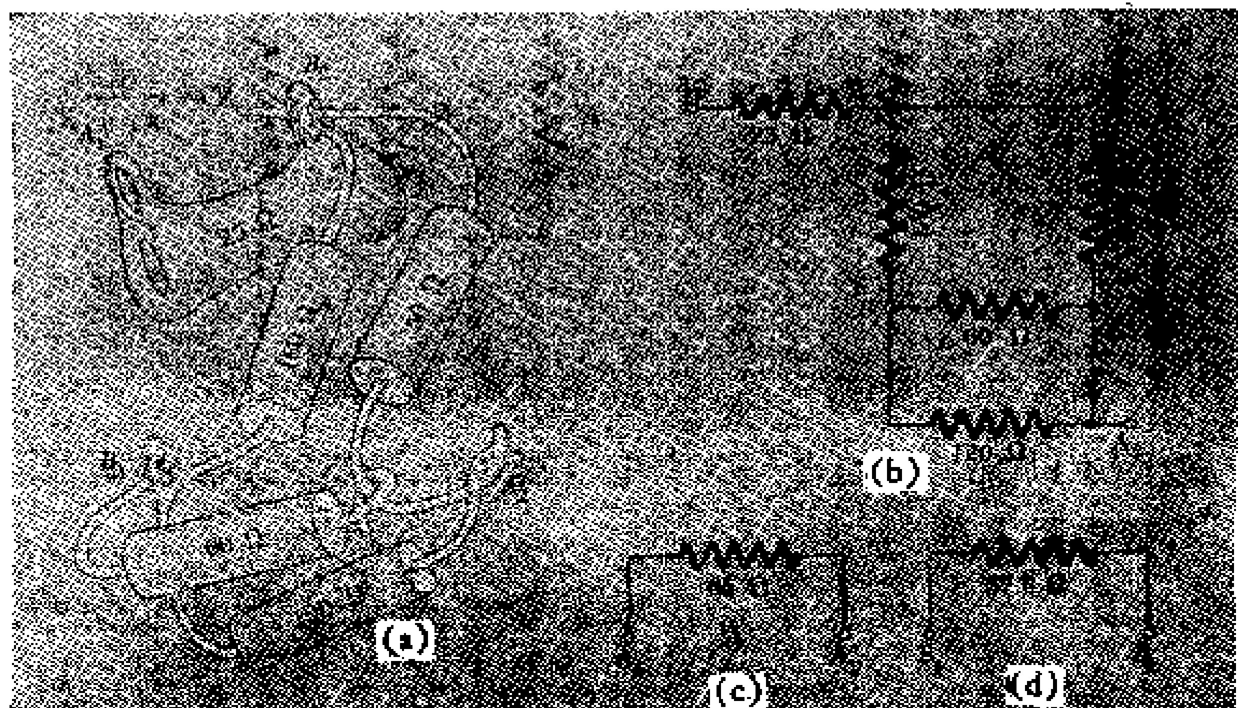


图 4.9 连接在一起的电阻器 (a)，电路图 (b)，在某一对接头间的等效电阻 (c) 及 (d).

里，并只有通过那对接头才可以流进电流. 它和一个电阻为 57.6 欧的电阻器没有区别. 有一条重要的规则——只有直流测量才是这样！以上我们都是对稳定电流和电场来说的；如果不是直流，一个电路元件的特性将不单和电阻有关. 等效电路的概念可以从直流电路网络扩大到随时间变化的电流和电压的系统. 诚然，这是十分重要的. 我们暂不讨论这个领域的内容.

这里我们用少许时间讨论一下计算电路元件所组成的网

络的等效电阻方法．串联和并联的组合情形是容易的．象图 4.10 中那样的组合是电阻值为 R_1 及 R_2 的两个电阻器串联．等效电阻是

$$R = R_1 + R_2. \tag{25}$$

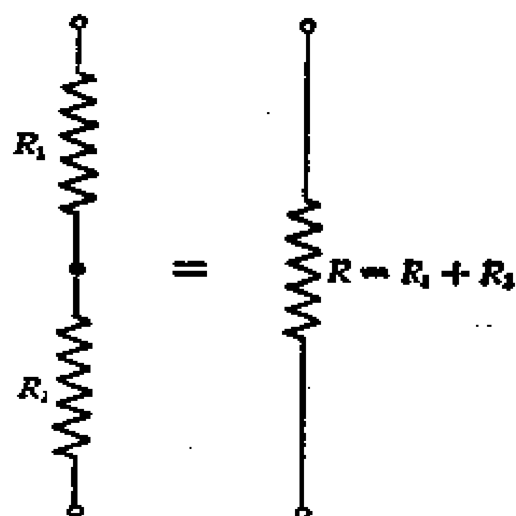


图 4.10 串联电阻．

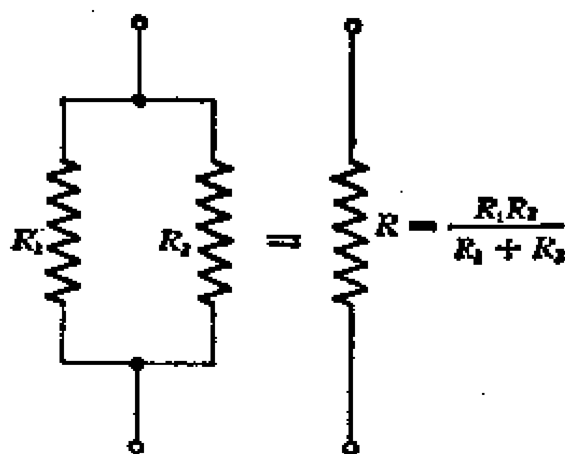


图 4.11 并联电阻．

象图 4.11 那样的组合是二个电阻器并联．你应该能够证明等效电阻 R 是

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad 或\ R = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}. \tag{26}$$

这些就是处理象图 4.12 那样的电路所需要的全部公式，对它的全部装配可以逐步简化为串联和并联的组合．但是图 4.13 那样的简单网络不能这样化简，所以还需要一个更普遍的方法．任何一个可以想到的由电阻组成的网络，其中通过恒定的电流，必须满足如下的条件：

(i) 通过每一元件的电流必等于这元件两端间的电压除以元件的电阻．

(ii) 在电路网络的任一结点，即有三条或更多的导线相交在一起的点，通入结点的电流的代数和必等于零．[这是用电路语言来表达的我们以前讲过的电荷守恒条件，式(7)．]

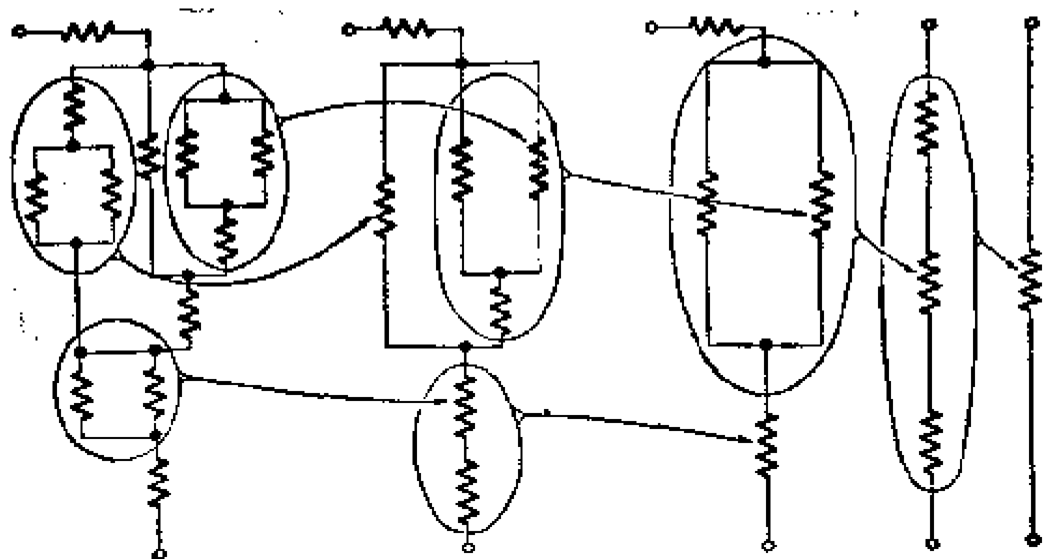


图 4.12　通过并联和串联的组合便可把网络化简。

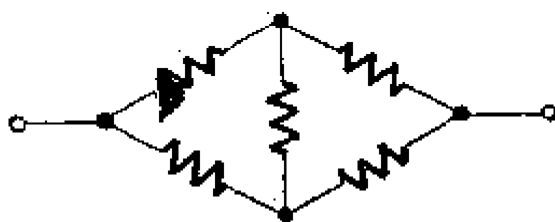


图 4.13　简单的电桥电路．不可能如图 4.12 的那样来化简它．

(iii) 沿网络中的某一个回路，即起点和终点重合在同一个结点的环路，依次的电势差之和等于零．(这是用网络语言对于静电场的普遍性质：任一闭合路程 $\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}=0$ 的一种表达法．) 环路定理

对于任一网络的这些条件的代数表达式恰好提供出所需要的独立的线性方程式的数目，以保证在二个选定的结点之间解出一个，且只有一个，等效电阻．我们如此断言，但并未给以证明．注意到直流网络问题的结构只和电路网络的拓扑学有关，这就是说，只和电路连接图的连接特征有关，而和图中连接线的任何变形无关，这是很有意义的．

电阻的直流网络是一线性系统——电压和电流决定于一组线性方程式，即条件 (i)，(ii)，(iii) 的表达式．所以网络的

不同的可能状态的叠加也是一可能状态．图 4.14 表示电路的一部分，其中有电流 $I_1, I_2\cdots$ 流过导线，在结点上的电势是 $V_1, V_2\cdots$．如果另一系列的电流和电势，$I_1'\cdots$，$V_1'\cdots$ 是这部分电路的另一可能状态，则 (I_1+I_1')，$\cdots$，$(V_1+V_1')\cdots$ 也是一种可能状态．相应于叠加后的这些电流及电压也满足条件 (i)，(ii) 及 (iii)．电气工程师感兴趣的和有用的某些关于网络的一般性的定理是以此为基础的．

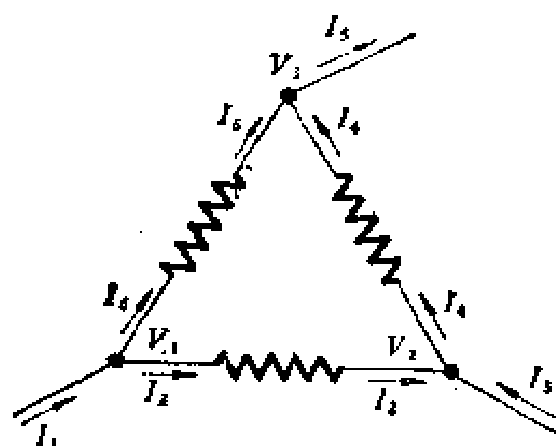


图 4.14 网络接点上的电流及电势．

4.9 电流的能量耗散

电流流过电阻器时，引起能量耗散．如果推动载流子以速度 $\mathbf{v}$ 运动，需一力 $\mathbf{F}$，则完成这一工作必须要以 $\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$ 的功率对载流子作功．如果电场 $\mathbf{E}$ 推动电荷为 q 的离子，则 $\mathbf{F}=q\mathbf{E}$，作功的功率为 $q\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}$．这样消耗的能量最后以热的形式出现．在我们的离子导电模型中，它的发生过程是十分清楚的．在碰撞的间隔内，离子得到一些附加的动能和动量．一次碰撞，或至多几次碰撞使它的动量的方向成为任意的，但未必能恢复到原来的动能．因为离子必需把动能传给使之偏转的障碍物．假设载流子的质量比它所碰撞的中性原子小得多．当小弹子球和大滚球碰撞时平均的动能传递是小的．所以离子(弹子球)将继续累积额外的能量一直到它的平均动能是那样大，以致在一次碰撞中它的平均的能量损失等于它在碰撞间隔中所得到的平均动能时为止．在这种方式下，首先使这些载流子本身"加热"起来，电场驱动载流子所作

的功最后传给介质中的其余粒子，成为随机的动能，即热。

假定一稳定电流 I，单位是安，流过 R 欧的电阻器．在每秒钟内有 I 库仑的电荷通过 V 伏的电势差，$V=IR$．所以每秒所作的功是 I^2R 焦耳．（1 库仑 × 1 伏 = 1 焦耳 = 10^7 尔格．）瓦（特）或叫做伏·安，是功率 P（作功的速率）的相应单位．（1 瓦 = 1 焦耳/秒．）

$$P=I^2R. \tag{27}$$

当然在直流电路中电流的稳定流动需要某种能维持驱动载流子的电场的能源．直到现在，我们讨论的只是整个电路的一部分，避开了**电动势**的问题；我们没有把"电池"放进电路图中．在 4.10 节中我们将讨论一些电动势源．

4.10 电动势和伏打电池

直流电路中电动势的源是一种传送载流子的机构，传送的方向和电场试图驱动这些载流子的方向*相反*．范德格拉夫静电起电机（图 4.15）是一个大型的电动势源例子．在运转稳定时，可以发现外电阻器中的电流沿电场 **E** 的方向流动，并在那里耗散能量（以热的形式出现），其耗散率是 IV_0，或 I^2R．在机器的圆柱内也有一向下的电场．在这里如果载流子附着于绝缘的带子上，则可以使它们

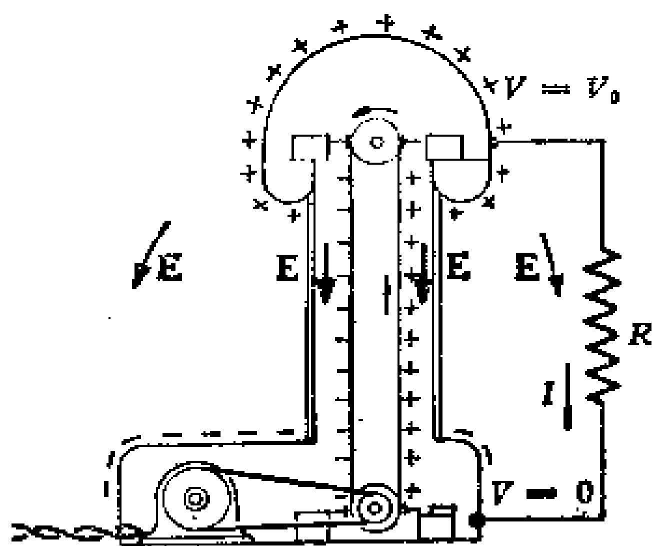


图 4.15 在范德格拉夫起电机中，用机械把载流子沿一个方向传送，这方向和电场想驱动它们的方向相反．

沿电场的反方向移动．它们是如此牢固地被附着以致于它们

不可能在带子上沿着向下的电场方向滑回去.(它们仍可能被端点的电刷附近的更强的场从带子上移开. 我们这里不必考虑在滑轮附近把电荷送上带子和从带子取下的方法.)拉动带子所需的能量是由别处供应的，通常是接到电源线上的电动机但也可能是内燃机，或甚至是人转动的手摇机. 范德格拉夫起电机在这种情形下，效果上是具有电动势 V_0 伏的电池.

在普通的电池里是化学能使载流子在和它们的运动相反的电场中运动. 即正载流子可以向更高的电势处移动，如果由于这种过程，它所参与的化学反应所产生的能量比它爬上电位高处所需要的能量还多的话，这样运动是可能的.

要看这过程是怎样进行的，让我们研究一个特殊的伏打电池. 伏打电池是电动势化学能源的一个普通名称. 伽伐尼(Galvani) 在 1790年前后所作的著名的青蛙腿抽动实验就发出了能用化学方法产生电流的信号. 是伏打 (Volta) 证明了这源并不是如伽伐尼所主张的"动物电"，而是电路中的不同金属的相互接触. 伏打进一步制成了第一个电池，它是元电池堆，每一个元电池包括一个锌片和一个铜片，把它们用湿的纸板隔开. 这样命名的伏打"堆"是产生稳定电流的第一个实际电源. 有许多种伏打电池，包括普遍应用的"干电池". 汽车用的电池，如果是"12伏"的电池，是由六个串联的铅-硫酸元电池所组成的. 再介绍另一种不同类型的电池，叫做"韦斯顿标准电池" (Weston standard cell)，它的化学反应相当简单. 而且韦斯顿电池在实验室中是用作测量准确电压的标准，具有独特的重要性.

图 4.16 表示韦斯顿电池的一种形式. 这装置由 H 形的玻璃容器制成，其中充满硫酸镉 $CdSO_4$ 的水溶液. 把外引线封接在每一管脚的底部，和管内的电极相接触. 在左侧是盛纯汞的池. 在右侧是溶解了镉金属的汞池.(许多金属能溶解

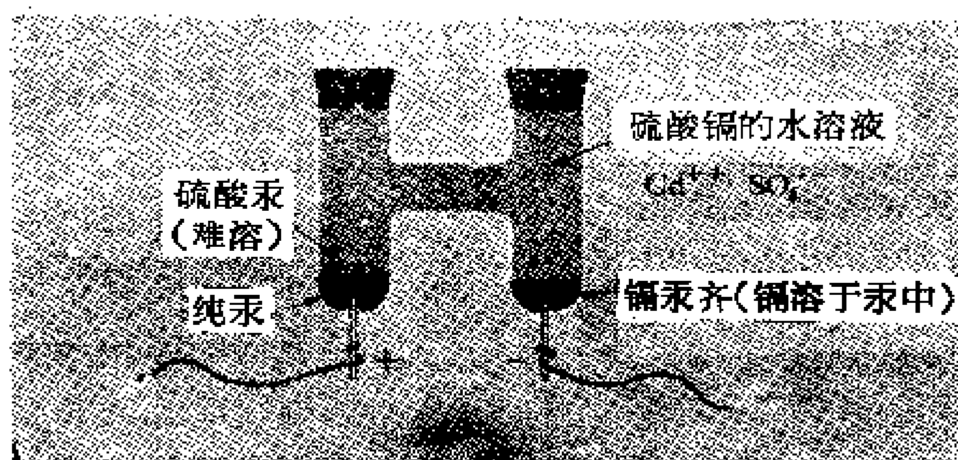


图 4.16　韦斯顿电池，用作测量准确电压的标准．这是"非饱和"电池．对于"饱和"的情况，除了图中所示的组分外，在每一电极上都有过剩的未溶解的 $CdSO_4$．

在汞中；这种溶液称为汞齐．）在左侧汞池上面有一些硫酸汞 Hg_2SO_4 的晶体，它是一种极轻微地溶于水的化合物．我们发现在两外接导线之间有电势差，左侧的对右侧的来说是正的．（电势的绝对值是没关系的；这里重要的只是电势的差值．）电池中一些镉离子从汞齐进入了水溶液，每一离子留下两个电子，一直到汞齐上电极积存下很多负电荷为止．当电极含有如此多的额外电子，以致它们的吸引力阻碍更多的镉离子释放出电子离开电极时，镉离子才停止脱离汞齐．

现在如果在电池两端接上一个电阻器作为外电路，电子将通过这外电路从负极流到正极．这将使更多镉离子，Cd^{++}，进入溶液，留下的电子仅是补充这电极上的负电荷．伴随着离子的迁移，一稳定电流将持续下去，通过水溶液成为闭合电路．同时在另一电极上也发生变化．图 4.17 表示当电流沿着电路流动时，在电极与溶液（电解液）的两个接触面上正在进行着的过程．在图 4.17(a)中汞离子，Hg^+，离开溶液，和从外部电路来的电子相遇，形成中性汞原子．在溶液中它们由溶解 Hg_2SO_4 来补替，同时贡献一个新的硫酸根离子于电解液．在图 4.17 (b) 中镉原子继续分解，进入电解液成为 Cd^{++} 离子．

总的效应本质上是从镉原子分离出电子，并把电子加到汞离子上．化学工作者说这是镉被氧化了，汞被还原了．电池能够工作是因为这种交换激烈地进行着．我们可以这样说，从在镉原子结构中和在汞原子结构中电子的相对结合力来讲，汞离子希望取得电子的程度比镉原子不愿意放弃电子的程度更强些．

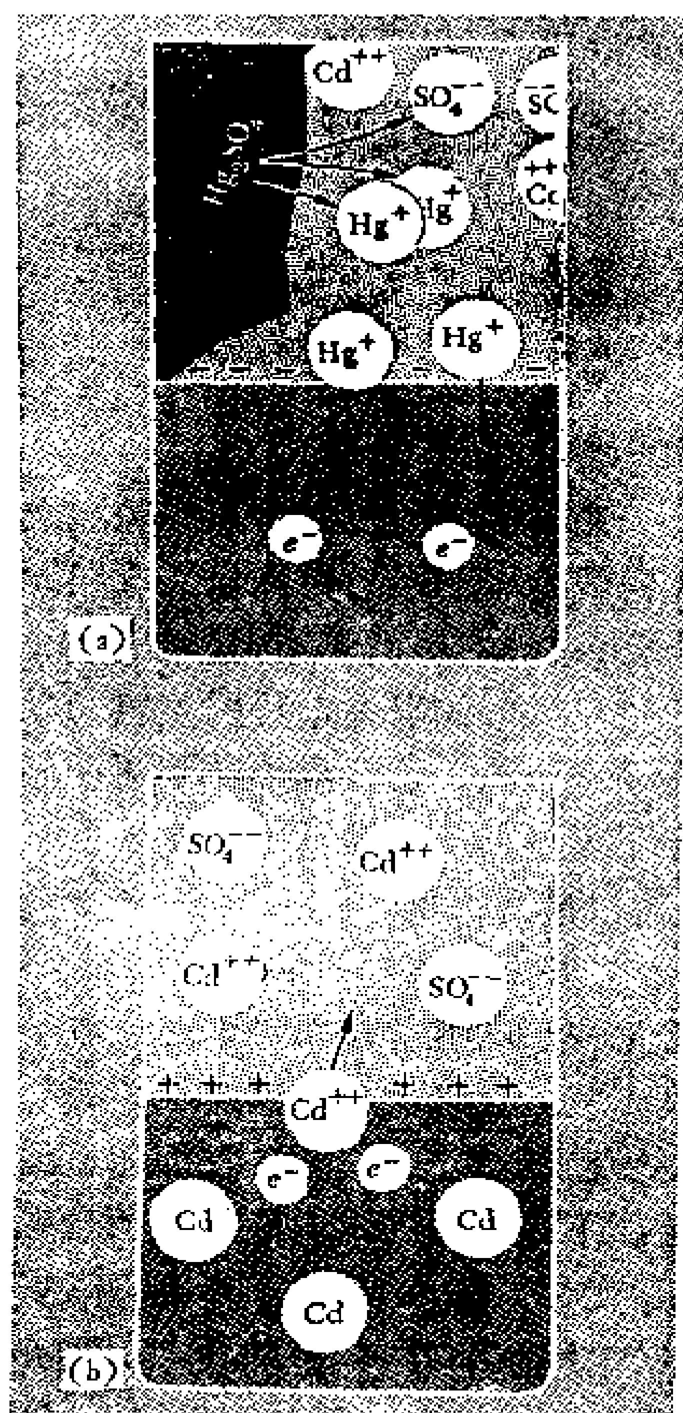


图 4.17　用图表示当韦斯顿电池和外部负载接通时 (a) 在正极接触面上和 (b)在负极接触面上进行着的过程．

要注意在每一电极与溶液的接触面上离子是逆着电场方向运动的．就是这些不大于几个埃厚的过渡层起着相当于范德格拉夫起电机中的带子的作用．

现在来研究全部系统上的电势变化，包括通电流的和不通电流的两种情形．图 4.18 的电路在某一点是断开的，把沿迴路的电势的变化画在垂直尺度上．当开路时，在两电极间的电势差是电池的电动势，记作$\mathscr{E}$．电场是电势的负梯度．和其他的静电场一样，沿

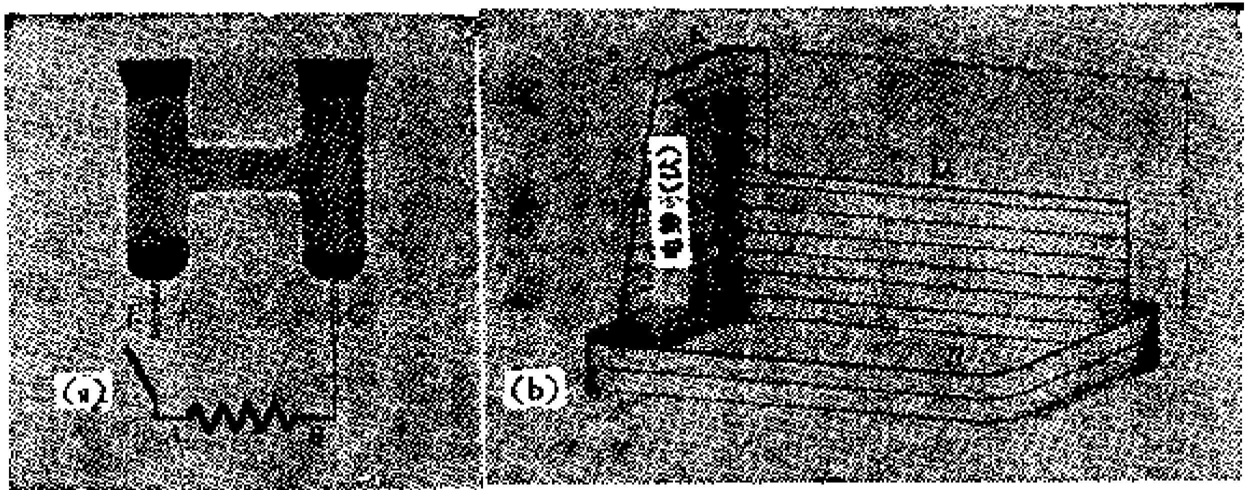


图 4.18 断路时的电势分布．把右侧电极的电势任意选作零电势．

闭合路程的 **E** 的线积分是零．（说明一下，电解液的电势的能级线是随意画出来的，无法直接测量.）

图 4.19 表示电流流过外电阻器时的电势分布．在电解液中有一和电流方向相同的电场．硫酸镉溶液的作用象是一个普通的欧姆电阻．由于内部电解液中的电势降，并且也可能由于过渡层的额外电阻，两极的电势差小于$\mathscr{E}$，沿全电路的电场的线积分仍是零．当通过电路中任一点的电荷达到Q库仑时则在外电路和内电路中消耗的能量是$\mathscr{E}Q$焦耳（$\mathscr{E}$以伏为单位)，它是以取用电池内的化学能为代价的．

在电池中，一系列的反应是可逆的．这就是说，如果把另一个更大的电动势源反向接在电路中，则电流将沿相反的方向流动，我们上述的过程将反过来进行．这就是蓄电池充电时所发生的过程．在普通“干电池”的情形，在放电时发生一些不可逆变化，使过程成为不可逆的．

电池的电动势取决于原子的性质．它的值约在 1 伏左右的范围内，因为原子外层电子的结合能约在几个电子伏的范围内，而主要是这些结合能的差表现为电动势．电动势和温度有些关系，它提醒我们，电化学的正确处理是一个热力学的

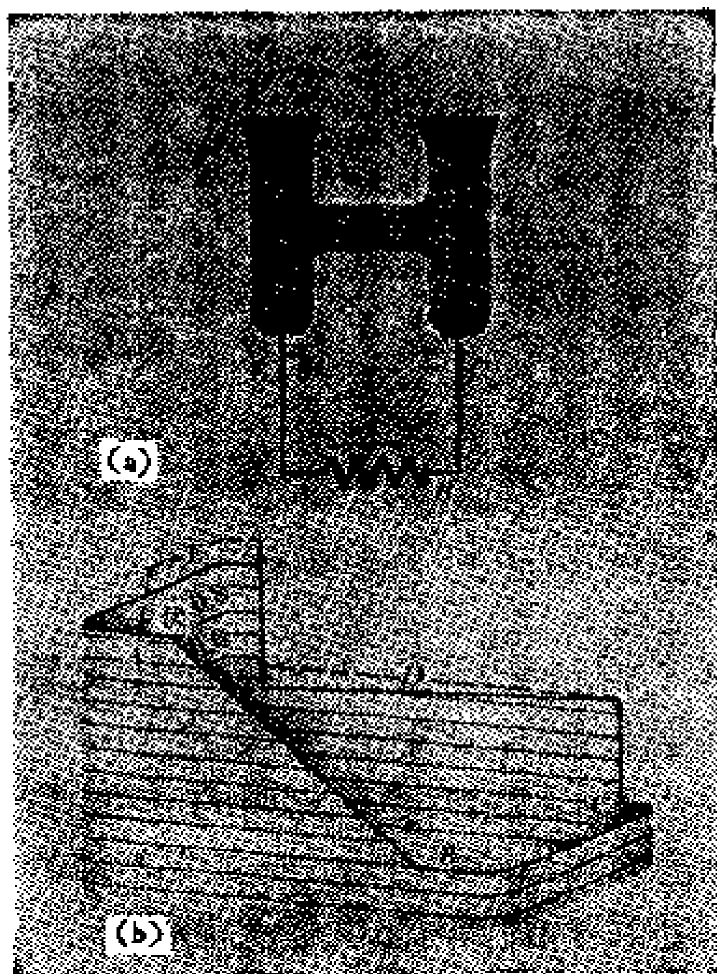


图 4.19　电流流过外部电阻时的电势分布．注意横穿过电解液的电势差．这种韦斯顿电池的用法并不是作标准用的．如要用作标准电池，流过的电流必须极小．

问题．它是物理化学中的一个中心问题．严格地说，所涉及到的不是能，而是所谓的“自由能”，我们在这里不能再深入研究这种热力学上的差别．

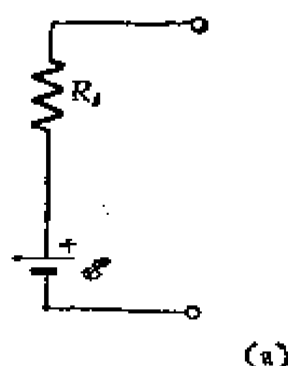
韦斯顿电池本身并不用来作电能的电源，而是用来作电势差的标准．如果像图 4.19 所画的情形，流过的电流是那样大，以致使端电压降低 10%，就是对这种电池的严重错误的使用法．韦斯顿电池的电动势是可以高精度地复制出来的．另一种相差不多的电池，在两极附近的饱和溶液中有过剩的硫酸镉，在 20℃ 的温度时电动势是 1.0183 伏．用韦斯顿电池作为标准电池，和一个适当的电位计合起来测量电压，精确

度可达到 100,000 分之一.

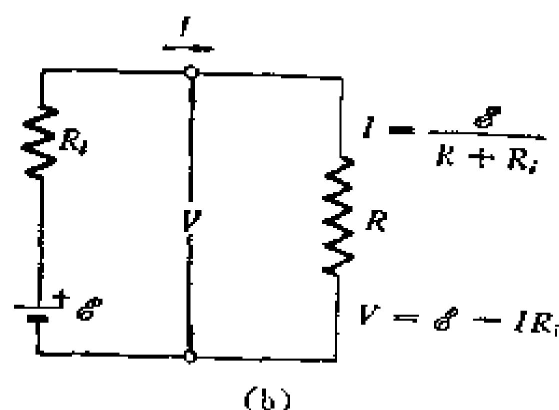
当涉及到一个电池对外电路的作用时，可用一包括电动势$\mathscr{E}$和内电阻 R_i 相串联的等效电路来表示. 和外电阻 R 相连接,得到电流

$$I=\frac{\mathscr{E}}{R+R_i},$$

如图 4.20 所示.



(a)



(b)

图 4.20 (a) 伏打电池的等效电路仅仅是电阻 R_i 和一定值电动势的简单串联电路. (b) 计算接有伏打电池的电路中的电流.

4.11 电容器及电阻器中的可变电流

把电容为 C 的电容器充电到电势 V_0,然后把它很快地接到电阻 R 的两端,使它放电. 图 4.21 表示一个电容器(用规定的符号-||-表示),一个电阻器 R 和一个电键组成的电路，我们假设闭合电键的时刻是 $t=0$. 显然,当电流流通时,电容器将逐渐失去电荷，电容器上的电压逐渐减小，随着电流也将逐渐减小. 只要把控制电路的条件写下来，我们便可确切地知道发生的过程是怎样的. 设 Q 是在任一时刻电容器上的电荷，V 是电容器两板之间的电势差，它也是电阻 R 两端的电压. 设 I 是电流，从电容器的正侧流出的电流视为正的. 这些量都是时间的函数,它们必有如下的关系

$$Q=CV,\quad I=\frac{V}{R},\quad -\frac{dQ}{dt}=I, \tag{28}$$

消去 I 及 V,便得到 Q 随时间变化的方程式

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{RC}. \qquad (29)$$

可以把它写作：

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{dt}{RC}. \qquad (30)$$

两边积分，便得

$$\ln Q = \frac{-t}{RC} + 常数. \qquad (31)$$

所以微分方程的解是

$$Q = (另一常数) \times e^{-t/RC}. \qquad (32)$$

设 $t=0$ 时，$V=V_0$，所以在 $t=0$ 时 $Q=CV_0$. 这可决定常数的值，我们现在得出闭合电键后 Q 的确切行为是

$$Q = CV_0 e^{-t/RC}, \qquad (33)$$

可直接从此得到电流 I 的行为：

$$I = -\frac{dQ}{dt} = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}. \qquad (34)$$

电键闭合时电流立刻上升到 V_0/R 的值，以后则按指数规律"衰减"到零. 表征此衰减的时间是常数 RC. 我们看到电阻和电容的乘积的量纲是时间，不应感到惊异，因为我们知道 C 的量纲是长度，而且我们已经强调过*电阻×长度*，当它以欧·厘米出现时，是电阻率的单位，具有时间的量纲. 人们常说电路或一部分电路的"RC 时间常数".

在实用单位系统中电容的单位是*法拉*. 电容为 1 法拉的电容器在 1 伏的电势差下带电 1 库仑. 当 R 以欧表示，C 以法拉表示时，RC 是用秒表示的时间. 我们可以这样来核对，欧 = 伏/安 = 伏·秒/库仑，而法拉 = 库仑/伏. 如果我们按图 4.21 用 0.05 微法的电容器和 5 兆欧电阻器组成电路，这二者是任何实验室中都可以找得到的适当的元件，我们应有

$RC = 5 \times 10^6 \times 0.05 \times 10^{-6}$ 即 0.25 秒.

一般说来，在由带电导体和电阻性电路所组成的任何电气系统中,系统中过程的一个时间尺度(或者不只此一个)是由电阻·电容的乘积来规定的. 这和我们以前对于电阻率的量纲的讨论有关系. 设想一电容器的平板面积为 A，间距为 s. 它的电容 C 是 $A/4\pi s$. 现在设想两平板之间的空间突然用电阻率为 ρ 的导电介质充满. 为了避免涉及这样做将会怎样影响电容的问题，我们假定介质是一稍许电离了的气体；具有这样密度的物质，几乎完全不改变电容. 这新的导电电路将和图 4.21 中的外电阻一样有效地使电容器放电. 这将发生多快?电路的电阻 R 是 $\rho s/A$. 所以时间常数 RC 是 $(\rho s/A)(A/4\pi s) = \rho/4\pi$. 这时间和电容器的相对尺寸及绝对大小都没关系. 这只是在导电介质中的电荷再分布过程或电场松弛过程的时间常数. 我们实际上完全不需要用电容器平板来描述这种情形. 如果我们把两片带有符号相反的电荷的平板放入导电介质中,电荷将很快消失，电场变为零，介质将恢复到恒定的电势. 弛豫时间决定于电阻率 ρ. 例如，如果我们的弱电离的气体的电阻率是 10^8 欧·厘米，则弛豫时间应约为 10 微秒.

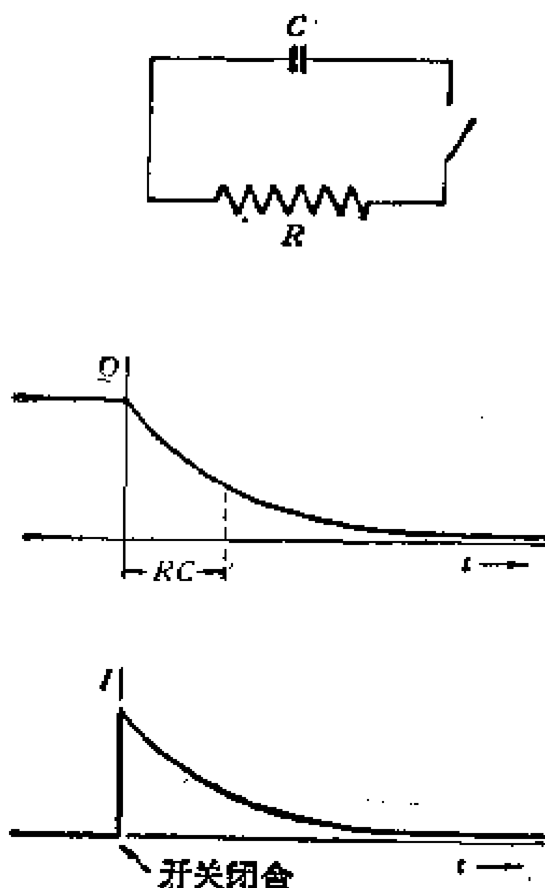


图 4.21　RC 电路中的电荷及电流. 在时间为 RC 时电荷衰减到 $1/e$ 倍.

我们记得象金属那样的良导体，电导率是10^{-5}欧·厘米的数量级，我们现在知道这意味着弛豫时间是10^{-18}秒的数量级．这样一个数值可能引起我们的怀疑．它真的能被解释为是使导体中集中的电荷消散所需的时间吗？首先我们注意到这时间比任何我们能从我们的电导率模型中所能推论出的碰撞时间或相关时间都短得多．由式（19）求得在室温下钠的$\tau_- = 3 \times 10^{-14}$秒．这警告我们对于这样短的时间尺度所表征的现象我们无论如何不能用直流电阻率ρ来解释．这使我们对于弛豫时间的任何数量估计都要予以怀疑．

我们有更深刻的理由来怀疑这种模型是不完整的．我们的电弛豫时间$T = \rho/4\pi$表现出和有关的区域的大小无关，这是奇怪的事情．如果区域足够小，这是成立的．但是对于任一有限的弛豫时间T来说，如果所涉及到的区域有一个线度大于T乘光速的话，那末弛豫就涉及到要求电荷重分布的进行速度远大于光速c．这和相对论原理是不相容的．因此我们已经看到，如果电荷和电场的行为要和狭义相对论的原理一致，那末我们的图象就必须加进另一些内容．这将是我们下一章的课题．

习　　题

4.1　每立方厘米有5×10^{10}个带双正电荷的离子，都以10^7厘米/秒的速率向西运动．在这同一区域内每立方厘米有10^{11}个电子以10^8厘米/秒的速率向东北运动．（不必问这是怎样办到的！）**J**的方向如何？以每平方厘米每秒的静电单位为单位，它的大小如何？以每平方厘米安为单位，它的大小又如何？解答：向南偏西 48.8°；5.54×10^9 静电单位/秒·厘米^2；1.85 安培/厘米^2．

［电流密度的练习］

4.2 电子在 6 京电子伏同步加速器中沿着 240 米长的近似圆形轨道上运动．在正常情形下在加速的一个循环中，约有 10^{11} 个电子在轨道上运动．电子速率几乎接近光速．电流是多大？这个简单习题着重指出在我们的电流定义中，把电流作为电荷的迁移速率，并没有要求载流子的速度是非相对论的，而且也没有规定不允许一带电质点在一秒钟内被多次计算上，作为电流的一部分．

[作圆运动的电子所形成的电流]

4.3 在范德格拉夫静电起电机里，一宽为 30 厘米的橡皮带以 20 米/秒速度运动．在下边的滚轴处给橡皮带表面电荷，橡皮带每一面上的面电荷密度足以产生 40 静伏/厘米的电场．电流是多少毫安？

[机械迁移电荷]

4.4 设想真空二极管有平行平面的阴极和阳极，如图 4.2．阴极和阳极之间的距离是 s 厘米，每极面积是 A 厘米^2，从阴极流向阳极的电流是 I 静电单位/秒．令阴极电势为零，阳极的电势保持 V_0 静伏的正电势．求出电子速度 v 与空间电子密度 ρ，表示为离阴极的距离 x 的函数．假定电流很小，因而电场并不受空间电荷的影响，并假定电子离开阴极时的速度是零．

[在真空二极管中的电子流]

4.5 如果我们认为在银那样的金属中，导电电子数等于原子数，1 毫米直径的银导线中流过的电流为 30 安时，导电电子的平均漂移速度是多大？给出近似的答案；估计出计算中所需要的那些在我们的常数表中找不到的常数．

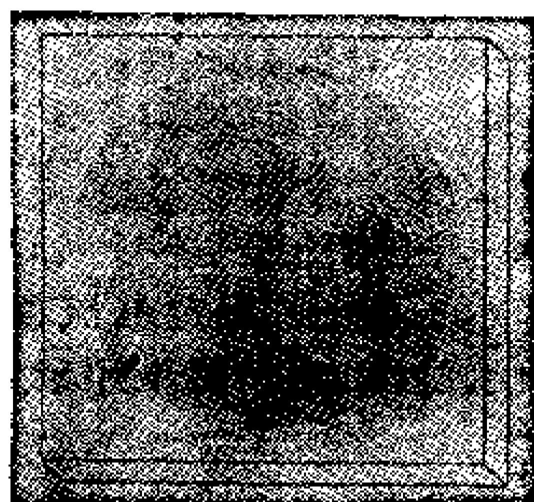
[在金属中导电电子的漂移速度]

4.6 一容器在室温及大气压下装满空气，以 X 射线照射，把容器内的分子电离了一小部分．负离子实际上是 O_2 的

分子附着上一个额外的电子. 在这个习题里，可以把所有的分子当作有相同的分子量，其值在 O_2 和 N_2 的分子量之间. 设容器的大小是 10 厘米×10 厘米×2 厘米，并假定 10 厘米 × 10 厘米的面是金属的，而其它的面是绝缘的. 1000 伏的电动势接在导电的端面上，产生 1.5×10^{-6} 安的电流. 这轻度电离气体的电导率是多少? 如果离子的平均速度取为 5×10^4 厘米/秒，平均自由程为 10^{-5} 厘米，平均碰撞时间是多少? 有万分之几的气体分子被电离了?（假设带单电荷的正，负离子的数目相等.）

[空气中的离子导电现象]

4.7 一实验人员要在清洁玻璃上用真空蒸发铝涂敷的方法涂制一层 50 埃厚的铝膜. 他第一次涂制时得到很厚的一层，并且在中间用一荫罩，使形成一空白带. 其后再用另一模板，涂一层和空白带同样宽的铝带于玻璃上. 横跨在空白带上，同时用这加厚了的接线片作为测量电阻用的端头. 在达到什么电阻值时他应停止蒸发?（在室温时纯铝的电阻率是 2.83×10^{-6} 欧·厘米.）



习题 4.7

[关于电阻率的简单问题]

4.8 在 20℃ 时纯铁的电阻率是 10.0×10^{-6} 欧·厘米. 在这温度下纯铜的电阻率是 1.77×10^{-6} 欧·厘米. 有二个不同的组合导体. 每个是 1 米长，正方形横截面，每边长 0.8 厘米. 导体 A 是由一根 50 厘米长方形铁棍和一根相同的铜棍做成，端对端连接起来. 导体 B 是由 1 米长的铜棒和铁棒做成，0.4×0.8 厘米的截面，边对边相夹起来，每一导体在相

距 1 米的两端间的电阻有多少欧？如果有一稳定电流通过导体 A，在那一物质中的能量耗散较大些？在导体 B 中又怎样？

[组合导体的电阻]

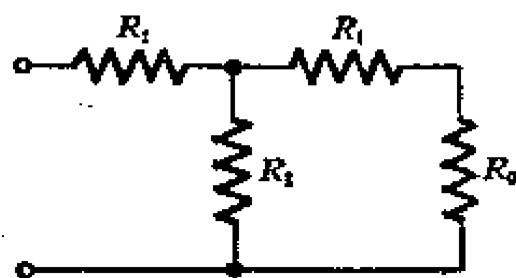
4.9 当你把一根铜线拉长 0.1% 的长度，你能估计出它的电阻将改变多少？你对于铜线的形变作了什么假定？

[讨论题]

4.10 两电极由直径为 1 英尺的金属球做成，用绝缘电缆把它们悬在深海中，沉入 200 英尺深度；水平距离 1000 英尺. 通过靠近海面的绝缘电缆，把它们接到在一个球的顶上的一支船上，成为一闭合电路. 海水的电导率取为 0.04(欧·厘米)$^{-1}$，试估计这电路中的电阻. 你首先要判断联接两球之间的海水电路是主要由于球的附近区域所形成的，还是两球之间的广大体积的海水所形成的. 为了搞清楚这问题，可以先考虑两个同心球之间的电阻，一球远大于另一球，其间充以均匀的介质. 你也可以简单画出在海中的两球间近似的电流线. 这个电路的电阻问题，其中一部分是由导电探极插入很难导电的介质中构成的，这问题不仅在地球物理学中很重要，而且在许多生理学的研究工作中也很重要.

[大导电介质中的电流]

4.11 图中的电路，如 R_0 是已知的，为使两端间的输入电阻恰等于 R_0，试求 R_1 的值.



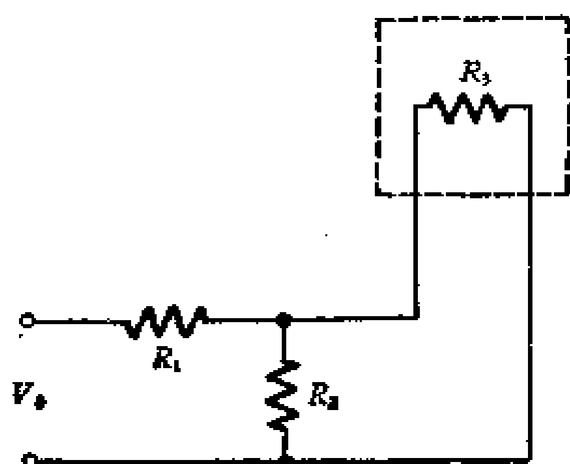
习题 4.11

4.12 一电池的电压为 V，内阻为零，当把一电阻 R 接上时，电流是 4 安. 当再串上一 10 欧电阻器时，电流降为 3 安. V 及 R 的值是多大？如电池有一内阻 R_i，你将怎样进行实验来求出 R，V 及 R_i 的值？

4.13 一电池的固定电动势是 $\mathscr{E}$，内阻是 R_i，把它接到

可变的外电阻器R上，试证明当 $R=R_i$ 时电池供给外电阻的功率最大。

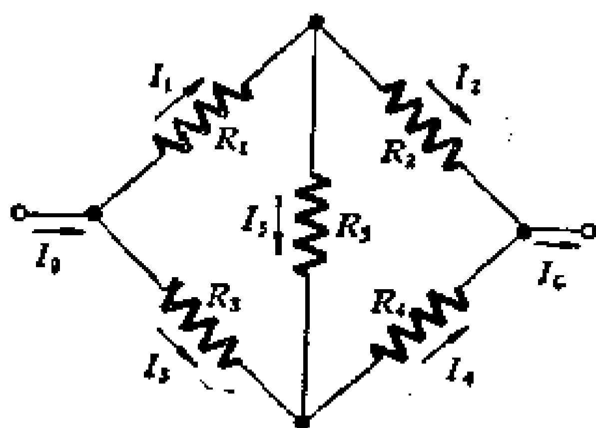
4.14 想把在高压筒内的仪器用极稳定的速率加热。在实验过程中压力会改变，从而会使加热用的电阻丝的电阻改变。图中所示电路是对于这种情形有很大助益的一个简单电路。R_3是装在压力筒中的加热线圈，R_1及R_2是在外部的固定电阻器，它们可以被认为能保持恒定的电阻值；V_0是施加的恒定电压。我们的目的是要使在R_3上耗散的功率在一次数量级的近似下和R_3的电阻值无关。下面可以证明这是可能的。当R_3趋近于零时，它的能量耗散也一定趋近于零，这是因为电流是被R_1限制着。反之，当R_3趋近于无限大时，它的耗散功率仍趋于零，这是因为跨在R_3上的电压是有限的。在这两者之间的某处一定有一最大值。这一问题是要求找出这一最大值，即找出R_1，R_2及R_3必须满足的条件，以达到所希望的对R_3的变化的不灵敏性。



习题 4.14

4.15 电桥电路中的电阻 $R_1, \cdots R_5$ 都是已知的，从左侧流入，从右侧流出的电流I_0也是已知的。要求解出所有各分路中的电流。在图中任意地注明了这些电流的方向。如果在一特殊情形中，在某一分路中电流的实际方向和箭头的方向相反，那末求得的结果将是负值。在四个结点处的电流，存在着象 $I_0-I_1-I_3=0$ 这样的方程。写出这些方程，并证明只有三个是独立的。应用第4.8节中条件(iii)于二个週路，可再多得到二个方程。（注意：可以看出只有二个是独立

的.)现在得到了五个未知数的五个独立方程．其余的工作只是代数运算．在求得解答以后，你可以令一个或几个 R 的值为零来校核你的答数，这样便把电桥化为简单的电路，其中各电流的分配是明显的．例如 $R_5=0$，你求得 I_1 的值是什么?



习题 4.15

4.16 作为第4.8节中第一个注的例子，设有一约 10 厘米的立方"暗箱"，有二接线柱，可用导线接到外电路上．箱和别的东西之间是很好绝缘的．约为 1 安的电流流过此箱．假设流入的电流和流出的电流相差百万分之一．如果不发生其他事件，在这样的情况下，使箱的电势升高 1000 伏需要多长时间?

(这习题说明了我们为什么总是可以假定从一部分电路中流出的电流和流入这部分电路的电流是相等的.)

4.17 我们回到书本中关于电容器 C 通过电阻器 R 放电的例子，证明电阻器 R 上耗散的能量等于原来存储在电容器 C 中的能量．如果有人反对这说法，认为电容器是永远不会真正地放完电的，因为只有在 $t=\infty$ 时，Q 才变为零．你将怎样回击这一反对意见? 你可以在某种合理的假定下得出当电荷减少到一个电子时所需时间.

[探索 RC 电路中的能量改变]

4.18 一小粒石墨，近似球形，直径约为 10 微米 (10^{-3}厘米)，在真空中落下穿过 3 千伏的质子束．小球原来在质子束上边的几个厘米处的表面上，被摇下来。水平运动的质子束形成 10 毫安的电流，均匀分布于 2 厘米半径的圆截面上．你

可以假定一个 3 千伏的质子不能穿过 10 微米的石墨粒子，所以任一击中石墨的质子都留在石墨里．你能预言石墨粒子将发生什么情况吗？这里有一些思考问题：粒子必须俘获多少个质子才能达到一定的电势足够排斥其他的质子？粗略地估计需要经过多长的时间？会比粒子下落穿过这质子束的时间还长吗？这粒子会得到明显的水平速度吗？它会变热吗？你是否这样设想，如果质子束作向上运动，而不是水平运动，在真空中它是否能支持住石墨粒子？（注意单位：在这问题里，以及大多数有关实用物理的问题里，人们会碰到给出的各种单位制混合在一起的数据．有的数据需要换算．任一一致的单位制都可以用，你可用一种自然适合于该问题的单位制，或用需要换算最少的单位制，或只用你所容易记住的一种单位．因为我们最近用了 CGS 单位制处理电容，相应的电荷用静电单位，电势用静伏，在这单位制中电容的单位是厘米，所以你可用 CGS 制来讨论这问题．这样便需要把毫安转换为静电单位/秒，并且记住 300 伏等于 1 静伏．同样你也可用实用单位制来表示作功的量，这就需要以法拉表示粒子的电容．

[联系到很多物理概念的习题]

4.19 我们可以认为载流子的速率有一最大的极限，以此速率导体上的电荷分布自己能重新调整．现在我们设想一根不带电的金属棒，在一端很快地放上 1 静电单位的正电荷，在另一端很快地放上 1 静电单位的负电荷．电荷实际须运动多远才能使这棒任何处再是中性的？或者考虑这样的情况：一个 10 兆电子伏的质子，你可以很容易算出它的速率约为 4.5×10^9 厘米/秒，它离铜板表面 1 毫米远，平行地运动．在铜中导电电子的速率很难超过 10^8厘米/秒．你认为在表面的感生电荷分布能“跟得上”这个质子的运动？或是要落在后边呢？

（讨论题）

第五章　运动电荷的场

5.1　从奥斯忒到爱因斯坦

在 1819—20 年的冬天奥斯忒（H. C. Oersted）在哥本哈根大学对高年级学生作关于电学、电流学（Galvanism）及磁学的讲学. 电学是指静电学；电流学是指从电池流出的连续电流的效应，这是由伽伐尼偶然发现的，其后又由伏打作实验开辟的新课题；磁学是讨论古代就有的关于磁石，指南针以及地球磁场的知识. 一些人认为很清楚在伽伐尼电流和电荷之间必然存在着一定的关系，虽然除了两者都能引起触电以外几乎没有其他直接证据. 另一方面，在磁与电之间也没看到有任何连系. 可是奥斯忒仍有一个想法，可能是含混的，但是他坚定地探索着，认为磁象伽伐尼电流一样，可能是电的一种“潜在形式”. 为了探索出在这方面的一些证明，他在课堂上作了这样的实验，使伽伐尼电流通过一导线，并把这导线横在指南针之上，和针垂直. 针没有受到影响. 在课后，什么念头迫使他再作一下试验，让导线和指南针平行. 指针偏转得很厉害. 当伽伐尼电流反向时，则指针向另一方向偏转！

这一发现立刻引起科学界的重视. 当这消息传到了其他实验室后，立即激励起大量的实验和发现. 不久安培，法拉弟及其他一些人作出了基本上完整的和正确的关于电流的磁效应的描述. 在奥斯忒实验后不到十二年法拉弟发现了著名的电磁感应现象. 在前两个世纪自从吉伯（W. Gilbert）在 1600 年发表了重要著作磁学（De Magnete）后，人们对于磁学的了解一直没有进展. 由于这些实验的发现才建立了电磁学的

完整的经典理论．麦克斯韦写出了电磁学经典理论的数学表达式，1888 年赫兹（Hertz）电磁波的演示实验成功地证明了经典电磁理论的正确性．

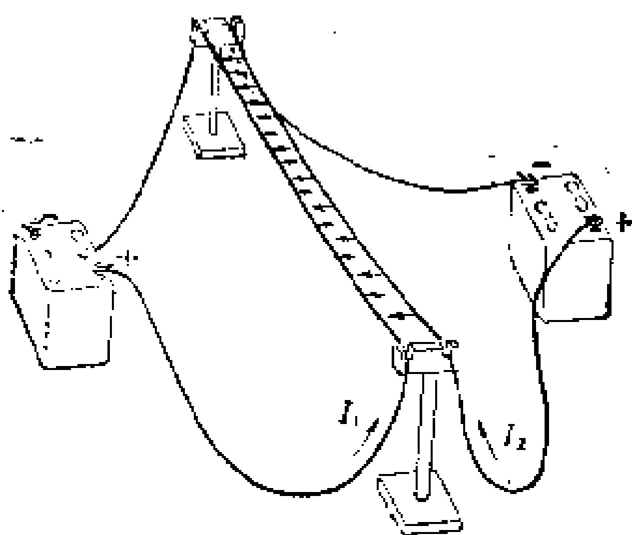
狭义相对论在电磁学上有它的历史根源．洛仑兹(Lorentz)研究了运动电荷的电动力学，已非常接近于爱因斯坦最后的系统阐述．爱因斯坦在 1905 年发表的伟大论文的题目不是命名为“相对论”，而是命名为“关于运动物体的电动力学”．今天我们看到在相对论的假设和它们推论中的广泛内容，它包含着所有的物理定律，而不只是电磁学中的定律．我们认为任何完整的物理理论都应该在相对论上是不变的．在所有的惯性参考系中都应该显示出同样的物理内容．恰好，在相对论的不变性的重要意义被承认以前很久，就已经有了一个相对论不变性的理论——麦克斯韦的电磁理论．假如没有电磁场的完整理论，狭义相对论的概念是否能发展起来，这是科学史工作者需要推测的问题；或许是回答不出来的．我们只能说，真实的历史相当清楚地表明了从奥斯忒的指南针到爱因斯坦的假设所经历的发展途径．

在这一章和第六章里我们沿着几乎是相反的过程进行．这并不意味着我们不重视这些历史过程．我们认为对于这些重大发现的历史过程感兴趣的学生不会由于对电与磁之间的本质关系有清楚的概念而受坏的影响．借助于狭义相对论，从我们已经学过的关于电荷和电场的知识，这种关系就可以很直接地简单地表示出来．让我们进行这工作之前，回顾一下我们将要解释的某些现象．

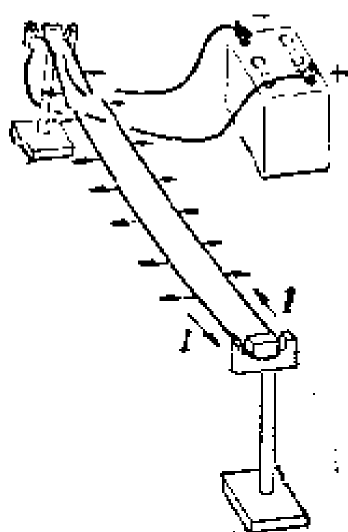
5.2 磁　　力

两根载着同方向电流的平行导线彼此吸引，可以证明作用在一根导线的每单位长度上的力和这两根导线上的电流的

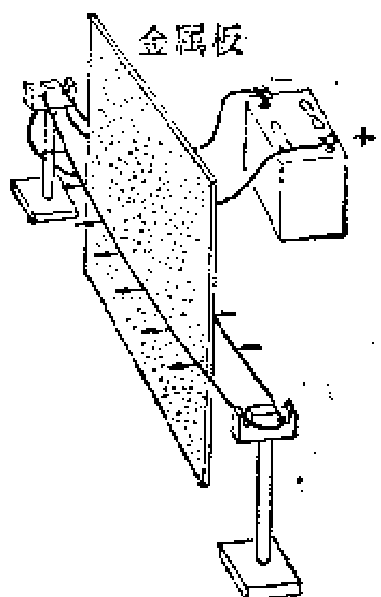
乘积成正比，和两导线之间的距离成反比 [图 5.1 (a)]. 使一根导线中的电流反向，则两导线之间的力变为排斥力. 图 5.1 (b)的两段导线是同一电路中的一部分，它们有分开的趋势.



(a) 载有同方向电流的两导线相互吸引.



(b) 载有反方向电流的两导线相互排斥.



(c) 把金属板置于两导线之间，作用力不受影响.

图 5.1

这是载有稳定电流的两个线段之间的一种"在一定距离下的作用". 这似乎和导线表面的静电荷无关. 可能有些这样的电荷，而且两根导线可能处于不同的电势，但是我们所涉及到的

力只决定于导线中的电荷运动，即决定于两个电流．把一块金属板置于两导线之间，它不影响它们之间的作用力［图 5.1(c)］．电荷运动时所引起的这种新力称为**磁力**．

奥斯忒的指南针［图 5.2(a)］看起来和直流电路很不相象．但是现在我们知道，被磁化了的铁充满着永久运动着的电荷——原子尺度上的电流，安培是第一个这样设想的人．一个由电池供给电流的细长线圈［图 5.2(b)］和指南针一样地受附近电流的作用．

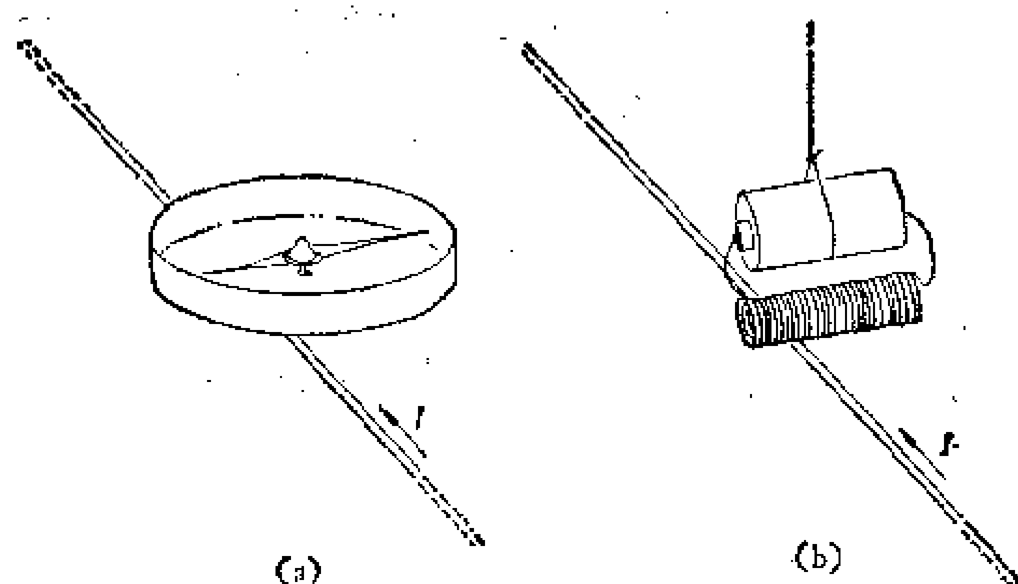


图 5.2　指南针(a)和载电流的线圈(b)同样地被附近导体中的电流所影响．

我们观察带电的自由粒子的运动以代替载流的导线，发现有相同的情形发生．在阴极射线管中，电子本来是沿直线运动的，它们被外部载有电流的导线所吸近或排斥，这决定于导线中电流的相对方向(图 5.3)．我们在实验室中已经熟悉这种现象了，并且知道电流和其它运动电荷之间的相互作用可以用**磁场**的概念来描述．(要记住电场只是描述库仑定律中所表明的两个静止电荷"在一定距离下的作用"的一种方法．)我们说每一电流都伴随着一个磁场，充满周围的空间．在这

磁场中的其他电流或任何运动的带电粒子，受到一个和此区域磁场强度成正比的力.对于一个带电粒子来说,力的方向总是垂直于粒子的速度的.

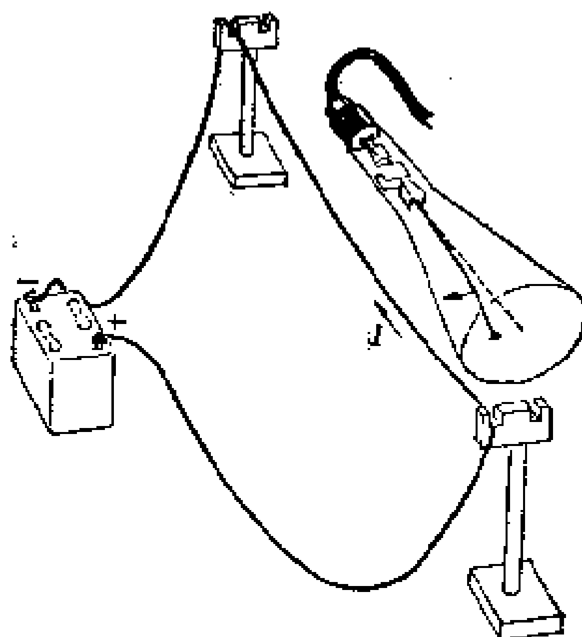


图 5.3 电流方向相同时吸引的例子。和图 5.1(a) 比较．我们也可以把它看作是电子束为磁场所偏转．

一个带有电荷 q 的粒子所受到的总力是

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \tag{1}$$

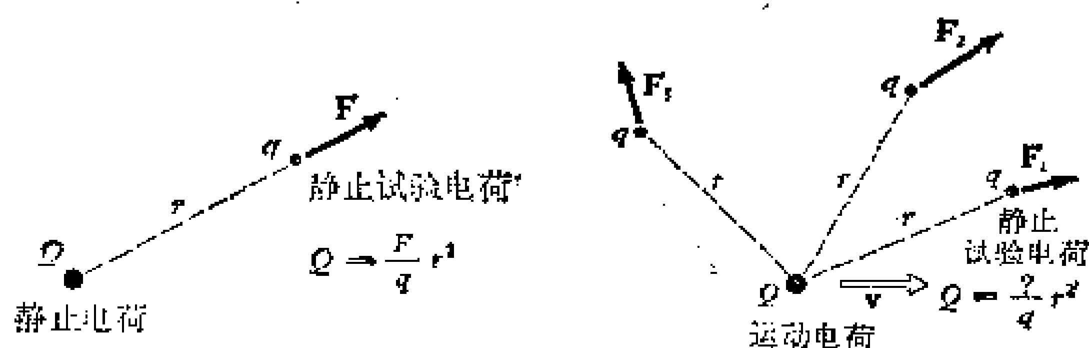
这里 $\mathbf{B}$ 是磁场.

我们把式 (1) 看作是 $\mathbf{B}$ 的定义．磁场强度是一矢量，它决定作用在一运动电荷上的与速度成正比的那一部分的力．换句话说,要"测量在某某处的矢量 $\mathbf{B}$ 的方向和大小"就要求作以下的工作：取一带有已知电荷 q 的粒子．测量 q 在静止时受到的力,以决定 $\mathbf{E}$．然后测量它以速度 $\mathbf{v}$ 运动时所受的力；用其他方向的 $\mathbf{v}$,再重复测量．求出一个合适的 $\mathbf{B}$ 值，使方程(1)与上述全部结果相吻合;这就是我们所要求的某处的磁场.

显然这没有说明任何问题．为什么式(1)是有效的？为什么我们总能找到这样一个 $\mathbf{B}$，对所有可能的速度来说它都和这简单的关系式相适应？我们想知道为什有一个和速度成正比的力．真真最值得注意的是这力很严格地和 $\mathbf{v}$ 成正比，而电场的作用则完全和 $\mathbf{v}$ 无关！下面我们将看到这是怎样发生的.

5.3 运动电荷的测量

我们怎样来测量运动粒子上电荷的电量呢？在解决这问题之前，问运动对电荷本身有什么影响，是没有意义的．一个电荷只能通过它所产生的效应来测量．一个静止的点电荷 Q 可以通过确定作用在一定距离处的试验电荷 q 上的力来测量[图 5.4(a)]．这是以库仑定律为根据的．但是如果我们要测



(a) 由作用在试验电荷上的力及库仑定律确定静止电荷上的电量．

(b) 在运动电荷的情形下，据现在我们所知，力可能与试验电荷的位置有关．如果这样的话，我们不能用方法(a)．



(c) 在 Q 通过试验电荷球形列阵中心的时刻，测定对每一试验电荷的作用力分量，用 $\mathbf{F}_r$ 的平均值决定 Q 的值．这就相当于测定 $\mathbf{E}$ 的面积分．

图 5.4

量的电荷正在运动，那就靠不住了．现在在空间有一个特殊的方向，这就是运动的瞬时方向．作用在试验电荷 q 上的力

可能和从 Q 到 q 的方向以及两电荷之间的距离有关. 如图 5.4 (b)所示,对于在不同位置的试验电荷,我们观测到不同的力. 把这些力代进库仑定律,则对同一电量 Q 得出不同的值. 而且我们现在还不能保证力总是沿矢量半径 $\mathbf{r}$ 方向的.

考虑到这种可能性, 让我们同意用所有各方向上的平均值来确定 Q. 设想有许多无穷小的试验电荷均匀地分布于一个球上[图 5.4(c)]. 在运动电荷通过球心时测量作用在每一试验电荷上的力, 用所有力的平均值计算 Q. 这恰好是计算在时刻 t 在此球面上各点电场的面积分所需的运算. 要记住这里的试验电荷都是静止的;作用在 q 上的每单位电荷的力, 按定义, 是在这一点的电场. 这就提示我们是高斯定律, 而不是库仑定律,能提供一个自然的方法[1]来确定一个运动的带电粒子的电量, 或一组运动电荷的电量. 我们能制订出如下的定义.

在一区域里电荷的电量由包围这区域的表面 S 上的电场 $\mathbf{E}$ 的面积分确定. 这个表面 S 固定于某一坐标系 F 中. F 中的任一点 (x, y, z) 在某一时刻 t 的电场 $\mathbf{E}$ 通过在这时刻、这地点作用于在 F 中静止的试验电荷上的力来测量. 这面积分是在一特定的时刻 t 确定的. 就是说, 所用的场强的数值是由布置在整个 S 上的很多观测者同时测得的数值. (这没有困难, 因为 S 是固定在参考系 F 中的.) 把在时刻 t 对 S 的这一面积分写作

$$\int_{S(t)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}. \tag{2}$$

我们确定在 S 中电荷的总量是 $1/4\pi$ 乘这积分

---

1) 这不是仅有的可能方法. 例如, 你可以采取一任意规定, 试验电荷必须永远置于被测电荷之前(在运动方向上). 这样确定的电荷将不具有我们要讨论的简单性质, 并可以证明你的理论是拙笨的, 而且是复杂的.

$$Q = \frac{1}{4\pi}\int_{S(t)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}. \tag{3}$$

如果这样确定的Q的值随面S的大小及形状而不同，那就麻烦了．对于静止电荷来说，不会是这样的——这是高斯定律．但是我们怎么知道对运动电荷高斯定律也是正确的呢？幸好，高斯定律也成立．可以认为这是一实验事实．运动电荷所产生电场的基本性质，使我们能够用式(3)确定运动电荷的电量．从现在起我们可以讲在某一区域内或一个粒子上的电量，即使电荷正在运动，这也有完全确定的意义．

图 5.5 用一个示例，总结了这些概念．在某一特定时刻，

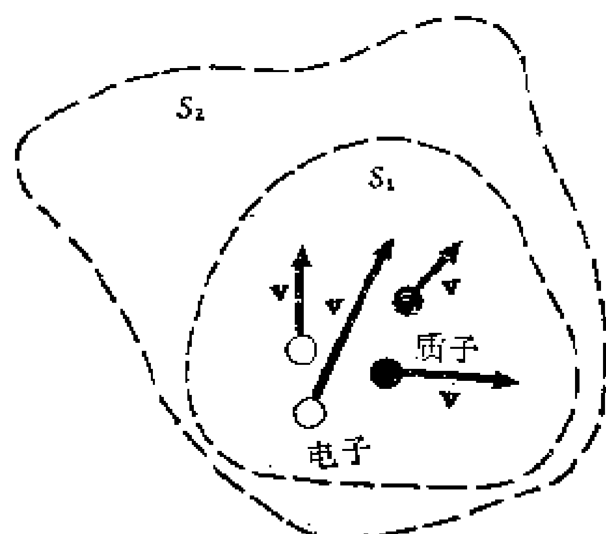


图 5.5　高斯定律也适用于运动电荷的电场．通过 S_2 的 $\mathbf{E}$ 的通量等于在同一时刻通过 S_1 的 $\mathbf{E}$ 的通量．

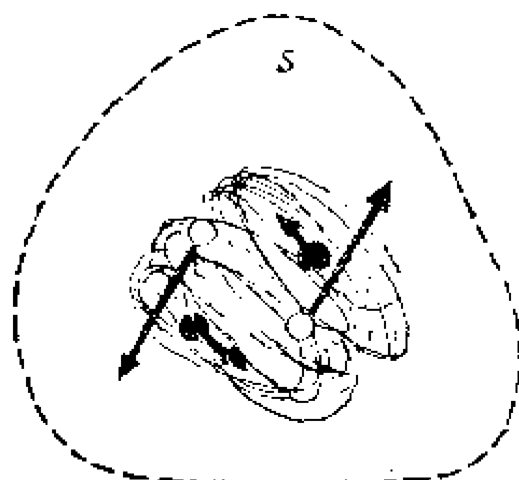


图 5.6　通过 S 的 $\mathbf{E}$ 的通量和这些带电粒子的运动状态有关吗？在 S 上的 $\mathbf{E}$ 的面积分和图 5.5 的相同吗？这里的粒子结合成为一个氢分子．

图中的两个质子和两个电子正在运动着．在面 S_1 上电场 $\mathbf{E}$ 的面积分的值完全等于在同一时刻在面 S_2 上的面积分的值．这是事实．并且我们可以像在静电学中那样用高斯定律，从这个积分值来确定被包围着的总电量．图 5.6 提出了一个新问题．如果这些粒子有其他的速度将会怎样？例如，假定这两

个质子和两个电子结合起来组成一个氢分子，它的总电荷将和以前完全相同吗？

5.4 电荷的不变性

有明确的实验证明，一个系统中的总电量不因带电体的运动而改变．我们是如此习惯于认为这是理所当然的，以致于我们很少停下来想一想这是多么值得注意，多么基本的事实．为了证明，我们可以指出原子和分子是精确电中性的这一事实．我们已经在第一章中叙述了关于氢分子的电中性的实验，证明了电子和质子所带的电荷在数量上相等的程度高于10^{20}分之一．用氦原子作了类似的实验．在氦原子中有两个质子和两个电子，就是这些同样的带电粒子组成了一个氢分子．在氦原子中它们的运动是很不相同的．特别是其中的两个质子，不是相距 0.7 埃缓慢地转动着，而是紧密地结合在原子核中，以兆电子伏范围的动能运动着．如果运动对电量有任何影响，那末我们就不能既在氢分子中又在氦原子中看到，原子核的电荷和电子的电荷都恰好抵消．事实上，氦原子也以几乎相同的实验精确度被证明是电中性的．

另一方面的证据来自同一元素的同位素光谱，这些原子有不同的原子核质量，但具有相同的原子核电量，至少名义上应该如此．这里我们再次看到原子核中质子的运动有显著不同；但是把两种同位素的光谱线相比较，表明没有由于原子核总电量的甚至是极微小的差别而引起的任何差异．

质量不是这样的不变量．我们知道，一个粒子的质量随着运动按因子 $1/(1-v^2/c^2)^{1/2}$ 改变着．为了强调它们的差别，我们在图 5.7 中画出一个假想的实验装置．在右边的箱中两个大质量的带电粒子，固定于被枢轴支起的杆的两端，并以速率 v 转动．称挂在弹簧秤上箱子的重量或测量使它产生

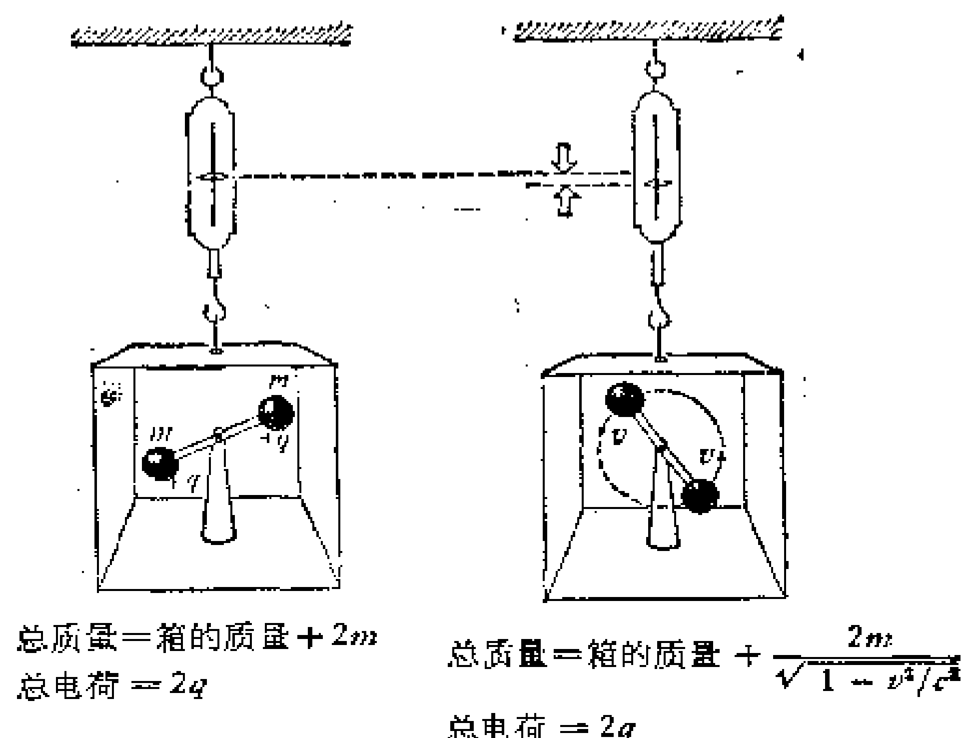


图 5.7　表示电荷不变性的一个假想的实验．箱内的电量是通过测量箱周围的电场来决定的，或等效地，通过测量作用在一定距离处的试验电荷上的力来决定的．

加速度所需的力[1]，就可以表明右边的总质量比左边的总质量大．但是总电量是不改变的．我们可以用质谱仪作出与这相当的真实实验，它能清楚地显示出一电离了的氘分子（2 个质子，2 个中子，1 个电子）和一个电离了的氦原子（也是 2 个质子，2 个中子，1 个电子）的质量差．这是两种很不相同的结构，两个结构中粒子的运动速率是显著不同的．其能量差以可测量的质量差显现出来．但是即使以极高的精确度也测不出这两个离子的电量差来．

这种电荷不变性给予电荷量子化的事实以特殊的意义．我们在第一章中曾着重指出过每一基本带电粒子的电荷都和

1）质量差不单和粒子的动能有关，也和势能的改变有关，如支持粒子的杆中的弹性应变所引起的势能改变．但如杆是很刚硬的，这种影响和 v^2/c^2 相比是很小的．你能说明这是为什么吗？

每一其他这种粒子的电荷相等，这样一个事实非常重要而且也很难思议．我们现在看到不仅两个彼此相对静止的粒子保持这种精确的相等，而且在有任何相对运动的状态下，两个粒子的电荷也保持精确的相等．

我们叙述过的实验，和很多其他的实验，表明高斯定律的面积分 $\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$ 的值只和在 S 中的带电粒子的数目和种类有关，而和它们怎样运动无关．按照相对论的假设，这一陈述，如对某一惯性参考系是正确的，则对任何惯性参考系都必定是正确的．所以，如果 F' 是相对于 F 惯性参考系运动的某另一惯性参考系，如果 S' 是在那个参考系中的闭合面，它在时刻 t' 包围着在时刻 t 被闭合面 S 包围着相同的带电体，则我们必有

$$\int_{S(t)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_{S'(t')} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{a}'. \tag{4}$$

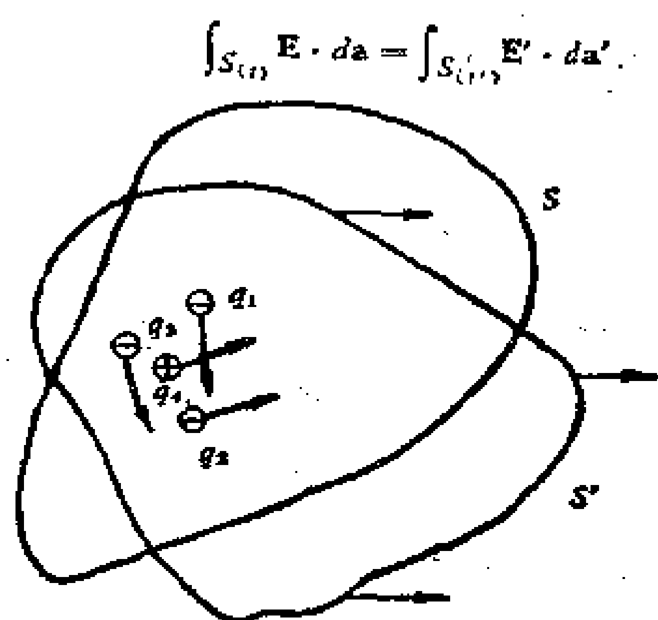


图 5.8　在 S 上 E 的面积分等于在 S' 上 E' 的面积分．电荷的电量在所有的参考系中都是相同的．

场强 $\mathbf{E}'$ 当然是在 F' 中测量的，也就是由作用在静止于 F' 中的试验电荷的力所确定的．必须注意 t 与 t' 之间的差别．我们知道，在 F 中是同时的事件在 F' 中不一定是同时的．在式 (4) 中的每一面积分是在它自己的参考系某一时刻计算的．如果一电荷处于 S 的，或 S' 的边界上，我们必须要小心地判定在时刻 t 处于 S 中的电荷和在时刻 t' 处于 S' 中

的电荷确实相同. 如果电荷离边界较远，就没有这样的问题了，如图 5.8 所示[此图是为了表明式(4)的关系而画的].

式(4)是电荷的相对论不变性的正式表述. 我们可以在任何惯性参考系中选定我们的高斯面；其面积分给出的数值与参考系无关. 这和第四章中所讨论的电荷守恒不同，后者的数学表达式是

$$\operatorname{div}\mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

电荷守恒的意义是，如果在某参考系中固定着的一个闭合面中包含一些带电物质，而且如果没有带电粒子越过边界，那末在这面内的总电荷保持不变. 电荷不变性的意义是，如果我们从任何其他参考系观测这些带电物质，我们将观测到完全相等的电量. 能量是守恒的，但能量并不是相对论的不变量. 电荷是守恒的，而且电荷是相对论的不变量. 用相对论的语言来说，对于洛仑兹变换，能量是四维矢量的一个分量，而电荷是一个标量，是一个不变量的数. 这是一个具有非常深刻意义的观察到的事实. 它完全决定了运动电荷场的性质.

5.5 在不同参考系中测量的电场

如果要求电荷在洛仑兹变换下是不变量，则电场 **E** 必须以特殊方式变换. "变换 **E**"就意味着回答这样的问题：如果在某一惯性系 F 中的观测者测出在某一给定的空间、时间点上的电场强度 **E** 是若干静伏/厘米，要问在另一惯性系 F' 中的观测者测量同一空间、时间点上的场强值将是多大? 对于某种类型的场来说，我们可以把高斯定律应用到一些简单的系统上来回答这问题.

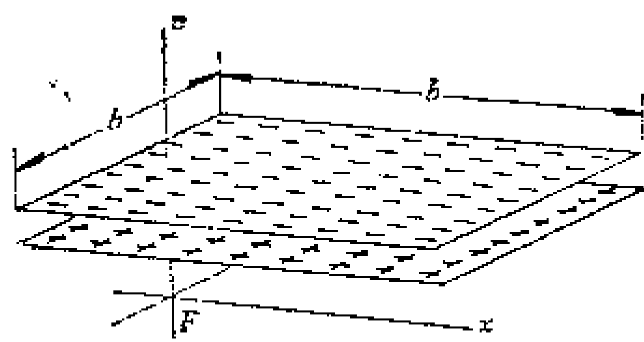
在参考系 F 中 [图 5.9(a)]，有二片静止的密度均匀的电荷层，密度分别为 $+\sigma$ 及 $-\sigma$ 静电单位/厘米². 它们是每边为

b 厘米的正方形，平行于 xy 面，它们之间的距离和它们的面积相比是如此之小，以致它们之间的电场可以看作是均匀的．在 F 系中的观测者所测量的场强值当然是 $4\pi\sigma$． 现在我们考虑另一参考系 F' 相对于 F 以速度 $\mathbf{v}$ 向右运动．对于在 F' 中的观测者来说，这两带电的"正方形"不再是正方形了． 它们的 x' 边的长度由 b 缩短到 $b\sqrt{1-\beta^2}$，这里的 β 和通常一样，就是 v/c． 但是总电荷是不变量，这就是说，和参考系无关，所以在 F' 中测得的电荷密度比 σ 大，为 σ 的 $1/\sqrt{1-\beta^2}$ 倍．图 5.9 表示这系统的横截面，(b) 是在 F 中看到的情况，(c)是在 F' 中看到的情况．如果我们所知道的有关运动电荷的电场的全部知识都已包含在式(4)中，那末对于 F' 中的电场，我们能说些什么呢？

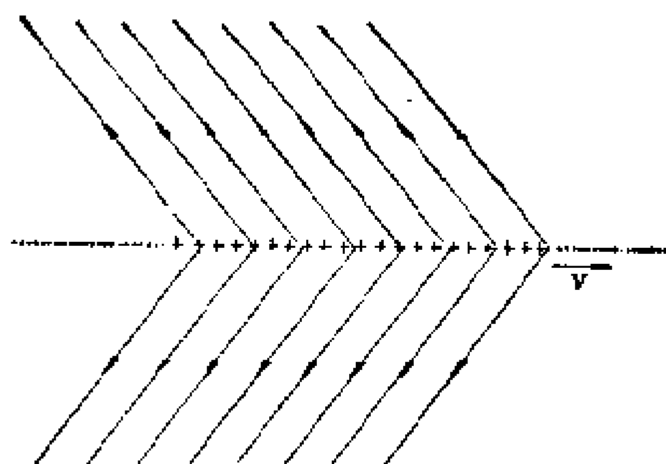
举个例子来说，我们可以相信在两片之外的电场是零，而在两片之间的电场是均匀的，至少当带电片扩展趋于无穷大的极限情况时是如此的．无穷大均匀带电片的场和离板的距离无关，并和片上的位置无关．（在这系统中不需要定出距离尺度和位置；如果这电场和点电荷和线电荷的电场一样是按照幂定律变化的，那末在带电片上的电场将是无限大的．）但是据我们现在所知[1]，一运动着的带正电荷的片层的电场可能是象图 5.9(d) 那样．如果是这样的话，一运动着的带负电荷的片层的电场就应象图 5.9(e) 那样，两个场叠加仍然会得出象图 5.9(f)所表示的那样性质的场．

我们将高斯定律应用于固定在参考系 F' 中的匣子上，匣子的横截面示于图 5.9(f) 中．匣中的电荷由 σ' 决定，带电层以外的电场是零．根据高斯定律可知 E'_z 的大小必定是 $4\pi\sigma'$，

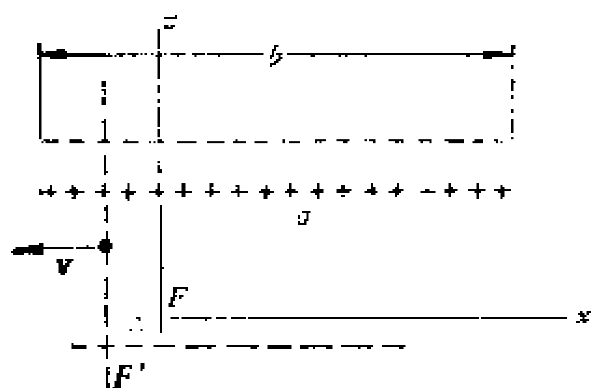
1) 要注意这是在 F' 中的运动电荷层．我们还不能保证它的场和固定的电荷层的场一样．事实上，像其结果所表明的那样，一运动电荷层的场是垂直于电荷层的平面的，不象图 5.9(d) 及 (e) 中想像的场那样．



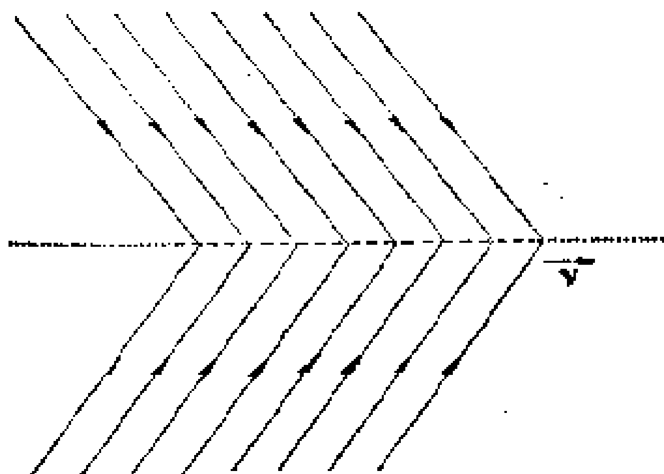
(a) 两片静止的密度均匀的电荷层.



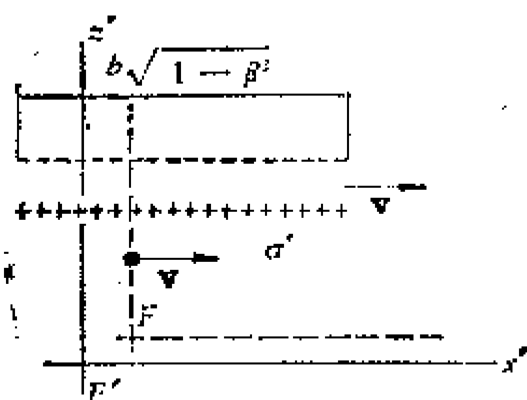
(d) 一片运动着的带正电的电荷层的电场的假想形象.



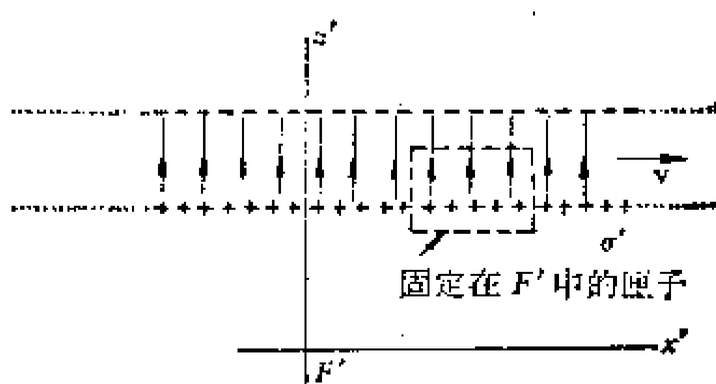
(b) 在参考系 F 中所看到的这个系统的横截面.



(e) 一片运动着的带负电的电荷层的电场的假想形象.



(c) 在参考系 F' 中所看到的这个系统的横截面.



(f) (d) 和 (e) 中的场的叠加.

图 5.9 在另一参考系(相对速度垂直于场的方向)中电场形象如何.

也就是 $4\pi\sigma/\sqrt{1-\beta^2}$. 它是两片层内的唯一的电场分量，

$$E'_z = \frac{E_z}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma E_z. \tag{5}$$

(在第一卷，第十一章中式(13)中已介绍过，通常把因子 $1/\sqrt{1-\beta^2}$ 记作 γ，这可以省略许多字.要记住，总是 $\gamma\geq 1$.)

现在设想另一种情形，固定于 F 参考系的两电荷层，垂直于 x 轴，如图 5.10 所示. 在 F 中的观测者测出的 x 方向上的场强是 $E_x = 4\pi\sigma$. 在这情形，在 F' 中观测的面电荷密度和在 F 中观测的相同. 二个片层不收缩；只是它们之间的距离

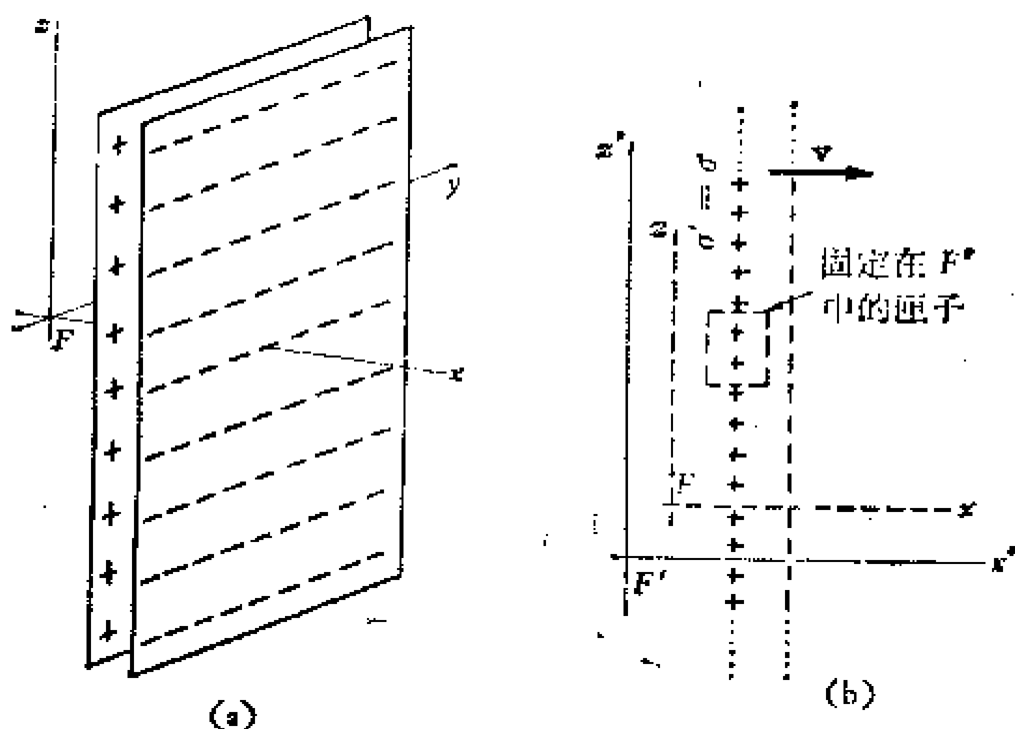


图 5.10 在另一参考系中的电场(相对运动平行于场的方向).
(a)在参考系 F 中；(b)在参考系 F' 中横截面的图象.

收缩了，但这与场强无关. 这次，我们把高斯定律用到固定于F'中的匣子上，得到

$$E'_x = 4\pi\sigma' = 4\pi\sigma = E_x. \tag{6}$$

对于这里所描绘的特别简单的电荷系统来说，以上讨论

是很充分的了：我们的结论是否更普遍地有效？这问题把我们引导到场意义的核心上去．如果在某一时-空点的场 $\mathbf{E}$ 具有唯一的意义，则在另一参考系中在同一时-空邻域内，$\mathbf{E}$ 显现出来的状态不取决于产生 $\mathbf{E}$ 的源的性质，不管这源在那里．换句话说，在 F 中的观测者，若已经测出了在他附近的某一时刻的场，就应该能够只从这些测量结果就能预言出在其他参考系中的观测者在同一时-空点所应测出的结果．如果不是这样，那末场就是一个无用的概念了．我们的论断是正确的，其证据是，我们的场的理论和实验结果最终是相一致．

由此可见，方程(5)及(6)表明的关系所具有的意义超出了平行电荷层这一特殊情形．现在我们来讨论任一电荷分布，它的所有部份相对于 F 系都是静止的．如果在 F 系中的观察者测量 z 方向的电场为 E_z，则在 F' 系中的观察者在同一的时间-空间点上测出的电场是 $E'_z=\gamma E_z$．这就是说，他测量出的 E'_z 的数值为在 F 中的观测者测量出的 E_z 的数值的 γ 倍．从另一方面来说，如果在 F 系中的观测者测量 x 方向的电场 E_x，这方向是 F' 相对于 F 的运动速度的方向，则在 F' 中的观测者测量的电场 E'_x 等于 E_x．显然，y 方向和 z 方向是等效的，二者都垂直于速度 $\mathbf{v}$．我们对于 E'_z 所得的一切结果也都适用于 E'_y．在参考系 F 中不管 $\mathbf{E}$ 的方向如何，都可以把它看作是 x，y 和 z 方向上的电场的叠加来处理，并且通过对每一分量的变换可以算出在 F' 中这一点的矢量场 $\mathbf{E}'$．让我们把以上的讨论总结为几句话，使之适用于任一方向的相对运动：在参考系 F 中的静止电荷是场 $\mathbf{E}$ 的源．设参考系 F' 相对于 F 以速度 $\mathbf{v}$ 运动．在 F 中的任一点，把场 $\mathbf{E}$ 分解为平行于 $\mathbf{v}$ 的"纵向"分量 $E_{/\!/}$，和垂直于 $\mathbf{v}$ 的"横向"分量 $E_\perp$．在 F' 中的同一时-空点上，场 $\mathbf{E}'$ 可分解为 $E'_{/\!/}$ 及 $E'_\perp$，$E'_{/\!/}$ 平行于 $\mathbf{v}$，$E'_\perp$ 垂直于 $\mathbf{v}$．我们已经学过，

$$\boxed{\begin{aligned} E'_{\parallel} &= E_{\parallel}, \\ E'_{\perp} &= \gamma E_{\perp}. \end{aligned}} \tag{7}$$

我们的结果只对固定于 F 中的电荷所产生的场是正确的. 就象我们即将看到的,如果在 F 中的电荷是运动着的,那末要预言在 F' 中的场,将涉及到对 F 中的两个场,即对电场和磁场的理解. 但是我们已经有了一个很有用的结果,只要我们能够找到任何一个惯性参考系,在此参考系中所有电荷都是静止的,这个结果是足够的了. 我们现在就要用它研究一个以恒速运动的点电荷的电场.

5.6 以恒速运动的点电荷的场

点电荷 Q 静止在参考系 F 的原点上[图 5.11(a)]. 各点的电场 $\mathbf{E}$ 的大小是 Q/r^2, 它的方向是径向的. 在 xz 平面中的任一点 (x, z), 它的分量是

$$E_x = \frac{Q}{r^2}\cos\theta = \frac{Qx}{(x^2+z^2)^{3/2}},$$

$$E_z = \frac{Q}{r^2}\sin\theta = \frac{Qz}{(x^2+z^2)^{3/2}}. \tag{8}$$

设参考系 F' 以速率 v 向 x 的负方向运动. 在两个参考系中一个事件,或一个时-空点的坐标之间的关系是

$$x = \gamma(x' - \beta ct'),\ y = y',\ z = z',\ t = \gamma\left(t' - \frac{\beta x'}{c}\right). \tag{9}$$

这就是第一卷,第十一章,式(15)中给出的洛仑兹变换. 上式中的负号表示从参考系 F 来看,参考系 F' 沿着 x 的负方向运动. 当 $x = 0$, $x' = 0$ 重合时使时钟的读数为零.

根据式(5)及式(6), $E'_z = \gamma E_z$, $E'_x = E_x$. 应用式(8)及式(9), 把场分量 E'_x 及 E'_z 用 F' 中的坐标表示出来. 当 Q 经

过F'的原点时，$t'=0$，我们有

$$E'_x = E_x = \frac{\gamma Q x'}{[(\gamma x')^2 + z'^2]^{3/2}},$$

$$E'_z = \gamma E_z = \frac{\gamma Q z'}{[(\gamma x')^2 + z'^2]^{3/2}}. \qquad (10)$$

先看 $E'_z/E'_x = z'/x'$. 这就告诉我们矢量 $\mathbf{E}'$ 和 x' 轴所成的角等于径向矢量 $\mathbf{r}'$ 和 x' 轴所成的角.因此 $\mathbf{E}'$ 是沿着从Q的瞬时位置向外的径向方向的，如图 5.11(b)所示. 让我们

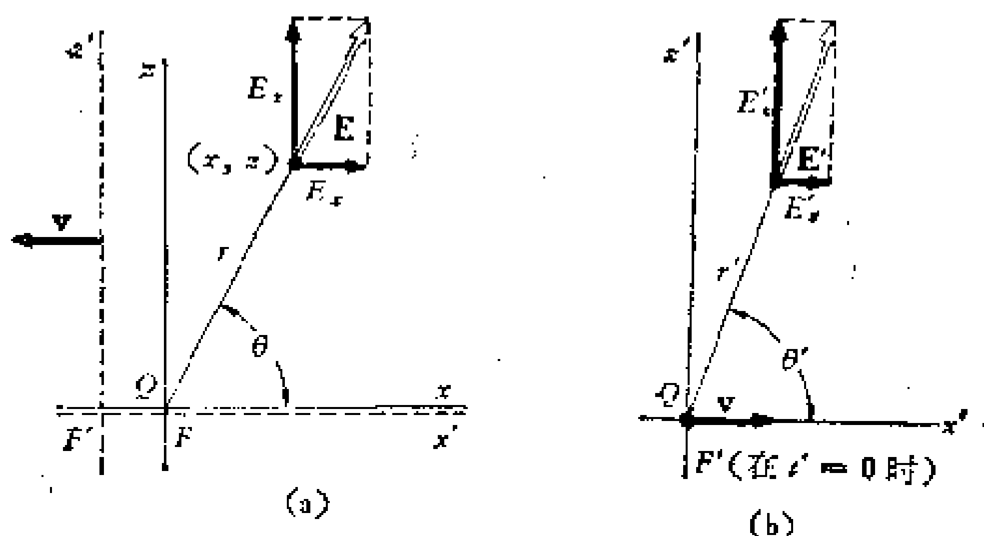


图 5.11 点电荷的电场. (a) 在电荷静止的坐标系里, (b) 在电荷以恒速运动的坐标系里.

暂停一会儿，深入地思考一下这一结论！这指的是，如果Q经过加撇的参考系的原点正在中午 12.00 点，"加撇的时间"，在这加撇的参考系中任一位置的观察者将报告他附近的电场在中午 12.00 点确切地指着从原点发出的径向方向. 这发出的报告乍看来像是瞬时信息传送！离开一英里远的观测者怎样能够知道在同一时刻这粒子在什么地方呢？他不能. 不包含这个意思. 要记住，这粒子永远在以恒速运动着，按照"飞行计划" 要求它在中午经过原点. 我们可以长时间的取得这些信息.如果你想要谈论原因和结果，那是粒子的过去历史决定

了所观测的场. 现在我们要探讨当飞行计划中有一非预定的变化时,将发生什么情形.

为了求出场的强度,我们计算 $E_x'^2 + E_z'^2$ 的值,它是场强的平方 E'^2.

$$E'^2 = E_x'^2 + E_z'^2 = \frac{\gamma^2 Q^2(x'^2 + z'^2)}{[(\gamma x')^2 + z'^2]^3} = \frac{Q^2(x'^2 + z'^2)}{\gamma^4[x'^2 + z'^2 - \beta^2 z'^2]^3}$$

$$= \frac{Q^2(1-\beta^2)^2}{(x'^2 + z'^2)^2\left(1 - \frac{\beta^2 z'^2}{x'^2 + z'^2}\right)^3}. \tag{11}$$

(这里,把 β 代回表达式中,显得更简洁一些.)令 r' 表示从电荷 Q 的瞬时位置原点到观测点(x', z') 的距离: $r'^2 = (x'^2 + z'^2)^{1/2}$. 令 θ' 表示此径向矢量与电荷 Q 的速度之间的夹角,电荷 Q 在 F' 中向正 x' 方向运动. 因为 $z' = r'\sin\theta'$, 电场的大小可写作:

$$E' = \frac{Q}{r'^2}\,\frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta')^{3/2}}. \tag{12}$$

坐标的原点没有什么特殊的, $x'z'$ 平面, 和其他任何通过 x' 轴的平面相比, 也没有什么特殊的. 所以我们可以十分普遍地说,在某一给定时刻,均速运动的电荷的电场的方向是从电荷的瞬时位置向外的径向方向, 它的大小由式(12)给出, θ' 是电荷的运动方向和从电荷的瞬时位置到观测点的半径矢量之间的夹角.

对于低速运动的电荷, 场简化为 $E' \approx Q/r'^2$; 实际上, 在任何时刻,和 F' 中的静止点电荷位于 Q 的瞬时位置所产生的场一样. 但如果 β^2 不是可忽略不计的,对距电荷同样的距离而言,和运动方向垂直的场比运动方向上的场要强些. 如果我们象通常一样,用场线的密度来表示场强,场线将在垂直于运动方向上密集. 图 5.12 表示速率为 $v/c = 0.866$ 沿 x'

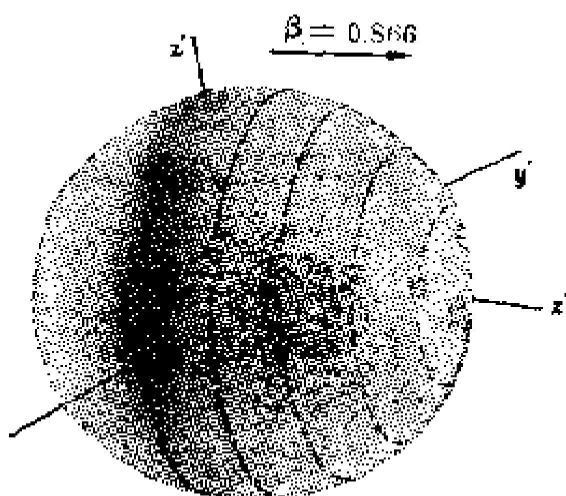


图 5.12 运动电荷的场在各方向上的场强. 在这时刻电荷正经过 $x'y'z'$ 参考系的原点. 图中的数字给出的场强值，是 Q/r'^2 的倍数.

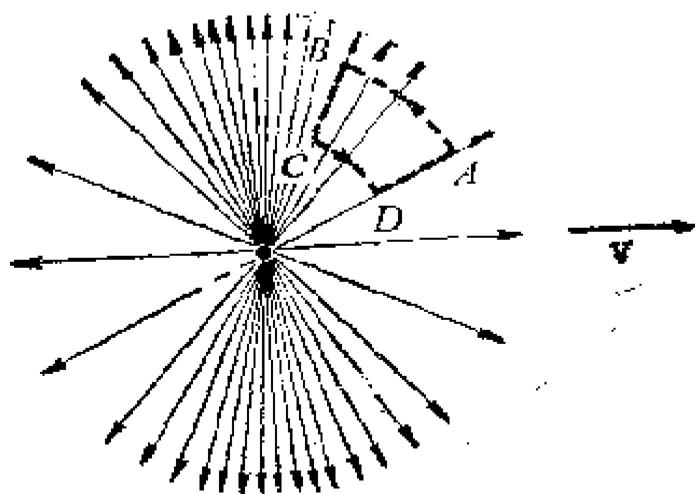


图 5.13 匀速运动的电荷的场的另一种表示法.

方向运动的点电荷发出的场线在通过一单位球时的场线密度分布. 图 5.13 是电场的比较简单的表示法，是在场的一个横截面 $x'z'$ 面上画出的一些场线[1].

这是值得注意的一种电场，它不是球对称的，这没有什么可奇怪的，因为在这参考系中有一特殊方向，即电荷运动的方向. 而且这个场不管它产生的方式怎样，也不是任何形式的固定的电荷分布所能产生的. 因为在这场中，沿每一闭合迴路的 $\mathbf{E}'$ 的线积分都不是零. 例如考虑一下图 5.13 中的闭合迴路 $ABCD$. 两圆弧对线积分没有贡献，它们是垂直于场的；在沿径向部分，则是沿 BC 的场要比沿 DA 的场强，因此这一路线上 $\mathbf{E}'$ 的环流不等于零. 但是要记住，这并不是静电场. 在源电荷运动的全过程中，在 F' 参考系中任何点的场 $\mathbf{E}'$ 是变化着的.

1) 象图 5.13 那样的二维图不能很如实地用场线密度来表示场强. 除非我们任意地中断其中的一些场线，图中的线的密度将以 $1/r'$ 的比数减少下来，而我们所要表示的场的强度是以 $1/r'^2$ 减小的. 因此，图 5.13 只是定性地表示场强 E' 随 r' 及 θ' 而改变的情形.

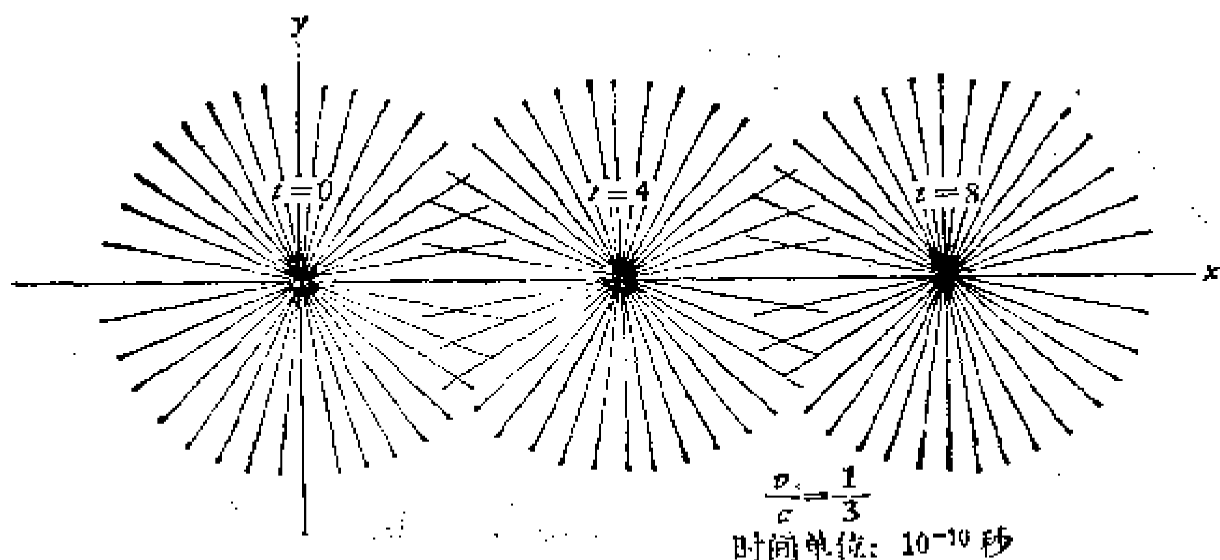


图 5.14 运动电荷在三个时刻上的电场: $v/c=1/3$

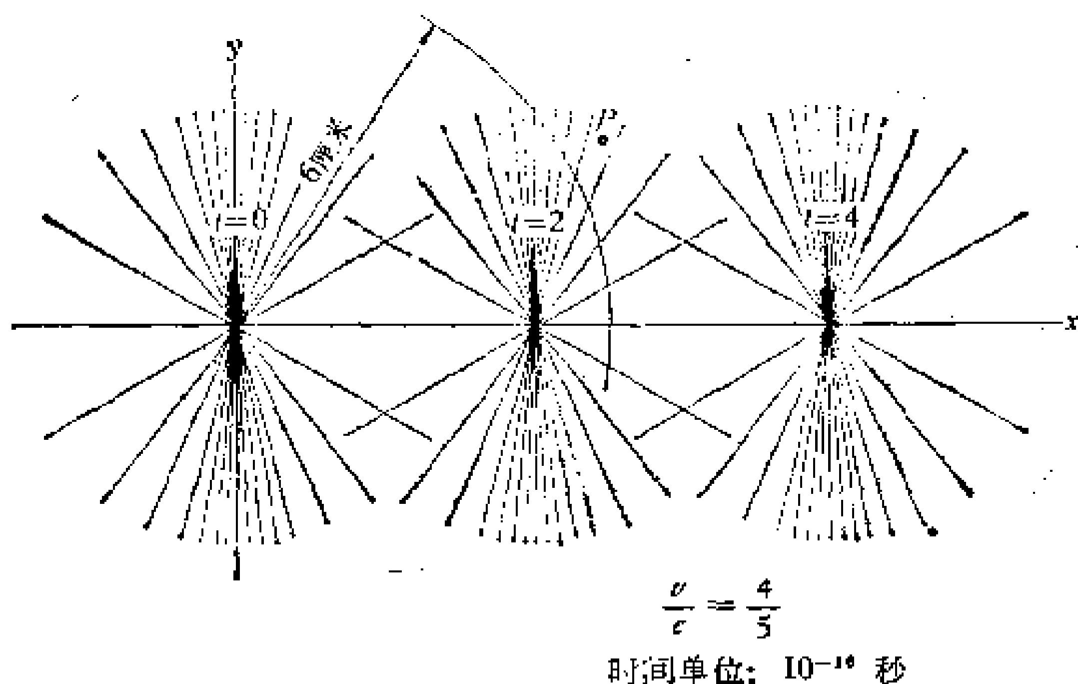


图 5.15 运动电荷在三个时刻上的电场: $v/c=4/5$

图 5.14 及 5.15 表示在电子以恒速沿 x 方向运动的坐标系中观测到的某一时刻的电场[1]. 在图 5.14 中，电子的速率是 $0.33c$，所以它的能量约为(第一卷，第十二章) 30,000 电子伏(30 千电子伏). β^2 的值等于 1/9，这电场和静止电荷的电场

1) 以前我们的电子是静止在没有撇号的参考系中，运动在加撇号的参考系中. 这里我们采用 xyz 作为运动电荷的参考系，为的是避免和以后要用撇号讨论的问题相混淆.

差别不大．图 5.15 中的电子速率是 $0.8c$，相当于 335 千电子伏的动能．每个图都取 1.0×10^{-10} 秒为时间单位，距离标度和实际尺度一样，如图所示．当然，这图对于任何以光速的某一分数值运动着的电荷都是同样适用的．我们提到电子的相应的能量只是为了提醒读者，上述的相对论的速度不超出实验室中的一般速度．

5.7 电荷在开始运动时或停止时的场

必须清楚地了解，我们常用的*匀速度*这一术语是指在一直线上的恒速率的持续运动．如果我们的电子出现在我们的图中 $t=0$ 点之前*未曾*沿负 x 轴运动，那将会怎么样呢？假定它静静地停留在原点上，等待时钟的读数到 $t=0$．刚刚在 $t=0$ 之前，某种动力给电子以突然的大的加速度，达到速率 v，并以这一速率沿正 x 轴的方向离开．从那时起电子完全重复图 5.15 那样的运动．但是图 5.15 并不正确地表示具有上述历史的电子的场．为了了解为什么这图不能正确地表示这电子的场，我们研究一下在 $t=2$，即 2×10^{-10} 秒时在 P 点的电场．光信号在 2×10^{-10} 秒中前进 6 厘米的路程．因为这一点在离原点 6 厘米以外的地方，这时在那里还接不到电子在 $t=0$ 时已经开始运动的信号！除非严重地违反相对论——但我们的全部讨论是以相对论的假设为基础的——在时刻 $t=2$，在 P 点的场，以及在以原点为中心，以 6 厘米为半径的球以外的所有各点的场*必定是在原点的静止电荷的电场*．

反之，在靠近运动电荷的地方，很久以前发生的事情不起作用．如果我们考虑的是距离电荷越来越远的区域，在 $t=2$ 时，电场一定以某种方式从图 5.15 的第二图那样的场过渡到电荷在原点时的那种场．在我们不知道信息*到底*传播多快的情况下，我们不能作比这更多的推论．假定（只是假定）

信息的传播在不违背相对论的假设的情况下，尽可能地快传播，如果我们忽略加速过程的那一段时间不计，那末我们就可以预料，在 $t=2$ 时，在 6 厘米半径的球内的场是匀速运动的点电荷的场．如果是这样的话，这个原来静止的，在 $t=0$ 时立刻得到速率 v 的电子的场一定象图 5.16 所表示的那样．存

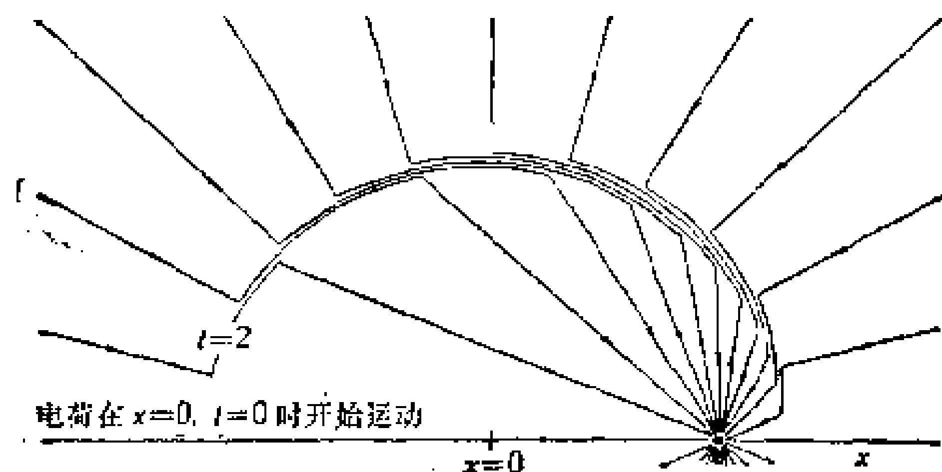


图 5.16　原来静止于 $x=0$ 处的电荷在 $t=0$ 时突然被加速，此后以恒速运动．

在着一个薄的球形壳（在实际情形中，它的厚度决定于加速所需的时间），在这薄壳中，电场由一种形式转变到另一种形式．这个壳仅是以速度 c 扩大，但它的中心保持在 $x=0$ 处．场线的箭头表示场源是负电荷时场的方向．

图 5.17 表示一个电子的场，此电子在 $t=0$ 以前，一直以匀速运动着，在 $t=0$ 时达到 $x=0$ 处，在这里突然被停止住．它的停止信号在时间 t 不能达到距原点 ct 以外的任何地点．在以半径为 $R=ct$ 的球外的场一定是如果电子保持以原来速度运动下所应扩展开的场．这就是为什么我们看到在图 5.17 右边的"刷子"状的场线都精确地指向一个位置，如果电子没有停止就将运动到这一位置．（注意这个最后的结论和前节中所作的关于信息尽可能快地传播的假定无关．）场本身好象有它自己的生命！

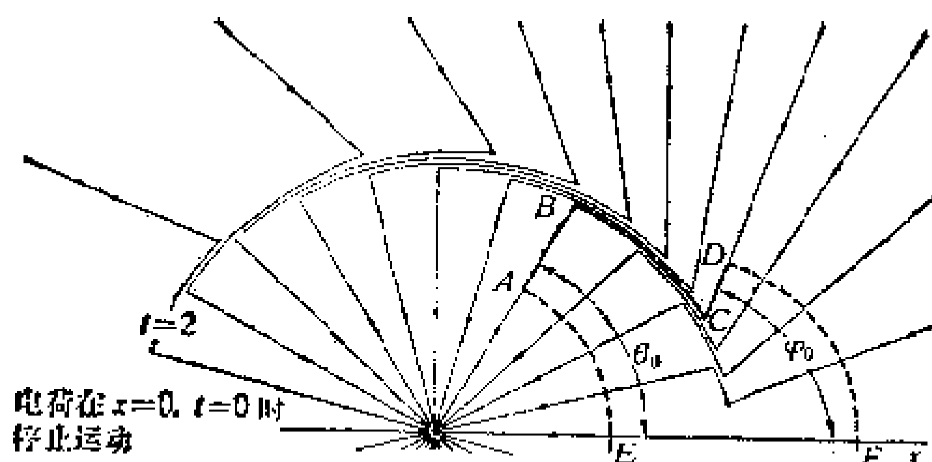


图 5.17 以恒速运动的电荷在 $t=0$ 时到达原点，突然减速，而静止，此后停留于原点处.

把内部的和外部的场线联接起来是相当简单的事情. 只有一种途径能够符合高斯定律. 以图 5.17 为例，从和 x 轴成 θ_0 角的一条场线上的一点，譬如 A 点出发，沿着这条场线一直到外场中某一个与 x 轴成 φ_0 角的外场线上. (这线当然是从电荷外推位置，即外部场的视在源，辐射出的.)用圆弧把 A 点和 D 点与 x 轴联接，圆弧 AE 以内部场的源为中心，圆弧 DF 以外部场的视在源为中心. 绕 x 轴旋转线 $EABCDF$ 产生一旋转面. 因为这闭合曲面不包含电荷，所以 $\mathbf{E}$ 在这整个面上的面积分必定是零. 球形顶盖是对这积分唯一有贡献的. 因为其余的由 $ABCD$ 形成的面按照它的构造形式是平行于场的. 里边盖子上的场是静止点电荷的场；外边盖子上的场是以恒速 v 运动的点电荷的场，如式(12)所示. 现在我们来计算通过里边盖子的场线通量，示于图 5.18 中. 在这盖子上 $\mathbf{E}$ 的积分是

$$\int_0^{\theta_0} \frac{q}{r^2} 2\pi r^2 \sin\theta d\theta = 2\pi q \int_0^{\theta_0} \sin\theta d\theta. \tag{13}$$

在外边盖子上 $\mathbf{E}$ 的积分是

$$\int_0^{\varphi_0} \frac{q}{r^2} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\varphi)^{3/2}} 2\pi r^2 \sin\varphi d\varphi$$

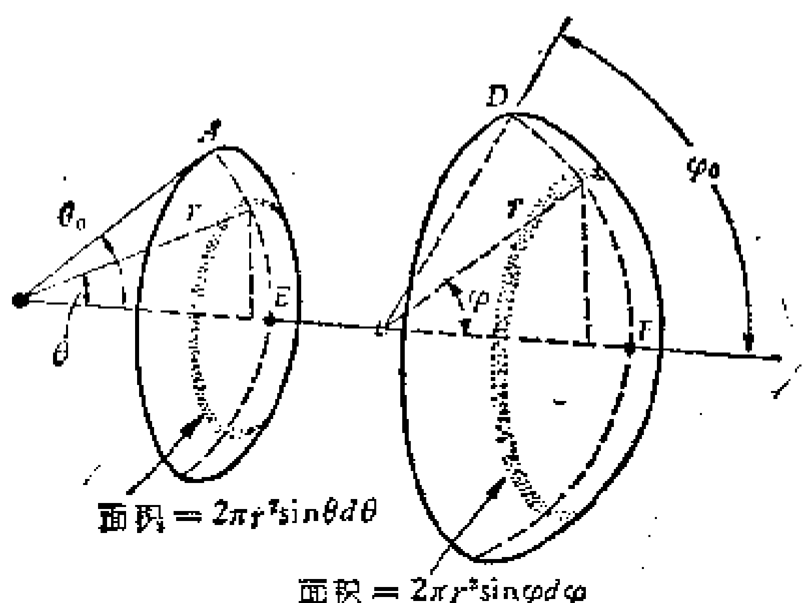


图5.18 在图5.17中 AE 的旋转形成里边盖子，DF 的旋转形成外边盖子．AE 上的场是静止电荷的场，DF 上的场是恒速运动电荷的场．我们要求通过这二个面的通量是相等的．

$$= 2\pi q \int_0^{\varphi_0} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\varphi)^{3/2}} \sin\varphi d\varphi. \tag{14}$$

从左边进入的通量等于在右边出来的通量的条件是

$$\int_0^{\theta_0} \sin\theta d\theta = \int_0^{\varphi_0} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\varphi)^{3/2}} \sin\varphi d\varphi. \tag{15}$$

作为一个积分学的练习题，请把它计算出来[1]． 可得到θ_0与φ_0之间的关系如下：

$$\cos\theta_0 = \frac{\cos\varphi_0}{\sqrt{1-\beta^2\sin^2\varphi_0}}. \tag{16}$$

这关系式的更简单的等效形式是

$$\tan\varphi_0 = \gamma\tan\theta_0. \tag{17}$$

根据包含的通量相等得出的 φ_0 和 θ_0 的这个关系恰好和一根硬杆在静止参考系中和在运动参考系中硬杆与相对运动方向

1) 所需的积分是 $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(a^2+x^2)^{1/2}}$.

所成的角度之间的关系相同. 这使我们能用一简单方法来描绘变换到一运动电荷的场的变换. 令每一根"线"代表一定数量的通量，假设把在电荷的静止参考系中的场线看作向各方向上竖立着的固定杆. 在运动参考系中，每一根杆代表同样数量的通量，而现在这些杆看起来是位于更陡的角度上，所以这些杆子就象图 5.13 那样.

只是图 5.17 中过渡区域的宽度才和我们迄今尚未证实的假设，"信息尽可能传播的快"有关. 如果有某一靠近现在静止着的电荷的区域，在 $t=0$ 之前这区域的场的历史痕迹已经消失，式(17)所表示的关系一定成立. 所以连接附近的场和远处的场的场线中一定有一横的，即非径向的部分.

在图 5.16 和图 5.17 中场线是这样连接的，为的是能和式(17)的要求一致. 其结果是在过渡区域的场相当强，那里的场基本上和从原点发出的半径矢量垂直. 要记住这场的形状随时间以速率 c 扩展. 我们看到这非常象横向电场的逸出波——这里所谓横向电场是指场的方向与传播方向垂直.

我们得到这样的结果是由于我们始终按照相对论假设的结论，并按照电荷是相对论的不变量这一观察事实推出的. 我们以后将应用这些概念来了解被加速了的电荷的辐射性质. 但是，我们必须先回到匀速运动的电荷上来，它还有更值得注意之处.

5.8 作用在运动电荷上的力

式(12)告诉我们一个静止电荷在另一个以恒速运动的电荷的场中所受的力. 我们现在要问另一个的问题：一个运动着的电荷在其它电荷的场中所受到的力如何？我们首先来研究一个在静止电荷场中运动着的电荷的情形. 这或许是一个电子在示波器的带电板之间运动，也许是一个 α 粒子在

一个原子核周围的库仑场中运动．在任一情形中，场源都是静止在某一参考系中的，我们把这参考系叫做“实验室”．我们在这“实验室”参考系中的某一地点和某一时刻观察一个带着电荷 q 的粒子，它在这时刻以速度 $\mathbf{v}$ 在静电场中运动．有什么样的力作用在 q 上？

力只是动量的变化率的一个名称，所以我们实际上是问，在这地点在这时刻在我们的“实验室”参考系中测出的粒子的动量变化率，$d\mathbf{p}/dt$，如何？（这就是我们所指的作用在运动粒子上的力．）在我们学习过的知识中已经包含了这个答案．让我们从参考坐标系 F' 中来观察这一系统，参考系 F' 这时跟着这粒子一起运动．在这“粒子”的参考系中这粒子，至少暂时地，是静止的．而其它的电荷则是运动着的．这是我们知道如何处理的情形．作用在静止电荷 q 上的力正好是 $\mathbf{E}'q$，这里的 $\mathbf{E}'$ 是在参考系 F' 中测到的电场．我们知道当给出 $\mathbf{E}$ 时怎样去求 $\mathbf{E}'$；式(7)提供了这一法则．因此，如果知道 $\mathbf{E}$，我们就能够求出在 F' 系中所观测的粒子的动量变化率．余下的问题是把这量变换回 F 系中．所以我们的问题就是一个如何把力，即动量的变化率，从一个惯性系变换到另一个惯性系的问题．

这个问题已经在第一卷，第十二章中讨论过了．你可能还记得它是怎样推导出来的．但是，我们不想从第一卷中提出有关的公式来计算，而是要在这里复习一下推导出它们的一些步骤．这可以帮助我们确切地理解这问题是怎么解决的．我们考虑在一参考系 F 中观测到的另外任一惯性系 F' 在正的 x 方向上以速率 v 运动的情况．设一个静质量为 m 的粒子在 F' 中沿 x' 的正方向以速率 v' 运动．用 p_x 表示动量的 x 方向分量（在 F 中测量的），用 p'_x 表示动量的 x' 分量（在 F' 中测量的）．为了求出 p_x 与 p'_x 之间的关系，我们写出

$$p'_x = \frac{mv'}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}} = mc\beta'\gamma', \tag{18}$$

这里 $\beta' = v'/c$，$\gamma' = 1/\sqrt{1-\beta'^2}$.

在另一方面，在 F 参考系中粒子的速率是 $(v + v')/(1+vv'/c^2)$，这可以写作 $c(\beta+\beta')/(1+\beta\beta')$，所以，

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{mc(\beta+\beta')}{(1+\beta\beta')\left[1 - \left(\dfrac{\beta+\beta'}{1+\beta\beta'}\right)^2\right]^{1/2}} \\ &= \frac{mc(\beta+\beta')}{[(1-\beta^2)(1-\beta'^2)]^{1/2}} \\ &= mc\gamma\gamma'(\beta+\beta') \end{aligned} \tag{19}$$

把式(18)和式(19)相比较我们得到 p_x 和 p'_x 之间的关系式：

$$p_x = \gamma(p'_x + \beta\gamma' mc). \tag{20}$$

我们要注意在 $\beta\gamma' mc$ 中的 $\gamma' mc$ 可写成 $\gamma' mc^2/c$，或 E'/c，这里 E' 是质点在 F' 中的总能量，静止能加动能。(不要和电场相混淆，我们暂时先不管电场！) 我们把式(20)写成 $p_x = \gamma(p'_x + \beta E'/c)$，并暂时停一停，把它和在同一情形下的 x 坐标的洛仑兹变换比较一下：$x = \gamma(x' + \beta ct')$. 这种相似性提醒我们一个普遍事实：在洛仑兹变换中 p_x，p_y，p_z 及 E/c 四个量的行为和时空的 4 个坐标 x，y，z 及 ct 完全相似。的确，如果你能自由运用这一事实，你就能把式(20)直接写下来，而且你有资格把我们简短的复习看作是浪费时间。我们应用这一事实来代替对横向动量分量的推导。因为具有 x 方向相对速度时，在洛仑兹变换中 $y = y'$，我们可以预料

$$p_y = p'_y. \tag{21}$$

t 及 t' 之间的关系由以下的熟习公式给出：

$$t = \gamma\left(t' + \frac{\beta x'}{c}\right). \tag{22}$$

我们关心的是 dp_x/dt 和 dp'_x/dt' 之间的关系. 把式(22)微分,可得:

$$dt = \gamma dt' + \gamma \frac{\beta}{c}\left(\frac{dx'}{dt'}\right)dt' = \gamma dt'(1+\beta\beta'), \quad (23)$$

因为这里 dx'/dt' 就是 v'. 式(21)给出

$$dp_y = dp'_y \quad (24)$$

把式(20)微分,得:

$$dp_x = \gamma dp'_x + \gamma\beta mc\left(\frac{d\gamma'}{dp'_x}\right)dp'_x, \quad (25)$$

上式中的因子 $mc(d\gamma/dp'_x)$ 可由式(18)算出. 由式(18)得

$$p'_x = mc\gamma'\beta' = mc\sqrt{\gamma'^2 - 1}. \quad (26)$$

因此

$$\frac{dp'_x}{d\gamma'} = \frac{mc\gamma'}{\sqrt{\gamma'^2-1}} = \frac{mc}{\beta'}. \quad (27)$$

于是 $\frac{d\gamma'}{dp'_x} = \frac{1}{(dp'_x/d\gamma')} = \frac{\beta'}{mc}$, 把它代入式(25), 可得:

$$dp_x = \gamma dp'_x(1+\beta\beta'). \quad (28)$$

把式(23)和式(28)相比较,可知

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{dp'_x}{dt'}. \quad (29)$$

不论 v' 多大, 上式总是成立的, 因为在两个方程式中都有 $(1+\beta\beta')$ 因子. 实际上, 我们所感兴趣的只是 v' 是极小的情形——就是粒子在 F' 中几乎是静止的. 在这样的情形下, $\beta\beta'$ 项可略去不计, 把式(23)和式(24)相比较, 我们可得横向动量的改变:

$$\frac{dp_y}{dt} = \frac{1}{\gamma}\frac{dp'_y}{dt'}. \quad (30)$$

把上述的重要结果总结如下: F' 是一惯性参考系, 其中

一个粒子是瞬时静止的，或是很慢地运动． F 是另一惯性参考系，F' 以任一速度相对于 F 运动着． 用//和⊥标明平行于和垂直于 F' 和 F 的相对速度的动量分量，我们可以写出

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dp_{\parallel}}{dt} &= \frac{dp'_{\parallel}}{dt'}, \\ \frac{dp_{\perp}}{dt} &= \frac{1}{\gamma}\frac{dp'_{\perp}}{dt'}. \end{aligned}} \tag{31}$$

在得出力的变换定律，式（31），和电场的变换定律，式（7），之后，我们现在再回到一个运动的带电粒子在电场 $\mathbf{E}$ 中运动的问题上来，我们发现一个令人惊讶的简单事实． 首先考虑和带电粒子的瞬时运动方向平行的 $\mathbf{E}$ 分量，$E_{\parallel}$． 变换到在这时刻跟着这粒子运动的参考系 F'．在这系中纵向电场分量是 $E'_{\parallel}$，根据式（7），$E'_{\parallel} = E_{\parallel}$，因此力$\frac{dp'_{\parallel}}{dt}$ 是

$$\frac{dp'_{\parallel}}{dt'} = E'_{\parallel}q = qE_{\parallel}. \tag{32}$$

回到参考系 F 中观测者测量纵向力，即纵向动量分量的变化率 $dp_{\parallel}/dt$． 依照式（31），$dp_{\parallel}/dt = dp'_{\parallel}/dt'$，因此在参考系 F 中，所测得的纵向分量的力是

$$\frac{dp_{\parallel}}{dt} = \frac{dp'_{\parallel}}{dt'} = qE_{\parallel}. \tag{33}$$

当然随着时间的前进，这粒子在 F' 中不会保持静止． 它将被电场 $\mathbf{E}'$ 加速，在惯性系统 F' 中这粒子的速度 $\mathbf{v}'$ 将从零逐渐增加． 但是，因为我们关心的是瞬时加速度，无论如何只涉及到 v' 的微分值，对式（31）的限制还是严格满足的． 在 F 中的横向电场分量 $E_{\perp}$ 的变换是 $E'_{\perp} = \gamma E_{\perp}$，因此，$(dp'_{\perp}/dt') =$

$qE'_{\perp}=q\gamma E_{\perp}$. 但当我们把力变换回到参考系 F 中后，则有 $(dp_{\perp}/dt)=\left(\frac{1}{\gamma}\right)(dp'_{\perp}/dt)$，因此最后消除了 γ：

$$\frac{dp_{\perp}}{dt}=\frac{1}{\gamma}(\gamma E_{\perp}q)=qE_{\perp}. \tag{34}$$

式(33)及式(34)的结果简单地是：作用于在参考系 F 中运动的带电粒子上的力等于 q 乘上在这参考系中的电场 $\mathbf{E}$，和粒子运动的速度完全无关. 图 5.19 帮助我们记住这一事实及认识这一事实的方法.

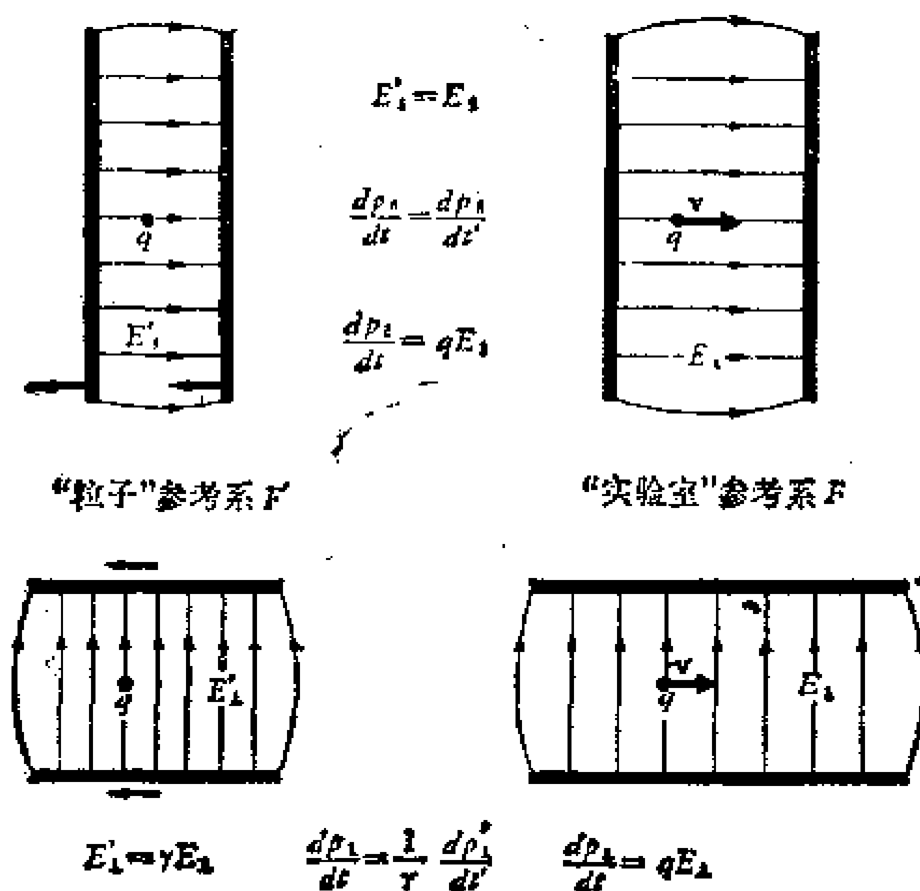


图 5.19 在一参考系中产生电场 $\mathbf{E}$ 的电荷是静止的，作用在以任一速度运动的电荷 q 上的力是 $q\mathbf{E}$.

在这门课程里我们以前已经用过这个结果了，我们简单

地被告知电场作用在运动电荷上的力是 $q\mathbf{E}$. 因为这是熟习的,而且又是非常简单的,你可能认为这是显然的,我们的证明是浪费时间. 现在我们可以把它看作是经验事实. 在广泛的范围直到如此接近于光速的情形,对于电子来说,在因子 γ 达到 10^4 时,上述结论已被核实. 从这点来看,这是一条非常重要的定律. 我们这章的讨论已经指明这是电荷不变性的直接结果.

5.9 运动电荷和其它运动电荷之间的相互作用

我们知道可以有和速度有关的力作用在运动电荷上. 这力和磁场相联系. 磁场的源是电流,就是运动着的其他电荷. 奥斯忒的实验表明电流可以影响磁铁, 但是在那时候磁的性质是完全神秘的. 不久安培及其他人发现了电流之间的相互作用, 例如观察到的具有同方向电流的两条平行导线之间的相互吸引现象. 这就引导安培提出这样的假设, 磁性物质含有永久循环的电流. 如果是这样, 奥斯忒实验就可以理解为是导线中的伽伐尼电流和永久的微观电流之间的相互作用, 就是这种永久的微观电流给于磁针以特殊的性质. 安培作出了关于稳定电流之间相互作用的完美的数学表达式, 和关于磁化物质与永久电流系统等效性的数学形式. 他的关于铁磁本质的光辉设想一直等到大约一个世纪以后才得到最后的确认.

对于安培和他的同时代的人来说还不清楚电流的磁性现象是否除由简单的电荷迁移以外还会由其他东西引起. 一个带静电的物体在运动时产生的效应和连续的伽伐尼电流产生的效应一样吗? 该世纪的后期麦克斯韦的理论工作指出, 回答应该是"一样". 第一个直接的证明是罗兰得到的, 我们将在第六章的末尾再讨论他的实验.

从我们现在的观点来看电流的磁作用可以看作是库仑定律的必然结果．如果相对论的假设是正确的，如果电荷是不变量，并且如果库仑定律成立，那么我们通常所谓的“磁”效应必然发生．当我们研究一运动电荷和其它运动电荷之间的电的相互作用时，立刻就会出现这种效应．举一简单的系统，即可说明这一问题．

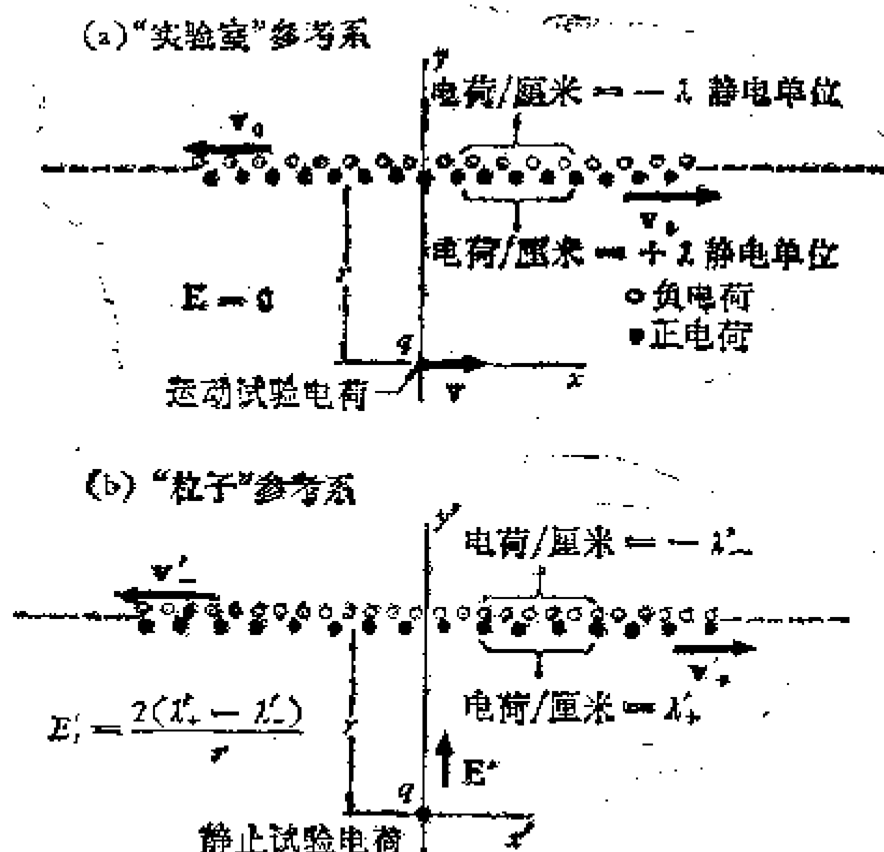


图 5.20　在两不同参考系中所观测到的正的和负的运动电荷的线列．(a)在“实验室”参考系中以相同速率正电荷向右，负电荷向左运动．在实验室参考系中，它们的密度是相等的．但是在(b)“粒子”参考系中，试验电荷 q 是静止的，电荷线密度是不等的．

如图 5.20 (a) 所示，在“实验室”参考系中，有无限长的一行正电荷以速率 v_0 向右运动，在它上面重迭上一行负电荷以同样的速率向左运动．假定这些电荷是如此之多，并且如此紧密地靠近，以致在我们所涉及的距离内可以不必考虑它们

的不连续性．为清楚起见，在图中把两行画得分开了一些．对于这系统不存在所有电荷都处于静止状态的参考系．假定在“实验室”参考系中测得，直线上的正电荷密度是 λ 静电单位/厘米，负电荷密度也是这样．在“实验室”参考系中在直线上的净电荷密度是零．所以在实验室参考系中电场 $\mathbf{E}$ 是零．这情形相当于一根通过稳定电流的不带电的导线．在金属导线中只是负电荷(电子)运动，正电荷是静止的．这里我们采取了更为对称的模型，以便把我们的讨论简化一些．

假如我们跟着正电荷以同样的速率运动，就会发现在直线上的电荷密度不同了．这情形和图 5.19 中电容器的情形相似．在实验室参考系中正电荷的分布在 x 方向将以因子 $(1-v_0^2/c^2)^{1/2}$ 收缩，这将使正电荷密度比在正电荷静止的参考系中的密度更大一些．因为我们已经规定在实验室参考系中的密度是 λ，所以在正电荷静止的参考系中密度必定小一些，即 $\lambda(1-v_0^2/c^2)^{1/2}$．负电荷在它们的静止的参考系中的线密度也是这样．现在这对我们是有用的．

一个离“导线”的距离为 r 的静止试验电荷 q 受不到力的作用，因为电场是零．我们现在所要研究的是作用在运动着的试验电荷上的力．假如在实验室参考系中使电荷 q 以速率 v 向右运动，那末在实验室参考系中观测时，什么样的力作用在这电荷上呢？我们已经学过怎样回答这样的问题了．我们进入跟着试验电荷 q 一起运动的坐标系中．在这“粒子”参考系中电荷 q 是静止的，作用在这电荷上的力只决定于在这参考系中的电场．

为什么在“实验室”参考系没有电场？而在这“粒子”参考系中有电场呢？理由是在“粒子”参考系中所观察到的电荷的线密度，是不相等的，我们分别把它们记作 λ'_+ 及 λ'_-，当我们在“粒子”参考系中观测时，这导线是带电的！它的每一单位

长度上都有过量的负电荷[1]。

要解决这问题，我们需要知道在这新的参考系中正电荷和负电荷的速率。显然，它们是不相等的。事实上，在实验室里看，我们的"粒子"参考系向右运动，它想赶上正电荷，更快地离开负电荷。图 5.21 帮助我们辨别我们必须考虑的那些

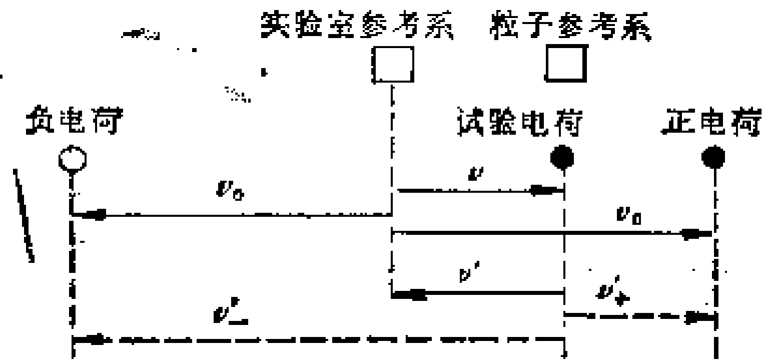


图 5.21 在"速度空间"中的图能帮助记忆。(但是速度的相加要按相对论来进行。)在这里和在式(35)一直到式(44)中的各个 v 表示速度的大小，是正量。

速度。我们不想作任何近似，因此我们必须用相对论的速度相加公式来求出在"粒子"参考系中正电荷和负电荷的速率 v'_+，和 v'_-。这些速率是

$$v'_+ = \frac{v_0 - v}{1 - v_0 v/c^2}, \quad v'_- = \frac{v_0 + v}{1 + v_0 v/c^2}, \tag{35}$$

这里用 β 和 γ 符号是方便的。设 $\beta_0 = v_0/c$，$\gamma_0 = (1 - \beta_0^2)^{-\frac{1}{2}}$；$\beta'_+ = v'_+/c$，$\gamma_+ = (1 - \beta'^2_+)^{-\frac{1}{2}}$ 等等。于是，式(35)便可写作：

$$\beta'_+ = \frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta_0\beta}, \quad \beta'_- = \frac{\beta_0 + \beta}{1 + \beta_0\beta}. \tag{36}$$

两种电荷分布受到不同量的洛仑兹收缩——这是问题的

---

1) 你可能要问，"和电荷不变性有矛盾吗？"我们总是强调包围在某一边界中的总电荷不论在任何参考系中总是相同的。在这情形里我们不可能有一个包围这导线上全部电荷的边界，这导线一直伸展到无穷远处；在"终端"所发生的任何情况在这里是没关系的。

关键．我们可以首先求正电荷在它自己的静止参考系中的线密度并对“粒子”参考系引用收缩因子，以求出正电荷的线密度．我们以前已经求出在正电荷本身的参考系中的正电荷密度是 $\lambda(1-v_0^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$，用我们的新符号则是 λ/γ_0．在粒子参考系中观测时，电荷分布的线收缩因子是 $1/\gamma'_+$，所以它的倒数 γ'_+ 是电荷线密度的增长因子．这样在粒子参考系中正电荷的线密度一定是

$$\lambda'_+=\gamma'_+\left(\frac{\lambda}{\gamma_0}\right). \tag{37}$$

同样，在粒子参考系中负电荷的线密度是

$$\lambda'_-=\gamma'_-\left(\frac{\lambda}{\gamma_0}\right). \tag{38}$$

我们想要求出净线电荷密度 $\lambda'_+-\lambda'_-$，并用式(36)来消掉其中的 γ'_+ 及 γ'_-．看起来好象我们要进行繁重的代数运算，但是在代入后立刻就得到令人愉快的简化，如下：

$$\lambda'_+-\lambda'_+=\frac{\lambda}{\gamma_0}(\gamma'_+-\gamma'_-). \tag{39}$$

从式(36)

$$\begin{aligned}\gamma'_+-\gamma'_-&=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\beta_0-\beta}{1-\beta_0\beta}\right)^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\beta_0+\beta}{1+\beta_0\beta}\right)^2}}\\&=\frac{1-\beta_0\beta}{\sqrt{1-\beta_0^2-\beta^2+\beta_0^2\beta^2}}-\frac{1+\beta_0\beta}{\sqrt{1-\beta_0^2-\beta^2+\beta_0^2\beta^2}}\\&=\frac{-2\beta_0\beta}{\sqrt{(1-\beta_0^2)(1-\beta^2)}}=-2\beta_0\beta\gamma_0\gamma.\end{aligned} \tag{40}$$

因此净线电荷密度是

$$\lambda'_+-\lambda'_-=-2\lambda\beta_0\beta\gamma=-\frac{2\lambda\gamma vv_0}{c^2}. \tag{41}$$

这线电荷在粒子参考系中，所产生的电场和任何具有相同密度的线电荷所产生的电场相同，我们只须把高斯定律应用于一个包围此线的圆柱形表面上，便可得到我们熟悉的结果，有一径向电场，它的大小是

$$E'_r = \frac{2(\lambda'_+ - \lambda'_-)}{r} = -\frac{4\lambda\gamma v v_0}{r c^2}. \tag{42}$$

所以作用在正试验电荷 q 上的力是沿径向内指的，即在粒子参考系的正 y' 方向，它的大小是

$$F'_y = \frac{4q\gamma\lambda v v_0}{r c^2}. \tag{43}$$

在粒子参考系中这是横向的力．当在实验室参考系中观测时，它的大小与此不同．按照我们变换力的法则[式(31)]，$F_y = (1/\gamma)F'_y$．这样就消掉了 γ．我们的结论是：在实验室参考系中作用在以速率 v 平行于"导线"运动的电荷上的力的大小是

$$F_y = \frac{4q\lambda v v_0}{r c^2}. \tag{44}$$

如果我们愿意的话，可以把 $2\lambda v_0$ 作为一个因子从式(44)中分解出来，它正好是我们的"导线"中的电流，以静电单位/秒表示．这就是说，λv_0 是正电荷向右的迁移率——即线列中的正电荷每秒钟通过某一点的电量——向左迁移的负电荷对电流的贡献也是 λv_0．把这电流记作 I，作用在运动电荷 q 上的力是

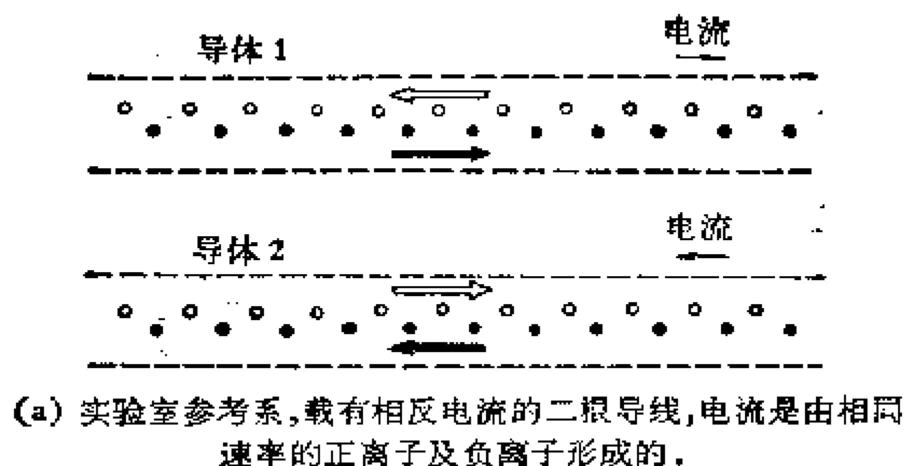
$$F = \frac{2qvI}{r c^2}. \tag{45}$$

这是一个重要的事实：作用在运动的试验电荷上的力不是分别地决定于导线中的载流子的速度或密度，而只决定于二者的组合，此组合确定了净电荷的迁移率．如果我们有某

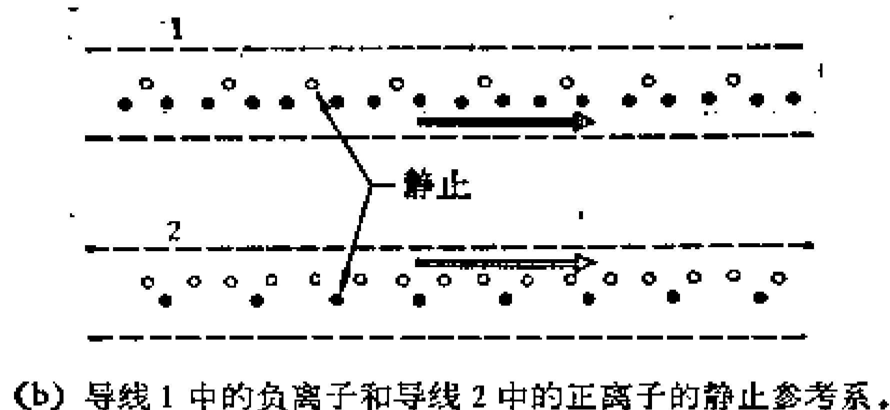
一电流，比如说10^7静电单位/秒，相当于3.3毫安，不管它是由以99%的光速的高能电子组成的，是由在金属中的电子的随机热运动迭加上一微小的沿某一方向的漂移运动组成的，还是由溶液中正离子向一个方向运动，负离子向另一方向运动的带电离子所组成的，都是没关系的。并且作用在试验电荷上的力严格地和试验电荷的速度成比例。在我们的推导中，无论是导线中的载流子和试验电荷都不只限于小速度。式(45)是精确的，没有任何限制.

让我们看一下在这章开头的图5.1(b)中所示的情形，怎样用这结论解释载有相反方向电流的两导线之间的相互排斥的现象. 首先假定在每一导线中都有相同数目的正、负载流子，以相等的速率沿相反方向运动. 在实验室参考系中，大概象图5.22(a)的情形. 转换到随着导线1中的负电荷运动和导线2中的正电荷运动的参考系，则这系统就象图5.22(b)表示的情形. 在这参考系中，导线1的每一单位长度有超量的正电荷；因此它排斥导线2中的正电荷. 同样，在导线1中的负电荷被导线2中超量的负电荷所排斥. 为了求出作用在其余载流子，即在导线1中的正电荷和在2中的负电荷上的力，我们便要变换到它们处于静止状态的参考系，如图5.22(c). 在这里，导线2看起来有超量的正电荷，所以在导线1中的正电荷将受到排斥力. 同样在导线2中的负电荷也受到排斥力. 因此，每一个载流子，在它自己的参考系中，都受到在其他导线中载流子的净斥力. 为了求出在实验室参考系中作用力的确切强度，我们就必须象把式(43)变换到式(44)所作的那样把力变换回来. 但这样做不会改变力的符号. 所以我们在实验室中必定观测到每一导线被另一导线排斥.

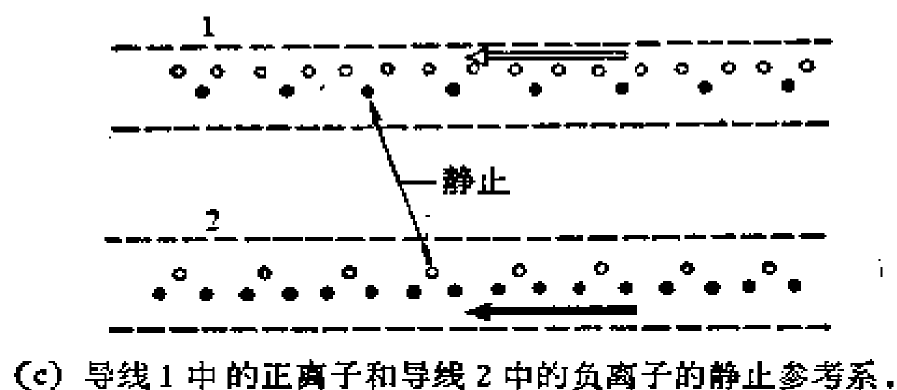
上述的模型也可用来表示电解液中或电离了的气体中的导电现象，虽然在一般的情况下，这二种载流子可能有不同的



(a) 实验室参考系，载有相反电流的二根导线，电流是由相同速率的正离子及负离子形成的。



(b) 导线 1 中的负离子和导线 2 中的正离子的静止参考系。

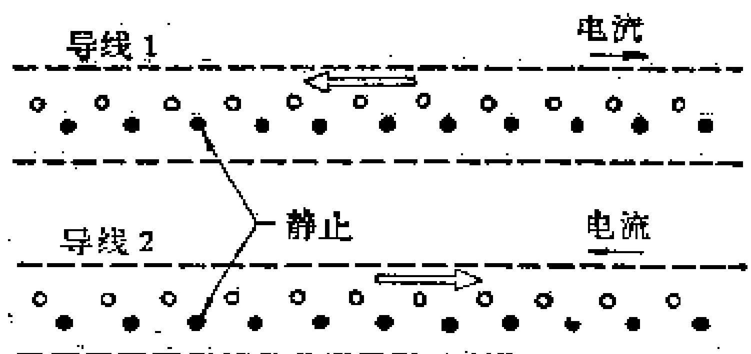


(c) 导线 1 中的正离子和导线 2 中的负离子的静止参考系。

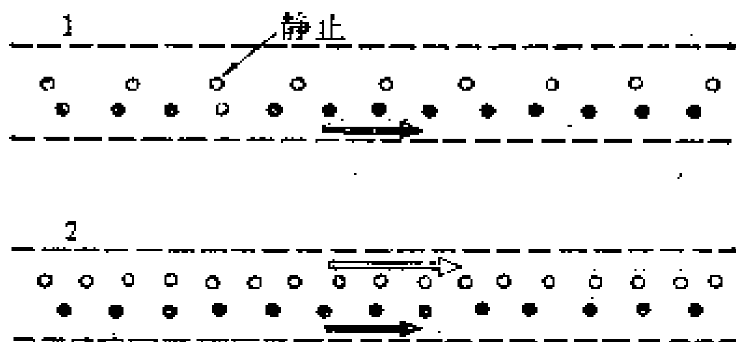
图 5.22

速率。在金属中，只有负载流子(电子)运动，而相应的正电荷在晶格中保持固定。图 5.23(a) 表示在实验室参考系中所看到的载有反方向电流的这样两根导线。导线是中性的，在实验参考系中静止着的正离子没有受到另一导线的作用力。变换到一组电子处于静止状态的参考系中，如图 5.23(b)，我们看到在另一导线中电子分布受到洛仑兹收缩比正离子分布
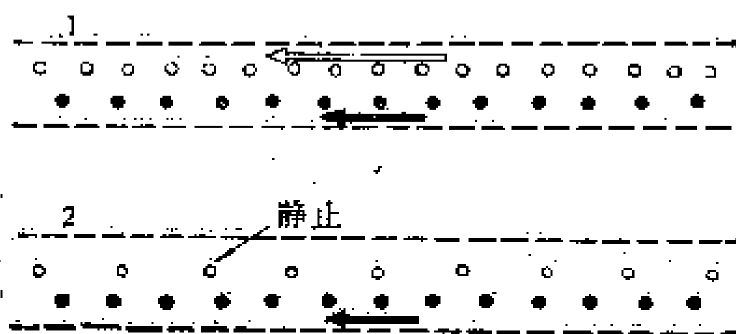
受到的更甚些．在图 5.23 (c) 中，看到同样的情形．所以这一模型也预示两反向的平行电流之间的排斥力．这定性地说明了以前的陈述，即电流之间的力只决定于电流的流量，而不决定于电荷是怎样迁移的．(习题 5.15 概括地证明了这一陈述．)



(a) 在实验室参考系中，两根导线载有方向相反的电流．在金属导线中电流只由负离子(电子)的运动形成．



(b) 导线 1 中的电子静止的参考系．注意导线 2 中正离子是收缩紧的，而电子分布则收缩得更紧．



(c) 导线 2 中的电子静止的参考系．和(b)的情形相同，另一导线对静止的电子来看是带负电的．

图 5.23

在这章里我们已经看到电荷不变性这个事实是怎样包含电流之间存在作用力的事实的．这并没有要求我们认为一个

事实是另一事实的原因. 这两者不过是电磁学上的两个方面. 它们之间的相互关系很好地表明出更一般的定律: 物理规律在所有的惯性参考系中是相同的.

如果我们必须在各不同的坐标系之间变来变去地去分析每一运动电荷系统，我们的工作就会变得繁琐而混乱. 有一更好的方法. 一电流对另一电流的，或一电流对一运动电荷的全部作用可以通过引进一新的场，*磁场*，来完整地简明地描述.

习　题

5.1 由两平行长方板组成的一电容器，两板间的垂直间隔是 2 厘米. 板的东西长度是 20 厘米，南北长度是 10 厘米. 电容器暂时接到 300 伏 (1 静伏) 的电池上充了电. 在负板上有多少超量的电子? 两板之间的电场强度如何? 在实验室中两板是静止的，在相对于实验室以速率 $0.6c$ 向东运动的参考系中测量时，试给出下列各量: 电容器的三个边的长度，负板上的超量电荷; 两板间电场强度. 对向上以 $0.6c$ 速率运动的参考系而言，回答同样的问题.

[在不同参考系中的电场]

5.2 我们可用包含总电通量一半的两圆锥面之间的夹角 α 作为从运动电荷发出的电场线的形态的相对论"压平"的粗略测量. 这就是说，穿过球面的通量有一半包含在 $\theta' = \pi/2 + \alpha/2$ 和 $\theta' = \pi/2 - \alpha/2$ 之间的赤道区中. 只考虑在 $\gamma \gg 1$ 的相对论极限的情形. 这样就只须考虑这样的角度，$\theta' = \pi/2 - \epsilon$，$|\epsilon| \ll 1$. 首先证明在这情形下，式(12)可近似地写作

$$E' = \frac{Q}{r^2}\frac{\gamma}{(1 + \gamma^2\epsilon^2)^{3/2}}.$$

现在令 e 在 $-\alpha/2$ 到 $+\alpha/2$ 范围内，将上式积分，求出通过狭窄的赤道带的通量。

答：$\alpha = 2/\sqrt{3}\gamma$。

[在相对论极限下运动电荷的场]

5.3 一个 30 京电子伏的质子，在距氢原子 10^{-7} 厘米处通过，试估计这电场的峰值，以及这个原子受到这电场脉冲的大约持续时间。一个 30 京电子伏的电子以相同距离通过时，情况是否一样？静质量用似近等效值；即质子用 1 京电子伏，电子用 0.5 兆电子伏。

[习题 5.2 所得结果的应用]

5.4 研究一带电粒子的轨迹，它在 x 方向上以 $0.8c$ 的速率进入一在 y 方向电场均匀的大区域中。试证粒子的 x 方向速度实际上必定减小。动量的 x 分量怎样？

[小讨论题]

5.5 在一高压阴极射线管中的偏转板是长方形板，长 4 厘米，宽 1.5 厘米，间距 0.8 厘米，板间的电场差是 6000 伏。一个受电势差 250 千伏加速的电子从左侧进入偏转板，最初电子在两板中间，与板平行运动。算出在板的另一端，电子离开这偏转场时的位置及方向。略去边缘场，并假定电场一直到端点都是完全均匀的。电子的静质量取为 500 千电子伏。先在“实验室”系统中进行分析，回答以下问题：$\gamma = ?$；$\beta = ?$；p_x 以 mc 作单位＝？；行径两板间所用的时间＝？（忽略在习题 5.4 中讨论的水平速度的改变）；所得到的横向动量分量，以 mc 为单位＝？；在出口处的横向速度＝？；在出口处的垂直位置＝？；在出口处的飞行方向？现在请在当电子进入偏转区时跟着电子一起运动的惯性系中描述整个过程。偏转板看来象什么？板间的电场怎样？在这坐标系中电子发生什么情况？这习题的主要目的是使你相信两种描述完全是一致的。

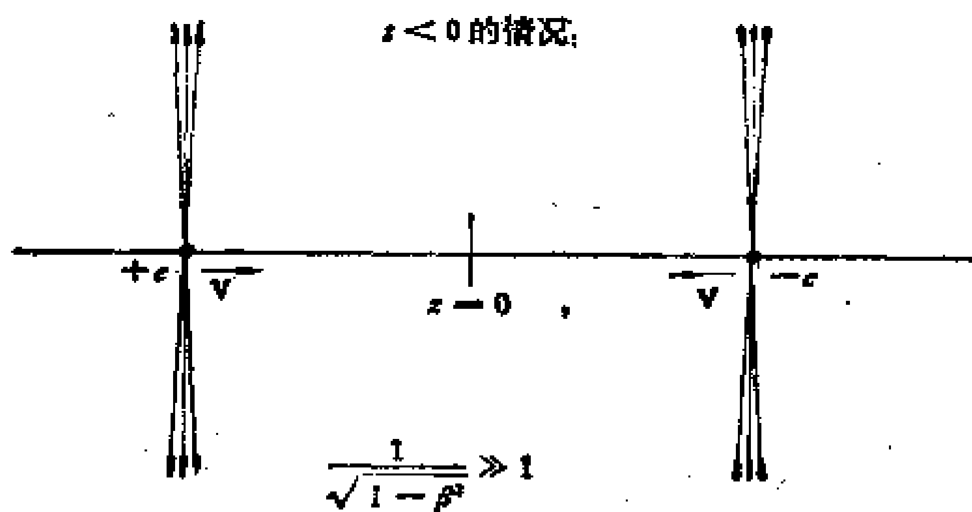
[在实验室坐标系和粒子坐标系的描述是等效的]

5.6 图 5.16 及 5.17 的叠加将说明什么。场在转变区将趋于加强还是削弱？你能用在叠加下电荷运动的性质来解释它吗？

[讨论题]

5.7 一电荷以速率 v 沿 x 轴向原点运动。在 $t=0$ 时达到原点，并突然停止，并反向运动(好象弹性地弹回)，然后沿正 x 方向以相等的匀速运动离开。画出粒子在弹回后的某时刻的场。

5.8 这图表示高度相对论性的正粒子从左侧趋向原点，



习题 5.8

一负粒子从右侧以同速率趋向原点。在 $t=0$ 时它们在原点相碰，以某种方式释放出它们的动能，并成为一中性的实体停留在那里。你想在 $t>0$ 的某一时刻电场会象什么样子？画出场线。随时间的延续，场将怎样变化。

5.9 带电荷 q_1 的粒子 1 是静止的。带电荷 q_2 的粒子 2 以速率 v 运动经过它，最靠近的距离是 b。第 1 个粒子的质量是这样大，以致在第 2 个粒子经过它的时候，因受到库仑力

的作用从而得到速度，由这样产生的位移可略去不计．同样第2个粒子的质量也是这样大，以致速率的改变或从直线路程上的偏离都可忽略不计．因两者的靠近使每一粒子得到的横向动量是多少？（这里说的横向是指垂直于粒子2的运动方向．）先在粒子1静止的坐标系中，计算粒子2所得到的动量．把高斯定理应用在一圆柱形上，可不必进行积分．你的公式是相对论性正确的吗？再考虑粒子1所得的动量．作用于粒子1的场是式(12)所表示的运动电荷的场．通过适当的积分可算出横向动量．但是你也可以说明应用高斯定律是合理的，或者你可以从你的第一个结果直接证明，试说明之．

答：（两者）：$2q_1q_2/vb$

[在"冲量近似"中带电粒子的相互作用]

5.10 在第5.9节中强调了电荷不变性和电荷守恒的区别，并指出守恒并不一定意味着不变性．但是，高斯定律在一参考系中对于任意一个面都是正确的，这和相对论合在一起就有电荷守恒的意思．讨论下面假想的情形来证明它：在$t=0$时，在原点突然产生一正电荷．在某时刻$t=t_1$，各个观测者在不同半径的表面上确定$\mathbf{E}$的面积分．从此来进行论证．

[电荷守恒问题]

第六章　磁　场

6.1 磁场的定义

一电荷平行于其它电荷的电流运动时，在垂直于它自己速度的方向上就会受到一个力的作用. 这在前一章对图 5.20 所示的情形所作的分析中已经显示出来了. 如图 5.3 所示，在一电子束被邻近的电流偏转时，我们可以看到这种力的出现. 我们还必须说明如果我们让试验电荷沿其它方向运动时将出现什么情况. 但是，你可能已经承认通常所说的在载流的导线周围存在着磁场，并且运动电荷在磁场中受到作用力. 正如我们把电场矢量 $\mathbf{E}$ 定义为作用在单位静止的试验电荷上的力那样，现在我们也可以用作用在运动试验电荷上的那部分和速度成正比的力定义另一种场. 确切地说，假定在某一特定参考系中的某一位置和某一时刻，实验表明作用在以匀速度 $\mathbf{v}$ 运动的试验电荷 q 上的力是

$$\boxed{\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B},} \tag{1}$$

这里 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 是矢量，和 $\mathbf{v}$ 无关. 如果这方程成立，我们定义 $\mathbf{E}$ 为在这位置的电场，定义 $\mathbf{B}$ 为在这位置的磁场.

为了充分证明这定义是正确的，我们必须用实验或其它方式来表明这一关系式总是会找到的. 我们还没完成这项工作，但是我们已经指出在某些重要的和有启发性的特殊情形中这关系式是成立的. 在第 5.8 节中我们已经证明，如果

所有其他电荷是不动的话，则作用在试验电荷上的力和试验电荷的速度完全无关. 在这情形下，各处 $\mathbf{B}=0$，式(1)成立. 我们刚才所作的论证表明一平行于"导线"中的稳定带电粒子流运动着的粒子受到一个和它的速度成比例，并且垂直于它的速度的力，这正是式(1)中的矢乘关系式所要求的. 事实上我们可以正确地说，磁场矢量 $\mathbf{B}$ 和我们的研究结果是一致的，并且和系统的对称性是一致的. 它是垂直于图平面的矢量，就是说既垂直于导线又垂直于试验电荷的速度 $\mathbf{v}$. 要使式(5.45)和式(1)一致，则 $\mathbf{B}$ 的大小必须是

$$B=\frac{2I}{rc}. \tag{2}$$

我们只从分析运动电荷的电场推导出直线电流的磁场. 我们的推导是不完全的，但这一点并不重要. 我们应该指明如果我们使电荷沿着径向趋近"导线"，或离开"导线"运动，也会出现同样大小和在某一适当方向上的和速度有关的力. 这可以用同样的方法证明，虽然如果我们不作任何近似而将计算进行到底的话，在数学演算上稍微麻烦一些. 我们感兴趣的不是坐标变换的数学计算而是存在这种力的原因. 即使不作任何计算，我们也可以发现这种力的存在.

图 6.1 (a) 表示在"实验室"参考系中一试验电荷向着导线运动. 图 6.1(b) 表示在"粒子"参考系中试验电荷是静止的，可以看到正、负电荷的线列向着试验电荷向下运动，而各个电荷则斜着运动，正的向右下方运动，负的向左下方运动. 这好象大学生队伍的队列演习. 我们希望在这参考系中见到的是指向左方的电场 $\mathbf{E}$[1]. 这里一切仍然都是十分对称的；这

1) 我们要找出一个力，在实验室参考系中的观测者看来它是垂直于试验粒子的速度的力，正如在第一种情形中的力，是垂直于粒子速度的，向图平面俯视时，力指向速度矢量的左方.

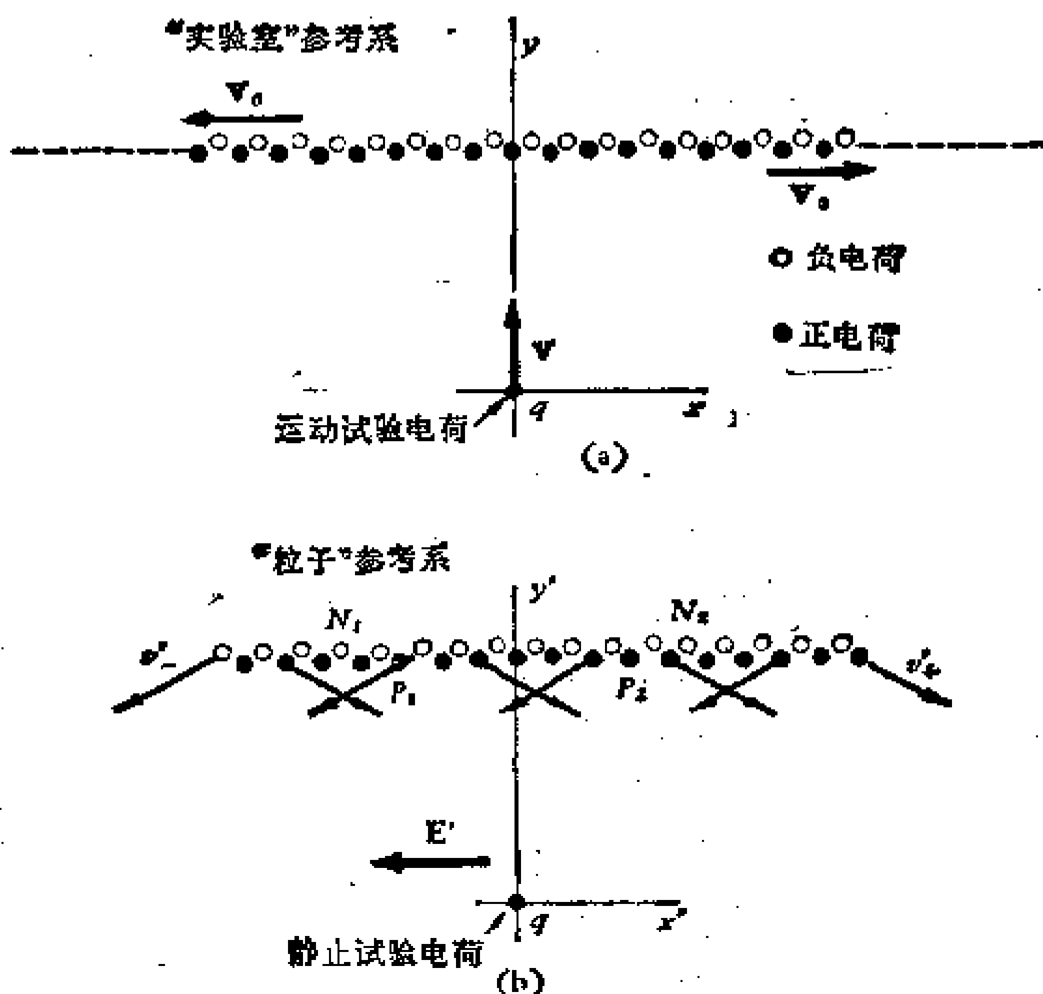


图 6.1 (a) 在"实验室"参考系中一试验电荷垂直地向着电荷线列运动．(b) 在"粒子"参考系中电荷线列向着试验电荷运动．

样的一个场是怎样发生的呢？

我们在粒子参考系中考虑一个正电荷 P_1 和一个处于对称位置上的正电荷 P_2．（如果我们要把所有的正电荷的贡献加起来，我们总是可以把它们对称地成对的组合起来，一个在线列的右半边，一个在线列的左半边．）在图 6.2 (a) 中画出了这两个粒子的电场．我们可以清楚地看出，它们对 q 产生的效应不同．在式(5.12)中的因子 $[1-\beta^2\sin^2\theta']^{-3/2}$ 所表示的场的相对论收缩使在 q 处的 P_2 的场比 P_1 的场强．如果场是球对称的，则场的 x' 分量将互相抵消．但现在的情况是 P_2 的效应大，形成了一个向左的 x' 分量．

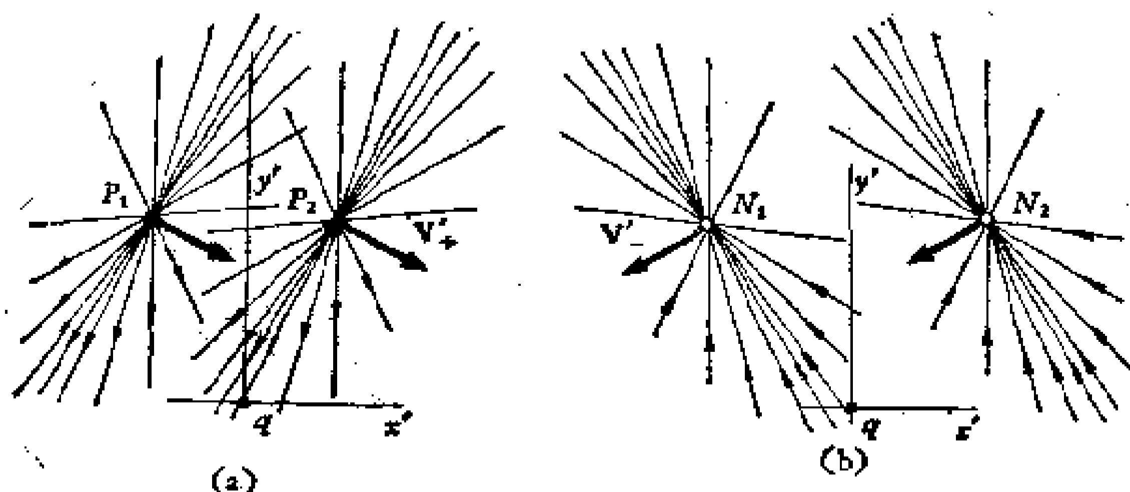


图 6.2 表示在图 6.1(b)中，粒子参考系中的力是怎样产生的．(a)两个在对称位置上的正电荷的电场，(b)两个在对称位置上的负电荷的电场．

如图 6.2(b)，现在我们取两个在对称位置上的负电荷 N_1 和 N_2. 在这情形里，N_1 产生较强的场，这也形成了负 x' 方向的电场分量．另一方面，正、负电荷的电场的 y' 方向分量显然相互抵消．这样保留下了一个电场 $\mathbf{E}'$，因之有一作用在 q 上的力，这力和导线平行，指向负 x' 方向．

我们现在可以清楚地看到运动电荷之间的磁作用是一相对论效应．在式(5.44)中 vv_0/c^2 因子的出现就已经表明了这点．如果 c 是无穷大，虽有大量的运动电荷，磁性也不会存在．既然如此，那末磁力大得能够转动电动机的电枢，能够举起重物，看来将是咄咄怪事．我们以前曾经指出大物体之间的静电力通常都不是很强的．为什么磁力不是更弱些呢？理由是大块物体几乎完全是电中性的．下面的例子将作出很好的说明．我们将计算在一实际情形中的两个载流导线之间的力．

因为这例子使我们第一次涉及到物质内部的磁场，我们必须中断我们的讨论，注意一下这个问题．大多数金属，包括铜(但不包括铁)，和大多数物质，一般都几乎对磁场没有影响．我们可以假设在同样的电流下，在铜内的磁场 $\mathbf{B}$ 实际上

和在真空中的相同．我们将在第十章中深入地研究这些问题．在那时以前我们将避免涉及到铁．

考虑两根直径为 1 毫米的铜线，相距 5 厘米(图 6.3)．每

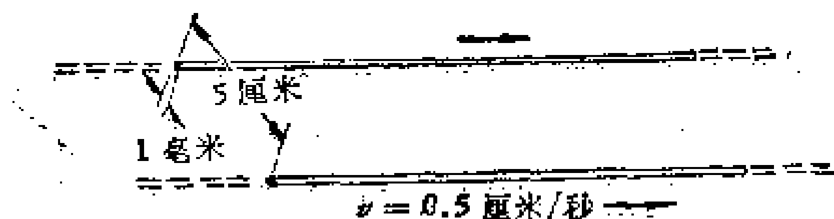


图 6.3 两根铜线，其中导电电子的平均漂移速度假定是 0.5 厘米/秒．

一铜线都通过电流；假定在每一铜线中的导电电子的平均速度都是 0.5 厘米/秒．如我们所知的，这个漂移速度远小于电子的随机速度． 如果我们假定每一铜原子只有一个导电电子，我们可以容易地算出 1 毫米直径的 1 厘米长的铜线中的导电电子数．这大约是 6×10^{20} 个．（要作这个估计，需要铜的密度，8 克/厘米^3；铜的原子量，64；和阿伏伽德罗数．）运动着的负电荷的线密度是

$$\lambda=(6\times10^{20})\times(4.8\times10^{-10})\approx3\times10^{11}\text{静电单位/厘米}, \tag{3}$$

正电荷是不动的． λ 和迁移速度的乘积是 $(3\times10^{11})(0.5)=1.5\times10^{11}$ 静电单位/秒，这约为 50 安的电流．

现在我们来求作用在距离为 $r=5$ 厘米处的另一导线中的一个电子上的力．如果这另一导线中流着相同的电流，则这一电子也以 0.5 厘米/秒的平均速度运动着．应用式(5.45)，可得：

$$F=\frac{2q\lambda vv_0}{rc^2}=$$

$$\frac{2(4.8\times10^{-10}\text{静电单位})(3\times10^{11}\text{静电单位/厘米})(0.5\text{厘米/秒})^2}{(5\text{厘米})(3\times10^{10}\text{厘米/秒})^2}$$

$$\approx1.6\times10^{-20}\text{达因}. \tag{4}$$

因为在另一导线中的每一个电子都受到这样的力，所以在 1

厘米长的导线中的电子所受的总力是 $(6\times10^{20})\times(1.6\times10^{-20})$，约为 10 达因/厘米. 我们把它看作是作用在导线本身上的力；任何传给电子的动量，最后总是传给包含这些电子的晶格上. 至于力的作用方向，我们对图 5.20 的情形所作的分析表明当同符号的电荷相互平行运动时，磁作用力要把它们拉近. 所以我们的铜线，如果它们载有同方向电流，将以每厘米 10 达因的力相互拉近. 对于任意两根平行的直导线，在相同的间距下，载有相同的 50 安的电流时，作用力都是这样的。

10 达因不是很大的力，但很容易测量. 我们把这力和两根各带 3×10^{11} 静电单位/厘米的未被抵消掉的静止电荷的导线之间的静电力相比较. 密度为 λ 的线电荷的电场是 $2\lambda/r$ [式(1.26)]，作用在相距 r 厘米的相同的线电荷上的每厘米长度上的力是 $2\lambda^2/r$. 把我们假设的电子的线电荷密度，3×10^{11} 静电单位/厘米，代入，我们得到恰好比 10 达因/厘米的磁力大 $(c/v)^2$ 倍的力，即 36×10^{21} 达因/厘米，约为 4×10^{13} 吨/厘米！不夸张地说，如果自然界不是提供了两类电荷能抵消掉静电相互作用，那末磁现象将会是相对地不显著的——当然，只存在一种电荷的世界，将会是不可想象的另一个样子的世界了. 在原子领域里基本粒子之间全是库仑力起作用，而磁效应和电作用相比，只占第二位. 一般地说，如我们所预期的，磁作用正好要比电作用弱这样一个因子——粒子速率和光速之比的平方。

平行电流之间的磁作用力，只决定于电流的乘积，而不是分别地决定于电荷密度和速度. 在上例中引进了电荷密度和速度是为了把静电作用力和磁作用力相比较. 通常我们只考虑每一导线中的总电流，至于电荷的迁移机理，是许多缓慢运动的多个电荷，还是快速运动的少许电荷，是毫无关系的. 假

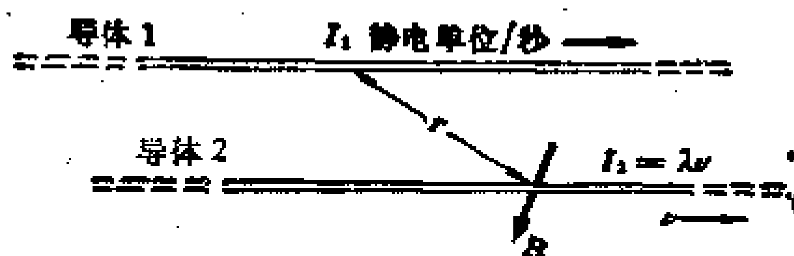


图 6.4　导线 1 在导线 2 处产生一磁场 **B**. 作用在导线 2 上的每单位长度上的力由式(5)给出.

设图 6.4 中的导线 1 中的电流是 I_1静电单位/秒；距离为 r 处的导线 2 中有电荷 λ 静电单位/厘米，以速度 v_2 运动．我们知道作用在导线 2 每一单位长度上的力是 $2I_1\lambda v_2/rc^2$，因为 λv_2 是第二个导线中的电流 I_2，所以这式可写为

$$\text{每单位长度的力} = \frac{2I_1I_2}{rc^2}. \tag{5}$$

如以磁场强度 **B** 表示，则载有稳定电流 I 的导线在其他电流的磁场 **B** 中所受的力是每厘米长度的导线为 IB/c．这力垂直于导线又垂直于磁场，所以我们可以把它写成矢量形式：

$$\boxed{d\mathbf{F} = \frac{I}{c}\,d\mathbf{l} \times \mathbf{B},} \tag{6}$$

这式中的 $d\mathbf{F}$ 是作用在通过恒定电流为 I 静电单位/秒的导线的一小段 $d\mathbf{l}$ 上的力．矢量 $d\mathbf{l}$ 的方向指向电流的正方向．式(6)是从式(1)中 **B** 的定义，和由迁移电荷所表示的电流的定义直接得出的．这些式对任何形状的导线都是适用的；我们只需知道在这导线的每一点的磁场矢量 **B**．记住作用在以速度 $\mathbf{v}$ 运动的电荷元 dq 上的力是 $d\mathbf{F} = dq(\mathbf{v}/c) \times \mathbf{B}$，便可以求得式(6)．用 $\mathbf{v} = d\mathbf{l}/dt$ 和 $dq = Idt$，这式是可以化为

$$d\mathbf{F} = \frac{Idt}{c}\,\frac{d\mathbf{l}}{dt} \times \mathbf{B} = \frac{Id\mathbf{l}}{c} \times \mathbf{B}. \tag{7}$$

直到现在我们选用了静电单位/秒作为 I 的单位．电流的实用单位安，等于 3×10^9 静电单位/秒[1]．如果在直线导线中的电流以安表示，则离导线 r 厘米处的磁场是

$$B(\text{高斯}) = \frac{2}{10}\,\frac{I(\text{安培})}{r(\text{厘米})}. \tag{8}$$

因子 2/10 是精确的，1/10 是 3×10^9 和光速的比值．同样，电流为 I 安的导线，在 B 高斯的磁场中所受的力是

$$d\mathbf{F}(\text{达因}) = \frac{1}{10}\,I(\text{安})\,d\mathbf{l}\times\mathbf{B}(\text{厘米}\cdot\text{高斯}). \tag{9}$$

这些公式中的力以达因表示，距离以厘米表示，**B** 的单位是高斯．这是长期为物理学工作者及工程师所使用的单位；虽然有采用其他单位制的，但是似乎它仍然是磁场强度的最常用的单位．在靠近地面的地球磁场强度约为半高斯的数量级．图 6.3 中由一导线中的电流在另一导线处所引起的磁场约为 2 高斯．在大型的电磁铁的磁极间的磁场大概是以千计的高斯(千高斯)来计量的．一个磁铁很容易达到 10 至 20 千高斯的场强，市场上的超导磁铁可以达到 60 至 80 千高斯．10^5高斯以上的磁场需要相当特殊的努力．在太阳表面的局部区域(太阳黑点)显示出几百高斯的场强，并且我们知道有些星体的一般表面场强大于一千高斯．总的来说宇宙中大规模的磁场比较地说绝对量都是很弱的．最近对天体磁场的测量(光谱测量的一个特殊方法)表明在我们银河的一个小区域中的磁场约为 10^{-5}高斯．从银河的尺度来看，这样大小的场不是不重要的．事实上磁场在星系力学中起着重要的，有时是优先的作用．1 高斯单位，它是人们曾经研究过了几个世纪的磁场的大小，现在大约是宇宙学中的重要磁场和实验室

1) 我们在第一章中曾指出这些“3”的数字是从光速引来的．现在我们看到这是怎么出现的了．当然精确的值是 2.9979……．

中的最强的磁场的几何平均值。

我们还应指出我们定义为 **B** 的物理量，被称为磁场强度，在有些书中称为磁感应强度。

6.2 磁场的一些特性

磁场和电场一样，是描述带电粒子之间相互作用的工具。如果我们说在中午 12.00 时，在 (4.5, 3.2, 6.0) 处，一磁场水平地指向负 y 方向，大小为 5 高斯，我们就要陈述一运动着的带电粒子在这个时空点上所显现出来的加速度。值得注意的是这样形式的陈述虽然只简单地给出一个矢量 **B**，但是已经说出了所有要说的话。可以用它唯一地预言作用在以任一速度运动的任一带电粒子上的和速度相关的那部分力。用不着对作为场源的其他带电粒子作更多的描述。换句话说，如果两组完全不同的运动电荷体系在某一点产生相同的 **E** 及 **B**，则在这点上的任一试验电荷的行为在这两系统中将完全相同。由于这样的理由，作为粒子间相互作用的中介物，场的概念才是有用的。并且由于这一理由我们把场视为独立的实体。

从我们现在的观点来看，要想描述粒子的相互作用，场的概念比粒子更真实些？还是差一些？这是一个深刻的问题，我们可以把它长期地放在一边。认为电场和磁场是生动真实的那些人——指出法拉第和麦克斯韦这两个人——由此而引向了一个新的见识并获得重大的发现。让我们象他们那样具体地观察磁场，并了解它的一些特性。

至此我们只学习了直的导线或细线中稳定电流的磁场。我们看到场的方向在各处都是垂直于包含着电流线和被观察点的平面的，场强的大小和 $1/r$ 成正比，场线是围绕着导线的圆，如图 6.5。**B** 的方向是用我们以前所采用的矢乘的规定，

通过把式(1)中的第二项写成 $+(q/c)\mathbf{v}\times\mathbf{B}$(任意的)，以及通过沿着正电流方向运动的正电荷被吸引，而不是被排斥这一物理事实来确定的。如果把 **B** 的方向和作为它的源的电流方向联系起来如图 6.5 所示的样子，这些都是一致的。沿着正电流方向看时，**B** 线沿着顺时针的方向旋绕。或者我们宁愿记住右手螺旋关系。

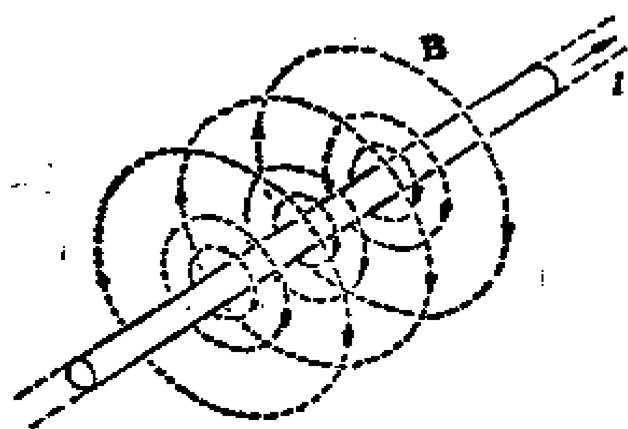
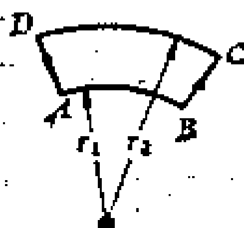


图 6.5　围绕着直的载流导线的磁场线。

让我们来看一下 **B** 在这场中沿一闭合迴路的线积分。（回忆在点电荷的电场的情形中的类似的探讨，使我们能够推出所有静电场的一个简单的基本特性。）首先考虑如图 6.6(a) 中的线路 $ABCD$。这路线在垂直于导线的平面中；事实上我们只需在这平面中进行积分，因为 **B** 没有平行于导线的分量。由于以下原因 **B** 沿这个路线的线积分是零。路线 BC 及 CD 是垂直于 **B** 的，对积分没有贡献。沿 AB 的 **B** 为沿 CD 的 **B** 的 r_2/r_1 倍；但是 CD 长度是 AB 长度的同样倍，因为这两个弧在导线处对着相同的角。所以这两个弧线的贡献是相等而是相反的，整个线积分为零。

由此得出，凡沿着由径向线段和弧所构成的任一闭合路线，如图 6.6(b) 中的路线的线积分也是零。由此可简捷地得出结论，即沿着不包围导线的任一闭路的线积分是零。为了解决棱角的问题，我们只须指出沿一小三角形路线的积分相当精确地为零就可以了。在电场的情形也涉及到了同样的步骤。



(a) 路线在垂直于导线的平面内。



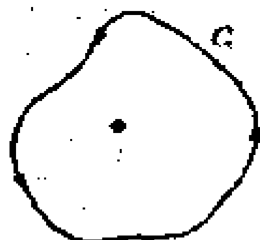
(b) 由径向线段和圆弧组成的路线。



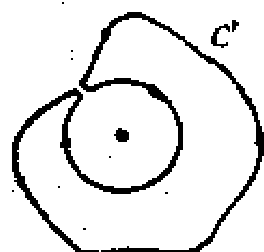
(c) 不包围导线的路线。



(d) 包围导线的圆形路线。



(e) 包围导线的弯曲路线。



(f) 不包围导线的圆和弯曲路线。



(g) 包围导线 N 圈的通路。

图 6.6　磁场 **B** 沿任一闭合路线的线积分只和被包围的电流有关。

不包围导线的，象图 6.6 (c) 那样的路线．如果是由一根线绳作成的，可以任意地被拉成各种样子．沿着任何一个这样的路线的线积分都是零．

我们现在考虑如图 6.6(d) 中的包围导线的圆形路线．周长是 $2\pi r$，场强是 $2I/cr$，并且各处都平行于路线，所以沿这特定路线的线积分是$(2\pi r)(2I/cr)$，即 $4\pi I/c$．我们认为任一围绕导线一周的迴路的线积分一定给出相同的值．譬如考虑图 6.6 (e) 的弯曲路线 C．我们作一路线 C'，如图 6.6(f)，它是由路线 C 和一个圆形路线组成，但不包围导线．沿 C' 的线积分必定是零，因而沿 C 的积分一定是沿圆的积分的负值，我们已经算出沿圆的积分是 $4\pi I/c$．显然，它的符号决定于路线的方向．我们的普遍结论是：

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{4\pi}{c} \times \text{迴路所包围的电流.} \tag{10}$$

当路线环绕电流导线一次时，式(10)是适用的．显然，当路线迴绕 N 次时，如图 6.6(g)，其线积分的值也必为式 (10) 的 N 倍．

我们曾着重指出磁场只决定于电荷的迁移率，即每秒钟通过电路中一点的电量．图 6.7 表示一电流为 5 mA（毫安）的电路，相当于 15×10^6静电单位/秒．载流子的平均速度的变化是在一部分电路的10^{-4}厘米/秒和另一部分电路的0.8 倍的光速范围之间．围绕电路的每一部分的 **B** 的沿闭合路线的线积分都是相同的，即：

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{4\pi I}{c} = \frac{4\pi \times (15 \times 10^6 \text{ 静电单位/秒})}{3 \times 10^{10} \text{厘米/秒}}$$

$$= 0.00628 \text{ 高斯·厘米.} \tag{11}$$

我们已经证明过的对于长的直线电流的情形，通过叠加

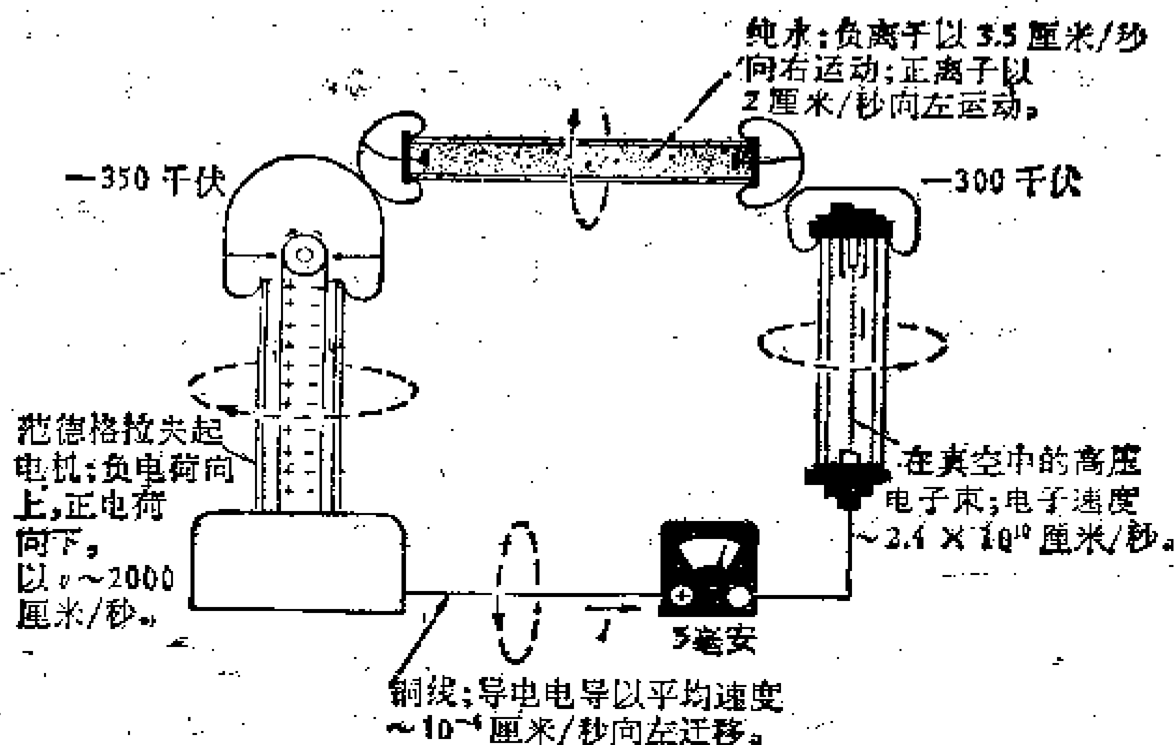


图 6.7 围绕这线路各部分的 **B** 的线积分都有完全相同的值，虽然各部分的载流子的速度是完全不同的。

方法可以证明对于任何直线电流系的场也是适用的．图 6.8 中的几根导线中通过不同方向的电流．如果式(10)对其中一根导线的磁场是适用的，那末它也一定适用于总场，每一点的

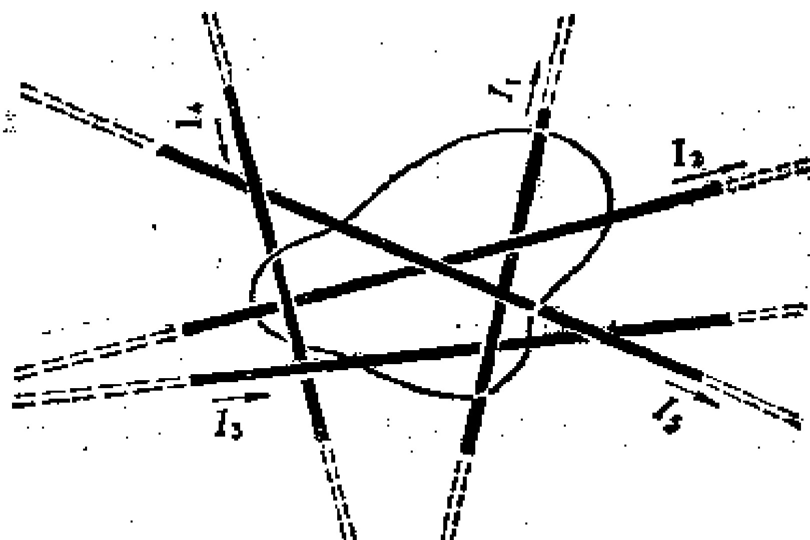


图 6.8 直线电流的叠加．沿箭头所示的回路上 **B** 的线积分等于 $(4\pi/c)(-I_4+I_5)$。

总场是各导线的场的矢量和. 这是一相当复杂的场. 但是，只要注意这条路线围绕哪些导线以及路线的方向，我们就能预言沿着这条闭合路线的 $\mathbf{B}$ 的线积分的值.

但是我们感兴趣的是长直导线以外的其他情形. 我们需要知道任何类型的电流分布的磁场——例如迴路电流的磁场. 结果弄清楚，这些更普遍的场也完全服从这同样的定律，即式(10). 围绕通过相同电流的弯曲导线的 $\mathbf{B}$ 的线积分和围绕长直导线的 $\mathbf{B}$ 的线积分是相等的. 这超出了我们现在所推导过的范围，所以我们这里必须认为它是为实验结果所证实的假设.

要用最普遍的方法表明这一定律，我们必须讨论电流的体分布. 一般的稳定电流分布是用体电流密度 $\mathbf{J}(x, y, z)$ 来描述的，$\mathbf{J}$ 在各处是不同的，但不随时间改变. 导线里的电流只是一个特殊情形，在导线中 $\mathbf{J}$ 有很大的值，但在其它地方都是零. 我们在第四章中曾讨论过电流的体分布，在那里我们指出对于不随时间变化的电流，$\mathbf{J}$ 必定满足连续性方程，即电荷守恒条件，

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0. \tag{12}$$

在有电流流过的区域里取一闭合曲线 C. 被 C 所包括的全部电流是通过跨在以 C 为边界的面的 $\mathbf{J}$ 的通量，即对面 S 的面积分 $\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$ (参阅图 6.9). 所以关系式(10)的一般表达式可写作

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{4\pi}{c} \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}. \tag{13}$$

把此式和在第二章中我们所提出的斯托克斯定律，

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{a} \tag{14}$$

相比较，我们看出式(13)的等效表达式是

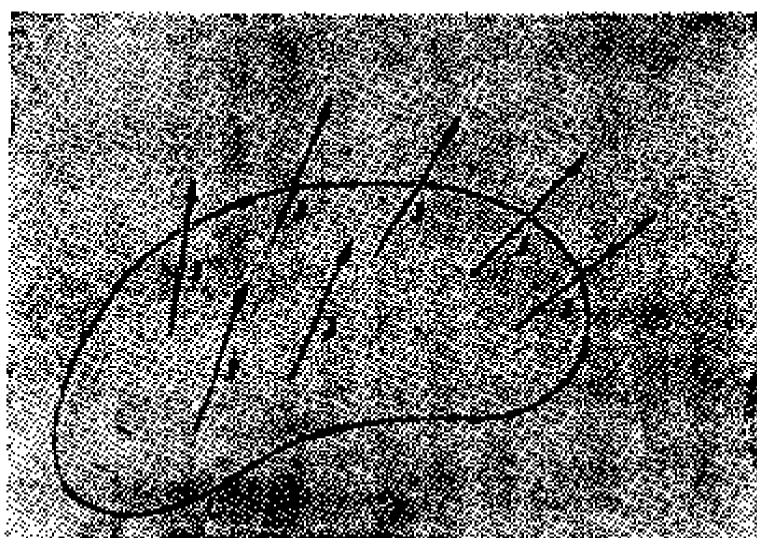


图 6.9 **J** 是局部电流密度．**J** 在 S 上的面积分是被曲线 C 所包围的电流．

$$\boxed{\text{curl}\,\mathbf{B} = \frac{4\pi\mathbf{J}}{c}.} \tag{15}$$

这是磁场和作为它的源的运动电荷之间的最简单最一般的关系式。

但是已知 $\mathbf{J}(x, y, z)$，式（15）还不足以确定 $\mathbf{B}(x, y, z)$，因为许多个不同的矢量场可以有同一旋度．我们还需要其他的条件来补充它．我们最好考虑一下 **B** 的散度．我们回到一根直导线的磁场上去，我们注意到这场的散度是零．在任何处都不可能画出这样的一个小匣，即使包围导线的小匣，能有净向内的或净向外的通量通过它．请注意图 6.10 中的匣子 V_1 和 V_2 都没有净通量，并且能缩小到零而不出现任何通量，这就够了．对于这个场，$\text{div}\,\mathbf{B} = 0$，因而对这种场的所有叠加也是如此。我们再一次假定这一原理能扩充到任意电流分布的场，所以条件

$$\boxed{\text{div}\,\mathbf{B} = 0} \tag{16}$$

和式(12)是同形式的一对。

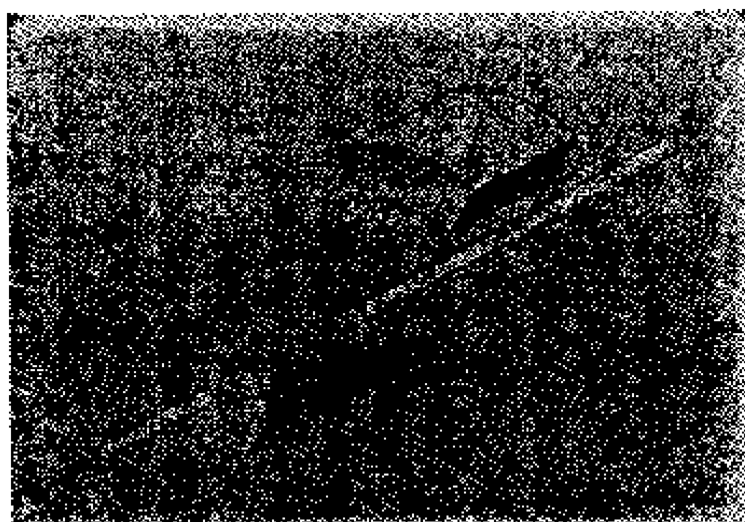


图 6.10 通过任一匣子的 $\mathbf{B}$ 的净通量都是零.

如果 $\mathbf{J}$ 已经给出，式(15)和式(16)合在一起几乎能够唯一地确定 $\mathbf{B}$. 假如我们有两个不同的场 $\mathbf{B}_1(x, y, z)$ 和 $\mathbf{B}_2(x, y, z)$，它们都满足式(15)和式(16)，它们的差 $\mathbf{B}_1-\mathbf{B}_2$ 将是一个各处的散度为零，旋度为零的场. 这样一个场将是一个恒矢量 $\mathbf{B}_0$，它在空间各点都是相同的. 所以除了可能加上一个充满整个空间的一个恒定场之外，条件 $\mathrm{curl}\,\mathbf{B}=4\pi\mathbf{J}/c$ 及 $\mathrm{div}\,\mathbf{B}=0$ 唯一地确定一已知的电流分布的磁场. 把这些条件和静电场的对应条件比较一下是很有意义的. 静电场的条件是

$$\mathrm{div}\,\mathbf{E}=4\pi\rho \quad 及 \quad \mathrm{curl}\,\mathbf{E}=0. \tag{17}$$

但是，在静电场的情形，我们是从库仑定律开始的，它直接地表示每一电荷对任一点的电场的贡献. 这里我们将从相反的途径来取得这种类型的关系式[1]. 我们用势函数来完成这一目的.

---

1) 同学可能怀疑为什么我们不能从和库仑定律相对应的定律出发来处理电流之间的相互作用呢? 这是因为一段电流导线不象一个电荷那样，我们不能把它实际隔离出来成为一个独立的物体. 不可能作个实验来确定一部分电路的场；如果其余部分的电路不存在，则电流不可能不破坏连续性条件而保持稳定.

6.3 矢 势

我们看到标势函数 $\varphi(x, y, z)$ 给我们提供了一个计算电荷分布的静电场的简单方法. 假如有一电荷分布 $\rho(x, y, z)$, 在任一点 (x_1, y_1, z_1) 的势由体积分

$$\varphi(x_1, y_1, z_1) = \int \frac{\rho(x_2, y_2, z_2) dv_2}{r_{12}} \tag{18}$$

给出. 这积分遍及全部电荷分布, r_{12} 是从 (x_2, y_2, z_2) 到 (x_1, y_1, z_1) 之间的距离. 电场 $\mathbf{E}$ 由 φ 的负梯度得出

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\,\varphi. \tag{19}$$

同样的技巧在这里行不通, 因为 $\mathbf{B}$ 的特性是根本不同的. $\mathbf{B}$ 的旋度不一定是零,所以,一般地说, $\mathbf{B}$ 不可能是一个标势的梯度. 但是,我们知道另一种矢量导数,即旋度. 实际情况是, 我们能有效地把 $\mathbf{B}$ 用矢函数的旋度表出, 而不用标函数的梯度表出. 即

$$\boxed{\mathbf{B} = \text{curl}\,\mathbf{A}.} \tag{20}$$

由于显著的相似性,我们把 $\mathbf{A}$ 叫做矢势. 到这里还看不出来为什么这个办法是有用的. 在我们继续研究的过程中必将发现它的好处. 因为对于任何 $\mathbf{A}$, $\text{div}\,\text{curl}\,\mathbf{A} = 0$[1], 所以式(16)自动地得到满足,这是令人鼓舞的. 或换一种方式说, $\text{div}\,\mathbf{B} = 0$ 这一事实给我们提供了用另一个矢量函数的旋度代表 $\mathbf{B}$ 的可能性. 我们现在的工作是要找出当电流分布 $\mathbf{J}$ 给定时, 怎样去计算 $\mathbf{A}$, 从而式(20)能够给出正确的磁场来. 由式(15)来看, $\mathbf{J}$和$\mathbf{A}$之间的关系式是

$$\text{curl}\,(\text{curl}\,\mathbf{A}) = \frac{4\pi\mathbf{J}}{c}. \tag{21}$$

1) 如你不熟悉这一事实,可参阅习题2.15.

式(21)是矢量方程式，实际上是三个方程式. 我们把其中的一个，例如 x 分量方程算出来. curl $\mathbf{B}$ 的 x 分量是 $\partial B_z/\partial y - \partial B_y/\partial z$. $\mathbf{B}$ 的 z 和 y 分量分别是

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}, \quad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}. \qquad (22)$$

因此，式(21)的 x 分量部分是

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) = \frac{4\pi J_x}{c}, \qquad (23)$$

假定这些函数的偏微商的次序可以互换. 利用这一点，再少许整理一下，式(23)可以这样写：

$$-\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_y}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)$$
$$= \frac{4\pi J_x}{c}. \qquad (24)$$

为了使方程更对称些，我们在左边加上并减去相同的项 $\partial^2 Ax/\partial x^2$：

$$-\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)$$
$$= \frac{4\pi J_x}{c}. \qquad (25)$$

我们知道前三项是负的拉普拉斯算子作用于 A_x 上. 在括号里的量是 $\mathbf{A}$ 的散度. 现在我们对于 $\mathbf{A}$ 的构造可以有某些自由. 我们注意的是它的旋度，它的散度我们可任意规定. 我们要求[1]

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \qquad (26)$$

1) 为了看一看为什么我们可以自由地这样作，假设我们有一个 $\mathbf{A}$，它符合 curl $\mathbf{A} = \mathbf{B}$，但 div$\mathbf{A} = f(x,y,z) \neq 0$. 把 f 看作静电场中的电荷密度 ρ 那样，显然我们可以找出这样一个场 $\mathbf{F}$，当作静电场 $\mathbf{E}$ 的模拟量，使得 div$\mathbf{F}=f$. 但是我们知道这种场的旋度是零. 所以我们可以把 $-\mathbf{F}$ 叠加到 $\mathbf{A}$ 上，构成新的场，这场具有正确的旋度和零的散度.

换句话说，在满足我们的要求 $\text{curl}\,\mathbf{A}=\mathbf{B}$ 的各种函数中，我们选取的只是那些散度为零的函数。在这样的情形下，式(25)的这一部分就被消除掉，只剩下

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}=-\frac{4\pi J_x}{c}. \tag{27}$$

J_x 是已知的 x, y, z 的标函数。把式(27)和泊松方程式(2.70)相比，后者是

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=-4\pi\rho, \tag{28}$$

这两式在形式上是完全相同的。我们已经知道了怎样求式(28)的解。式(18)中的体积分是它的表达式。所以式(27)的解一定是

$$A_x(x_1, y_1, z_1)=\frac{1}{c}\int\frac{J_x(x_2, y_2, z_2)dv_2}{r_{12}}, \tag{29}$$

其他的分量也一定满足相似的公式。可以把它们组合成一个简单的矢量公式

$$\boxed{\mathbf{A}(x_1, y_1, z_1)=\frac{1}{c}\int\frac{\mathbf{J}(x_2, y_2, z_2)dv_2}{r_{12}}.} \tag{30}$$

还有一个潜在的困难。为了得到式(27)，我们规定了 $\text{div}\,\mathbf{A}=0$。我们怎样知道式(30)给出的 $\mathbf{A}$ 会有这一特性呢？幸而可以证明它是这样的。

我们考虑一载有电流 I 的长直导线，作为一个矢势的例子。图 6.11 中的电流从纸面向我们流出，沿 z 轴的正方向流动。我们知道直线电流的磁场是怎样的。这些场线如在图 6.5 中曾经画过的，是一些圆。在图 6.11 中画出了一些。$\mathbf{B}$ 的大小是 $2I/cr$。在圆周方向引用单位矢量 $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$，可把矢量 $\mathbf{B}$ 写为

$$\mathbf{B}=\frac{2I\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{cr}. \tag{31}$$

注意单位矢量 $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ 是 $-\sin\varphi\hat{\mathbf{x}}+\cos\varphi\hat{\mathbf{y}}$，我们可以把这式子用 x 和 y 表示出来：

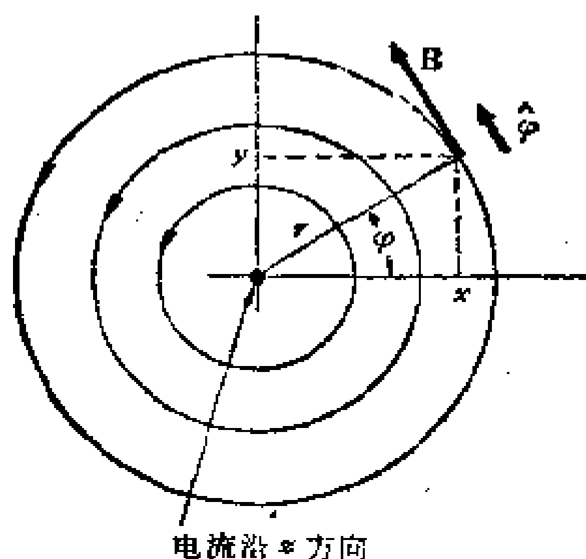


图 6.11　围绕线电流的一些场线．电流从纸面流出，朝着我们流来．

$$\mathbf{B}=\frac{2I(-\sin\varphi\hat{\mathbf{x}}+\cos\varphi\hat{\mathbf{y}})}{c\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{2I}{c}\left(\frac{-y\hat{\mathbf{x}}+x\hat{\mathbf{y}}}{x^2+y^2}\right)\tag{32}$$

满足 $\nabla\times\mathbf{A}=\mathbf{B}$ 的一个矢函数 $\mathbf{A}(x,y,z)$ 是

$$\mathbf{A}=-\hat{\mathbf{z}}\frac{I}{c}\ln(x^2+y^2).\tag{33}$$

我们计算 $\nabla\times\mathbf{A}$ 的分量来证明这一结论

$$(\nabla\times\mathbf{A})_x=\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}=\frac{-2Iy}{c(x^2+y^2)},\ (=B_x)$$

$$(\nabla\times\mathbf{A})_y=\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}=\frac{+2Ix}{c(x^2+y^2)},\ (=B_y)$$

$$(\nabla\times\mathbf{A})_z=\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}=0.\qquad (=B_z)\tag{34}$$

当然这并不是可以作这个特殊的 $\mathbf{B}$ 的矢势的唯一函数．在式(33)的 $\mathbf{A}$ 上可以加上任何旋度为零的矢函数．这对于导线外的全部空间都是适用的．在导线内部 $\mathbf{B}$ 是不同的，因此 $\mathbf{A}$ 也是不同的．求出在一固体圆导线内部的适当的矢势函数是不困难的——参阅习题 6.13．

顺便说明一下，上述特殊例子中的 $\mathbf{A}$ 不能从式(30)得出．由于导线的无限远的范围，这个积分是发散的．这使我们想起在第二章中对带电导线的电场建立标势时所遇到的困难．诚然，这二个问题是密切联系着的，我们从它们相同的几

何形状以及式(30)和式(18)的相似性就能够预料出来的。我们从式(2.19)看到和线电荷问题相适应的标势是 $-\lambda\ln(x^2+y^2)+$ 任意常数。这是指定某任意点为零电位，这个点既不在导线上，也不在无穷远处。标势及式(33)的矢势在原点和在无穷远处都是奇点。

6.4 任一载流导线的场

图 6.12 表示一载有电流 I 的迴路，在点 (x_1, y_1, z_1) 处

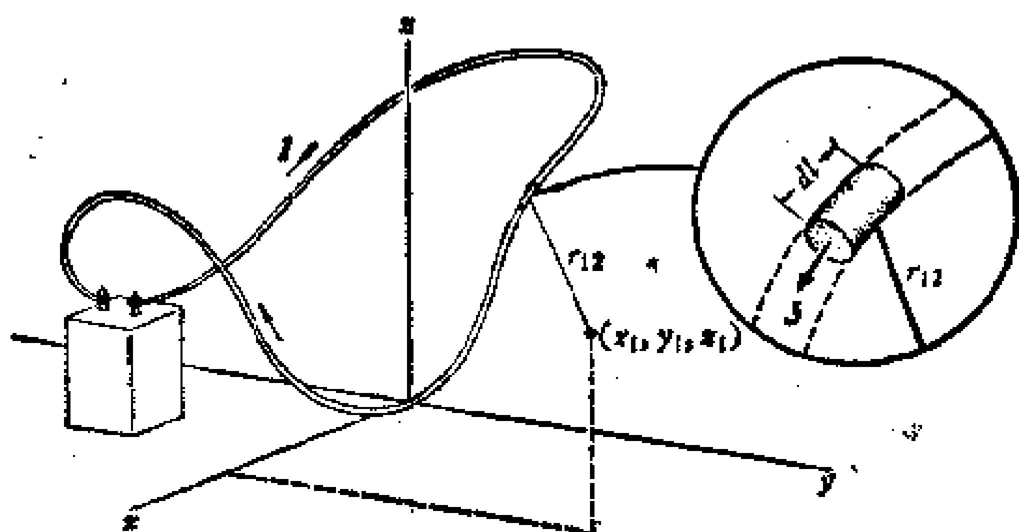


图 6.12 电流迴路的每一电流元对在点(x_1,y_1,z_1) 的矢势 **A** 都有贡献。

的矢势 **A** 按照式(30)，对整个环路积分得出。对于细导线中的电流我们可以取长为 $d\mathbf{l}$ 的短段作为体积元 dv_2。电流密度 J 是 I/a，a 是导线的截面积，$dv_2 = ad\mathbf{l}$。所以 $\mathbf{J}dv_2 = Id\mathbf{l}$，如果我们使矢量 $d\mathbf{l}$ 指向正电流的方向，便可简单地用 $Id\mathbf{l}$ 代替 Idv_2。所以对细导线来说，我们可以把式(30)写作对线路的线积分：

$$\mathbf{A} = \frac{I}{c}\int\frac{d\mathbf{l}}{r_{12}}. \tag{35}$$

计算各处的 **A**，然后再取 **A** 的旋度来计算 **B**，这可能是一个冗长的工作，把对 **A** 的线积分中的一部分贡献划分

出来可能对解题更有帮助，考虑在原点处的电流元的贡献，在原点处正巧电流沿 x 方向流动(图 6.13)．我们把这段的长度

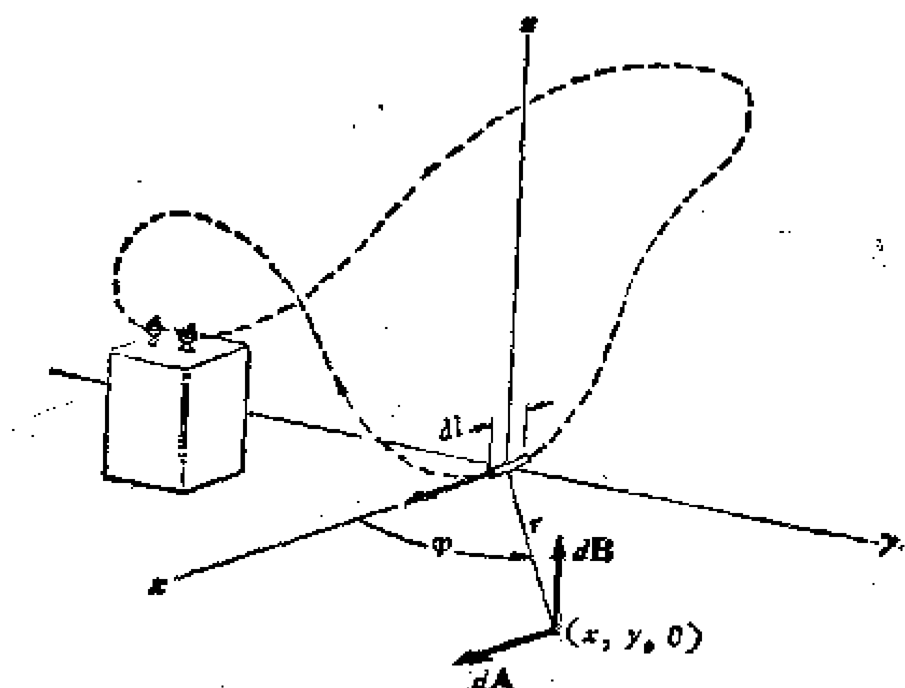


图 6.13 如果我们能求出图中所示的电流元对 **A** 的贡献 $d\mathbf{A}$ 便可用 $\mathbf{B}=\mathrm{curl}\mathbf{A}$ 来计算 **B**，求出它对 **B** 的贡献．

用 dl 表示．令 $d\mathbf{A}$ 为这部分积分对 A 的贡献．那末在 xy 平面中的点 $(x, y, 0)$ 处，$d\mathbf{A}$ 指向正 x 方向，其表达式是

$$d\mathbf{A}=\hat{\mathbf{x}}\frac{(I/c)dl}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{36}$$

从对称性来看，显然这部分 **A** 对 $\mathrm{curl}\mathbf{A}$ 的贡献一定垂直于 xy 平面．把 **B** 的相应部分用 $d\mathbf{B}$ 表示，则有

$$\begin{aligned}d\mathbf{B}=\mathrm{curl}\,(d\mathbf{A})&=\hat{\mathbf{z}}\left(-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\\&=\hat{\mathbf{z}}\frac{(I/c)dl\cdot y}{(x^2+y^2)^{3/2}}=\hat{\mathbf{z}}\frac{(I/c)dl\sin\varphi}{r^2}.\end{aligned} \tag{37}$$

由这结果看来，我们可以立即免于受特殊坐标系的限制．显然，最重要的是线元 dl 和从这线元到所要计算的场强 **B** 所

在的点为位．在这点上的场任一短的线段 $d\mathbf{l}$ 对 $\mathbf{B}$ 的贡献是垂于含有 $d\mathbf{l}$ 及 $\mathbf{r}$ 的平面的矢量，其大小为 $I dl \sin\varphi / r^2 c$，这里 φ 是 $d\mathbf{l}$ 和 $\mathbf{r}$ 之间的夹角．这可以用矢积简洁地写出来，其关系示于图 6.14中．

$$d\mathbf{B} = \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{cr^2}. \tag{38}$$

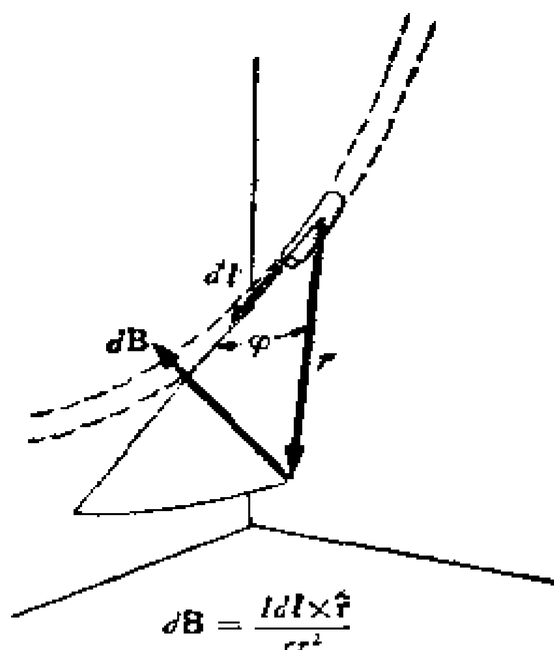


图 6.14 任何迴路的场可以采用每个迴路元贡献的这种关系来计算．

如果你熟悉矢量微积分的运算法则，便可以直接从式(35)过渡到式(38)．写出 $d\mathbf{B} = \nabla \times d\mathbf{A}$，令 $d\mathbf{A} = I d\mathbf{l}/cr$，把 ∇ 看作一矢量，把矢积的次序倒过来，并改变符号．这里 $d\mathbf{l}$ 是一常量，所以 ∇ 只作用在 $1/r$ 上，否则就不能不管 $d\mathbf{l}$ 而顺利地解决这一问题．我们还记得 $\nabla(1/r) = -\hat{\mathbf{r}}/r^2$（正如在库仑势过渡到库仑场中那样）．因此：

$$d\mathbf{B} = \nabla \times \frac{I d\mathbf{l}}{cr} = -\frac{I}{c} d\mathbf{l} \times \nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{I}{c} d\mathbf{l} \times \left(-\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\right)$$

$$= \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{cr^2}. \tag{39}$$

历史上，式(38)被称为毕奥-萨伐（Biot-Savart）定律．式(38)的意义是这样的：如果取这一公式所给出的每一线元的贡献，并沿整个电路积分以计算 $\mathbf{B}$，则所求得的 $\mathbf{B}$ 是正确的．正如在第 6.2 节末附注中所指出的，一部分电路的贡献在物理上是不能识别的．实际上式(38)并不是得出正确 $\mathbf{B}$ 的唯一可用的公式——可以给它加上任一沿闭合迴路积分为

零的函数．

一旦矢势为我们完成了一项重要任务以后，似乎我们就可以放弃它了．的确，实际上，既然我们有了公式(38)，直接从电流系计算磁场，常比先求矢势容易．我们将在下节作几个例题．但是由于更深的理由，矢势是重要的．首先它对我们显示出静电场 **E** 和它的电荷源之间的关系及磁场 **B** 和稳定电流之间的关系有明显的相似．它的最大的用处将在研究随时间改变的场和电磁辐射的问题中显示出来．

6.5 环和线圈的场

图 6.15(a) 表示半径为 b 的圆环状的细载流导线．我们

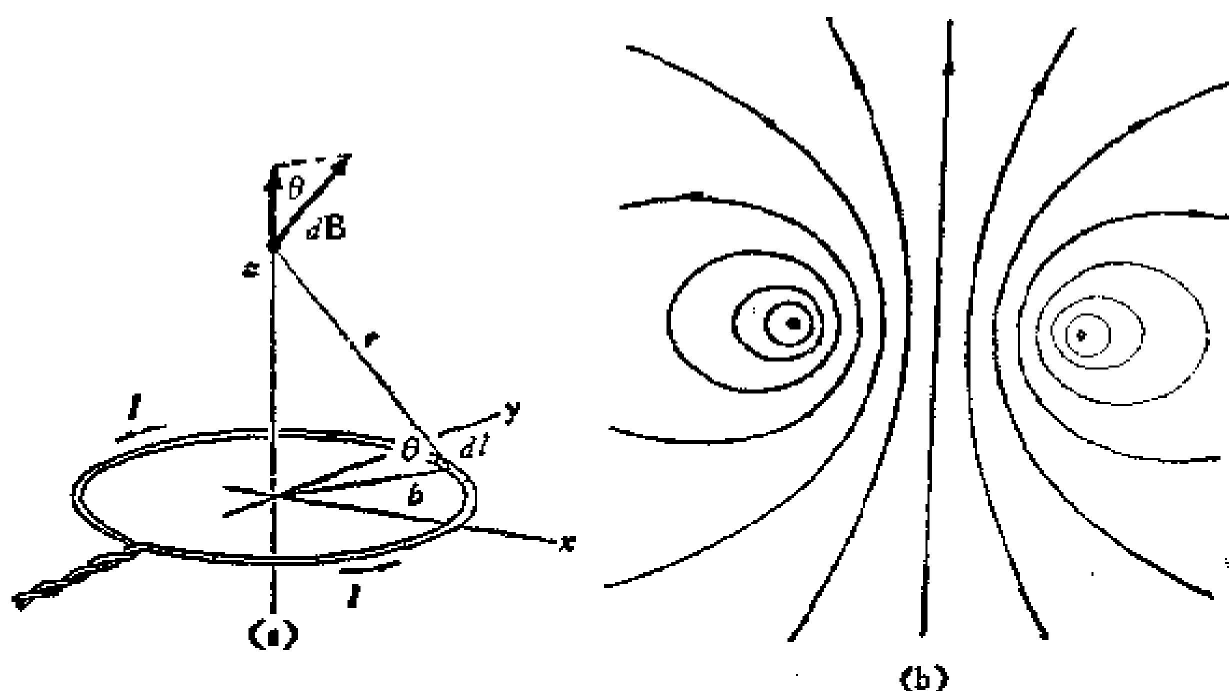


图 6.15 环电流的磁场．(a) 计算轴上的场．(b) 一些场线．

不需要任何计算就能够预料到这个源的磁场一定象图 6.15 (b) 所画的那样，这图表示通过对称轴的平面上的一些场线．这个场从整体来看一定是对这个轴，图 6.15(a) 中的 z 轴，旋转对称的．并且这些场线本身一定是对这圆环的面，xy 面，

对称的．在非常靠近导线的地方，这场和靠近一长直导线的场相似，因为离环远的部分在这地方是相对地不重要的．

应用式(38)能容易地把在轴上的场计算出来．环路的每一线元 $d\mathbf{l}$ 都贡献一垂直于 $\mathbf{r}$ 的 $d\mathbf{B}$．因为我们知道在轴上的总场必定指向 z 方向，所以我们只需计算 $d\mathbf{B}$ 的 z 分量．

$$dB_z = \frac{Idl}{cr^2}\cos\theta = \frac{Idl}{cr^2}\frac{b}{r}, \tag{40}$$

沿整个环路积分，简单地得 $\int dl = 2\pi b$，所以在轴上任一点 z 处的场是

$$B_z = \frac{2\pi b^2 I}{cr^3} = \frac{2\pi b^2 I}{c(b^2+z^2)^{3/2}} \quad \text{(在轴上的场)}. \tag{41}$$

在环路的中心，$z=0$，场的大小是

$$B_z = \frac{2\pi I}{cb}. \quad \text{(在中心的场)} \tag{42}$$

图 6.16(a) 所示的圆柱形线圈，通常称为螺线管．我们假定导线是紧密均匀分布的，因此沿圆柱体每厘米长度的圈

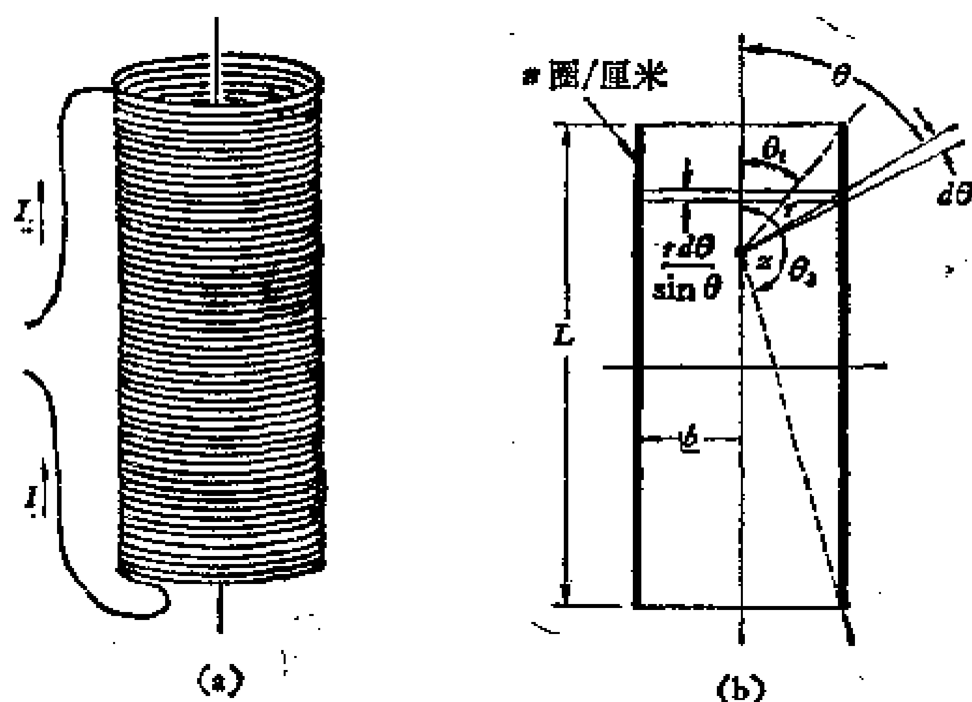


图 6.16 (a) 螺线管．(b) 计算螺线管轴上的磁场．

数是常数 n. 这电流的线路实际上是螺旋形的，但是如果线圈很多，而且是紧密排列的，我们可以不管这个，而把整个螺线管看作和一束电流环等效. 然后我们便可应用式(41)作为基础来计算这线圈轴上任一点 z 处的磁场. 首先计算从 z 点画出的和轴线成角 θ 及 $\theta+d\theta$ 的两个半径之间所包括的电流环的贡献. 在图 6.16(b) 中所划出的这段螺线管的长度是 $rd\theta/\sin\theta$，这相当于载有电流为 $Inrd\theta/\sin\theta$，这相当于载有电流为 $Inrd\theta/\sin\theta$ 的环. 因为 $r=b/\sin\theta$，这环对轴向场的贡献是

$$dB_z=\frac{2\pi b^2}{cr^3}\frac{Inrd\theta}{\sin\theta}=\frac{2\pi In}{c}\sin\theta d\theta. \tag{43}$$

在极限 θ_1 及 θ_2 之间积分，得

$$B_z=\frac{2\pi In}{c}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta d\theta=\frac{2\pi In}{c}(\cos\theta_1-\cos\theta_2). \tag{44}$$

我们利用了式(44)，在图 6.17 中画出线圈轴线上的场强，轴的长度等于线圈直径的四倍. 纵坐标是场强 B_z，其值是

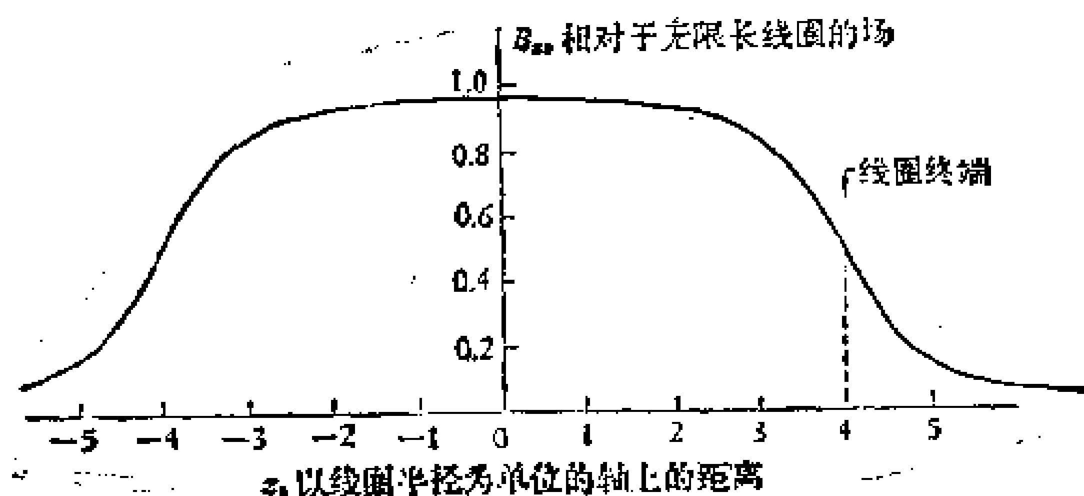


图6.17 在图 6.18 中的螺线管轴上的场强 B_z.

相对于具有每单位长度内有相同的圈数，每圈内流过相同电流的无限长的螺线管的场强标出的. 对于无限长线圈 $\theta_1=0$，$\theta_2=\pi$，所以

$$B_z = \frac{4\pi In}{c}.\ （无限长螺线管） \tag{45}$$

在"4 比 1"线圈的中心的场和这个值差不多一样大小，并且它几乎保持不变地一直到线圈的末端.

图 6.18 表示这样大小比例的线圈中及其周围的磁场线.

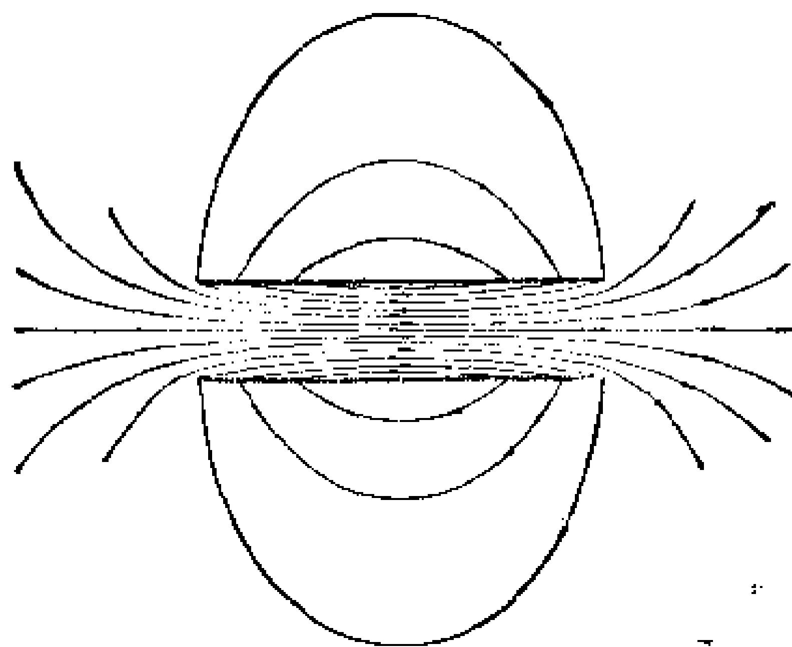


图 6.18　在螺线管中及其周围的场线.

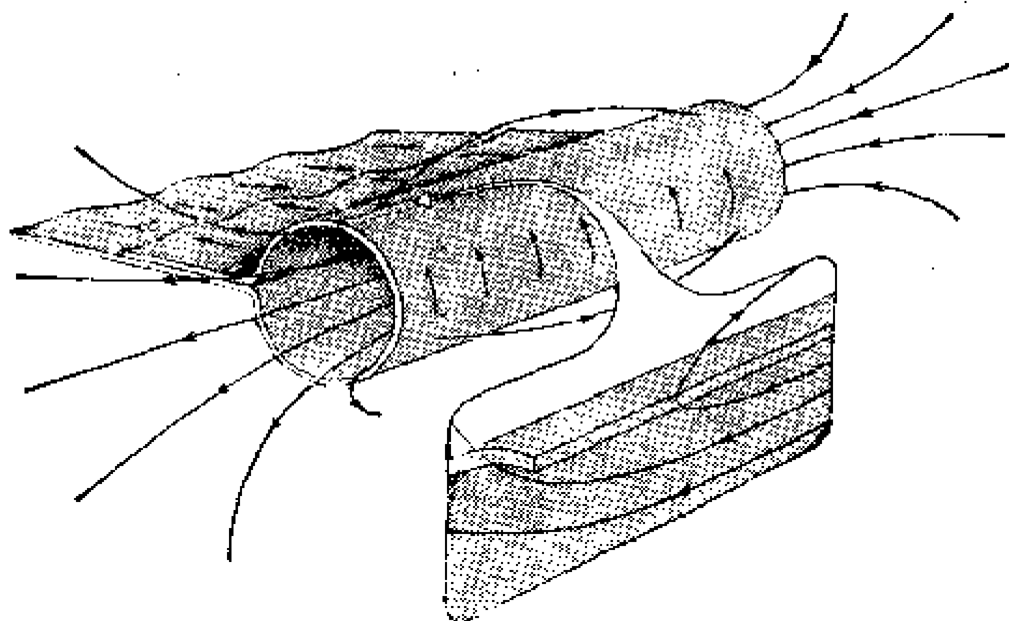


图 6.19　由单层导电圆筒构成的螺线管. 插图表示在通电流的导体中场线是怎样改变方向的.

注意有一些场线确实是穿过绕线的. 圆柱形的电流层对磁场来说是一个不连续面. 当然，如果我们仔细地考察导线附近的磁场，我们不会发现任何尖锐的曲折，但我们将发现围绕和穿过各个导线处有极复杂的波浪形的图象.

我们完全可以用一薄的宽的带状导体作成单匝的长螺线管. 如图 6.19 的样子. 我们的计算和图 6.18 中的图形可以正确地应用到这一情形中，只是用薄片中每厘米宽度流过的电流代替量 nI 即可. 如图 6.19 中的插图所示，穿过管壁场线的方向的改变，完全发生在薄片的厚度内.

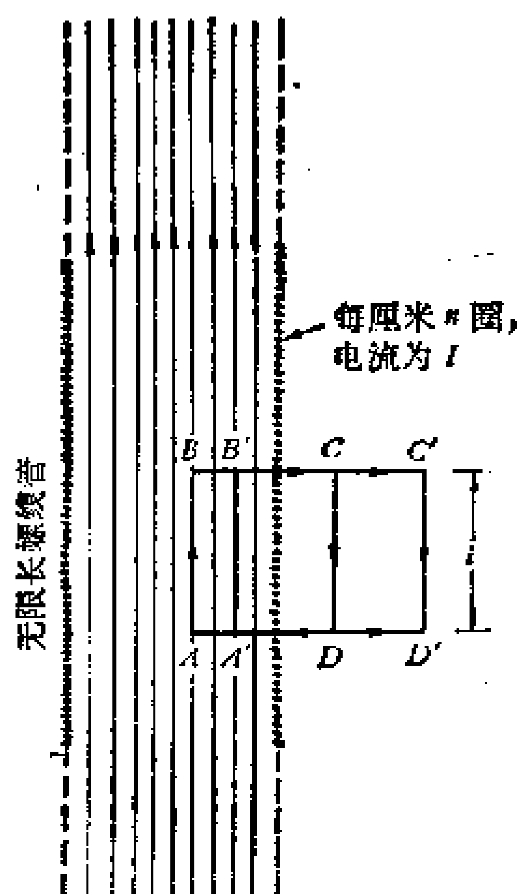


图 6.20 表示在无限长螺线管外部的场必为零.

我们不必引用得到式(45)时所作的分析，便可求得无限长螺线管的场. 在无限长螺线管中，显然沿轴向座标 z，不会有任何变化. 场在任何处都平行于 $\hat{\mathbf{z}}$. 我们来研究图 6.20 中绕矩形路线 $ABCDA$ 的 $\mathbf{B}$ 的线积分. 水平的边没有贡献. CD 边也最好给出零值，因为如果沿 CD 的线积分有一定的值，那末沿任一其他这样的边的积分，例如 $C'D'$，也应给出同样的值，这样在线圈外部的所有空间都将会充满同样强度的磁场. 因此，我们断定外部的磁场必为零[1]. 这样就剩下

1) 为什么在这样的螺线管的外部空间不能产生均匀的场? 毕竟在我们要讨论的无限大的面电流层的两侧的半空间内都充满均匀的场. 但是把螺线管制得多么细都可以，如果一个直径几乎等于零的螺管在任何处能产生一有限的场，这是奇怪的. 你可能想出一个更为确切的论证来.

$\mathbf{B}$ 的沿 AB 的线积分了，它等于 $B_z l$. 全部的线积分必等于 $4\pi/c$ 乘以被包围的电流. 所以 $B_z l = (4\pi/c)nIl$，或 $B_z = 4\pi nI/c$，这和式(45)一致.

6.6 在电流层处 B 的改变

在图 6.19 的例子中的螺线管是仅由一弯曲的薄层电流构成的. 我们来看一个更简单的情形，一个平的无限大的电流层. 可以设想这是一个厚度均匀的铜板，其中各处都流着等密度同方向的电流. 为了指明方向，我们把电流层置于 xz 平面内，令电流沿 x 方向流. 因为我们假定这电流层是无限大的，没有边缘，所以难于把它画出来！我们在图 6.21 中画出了从电流层上切割出来的一部分；设想其余的部分伸及整个平面. 电流层的厚度不是很重要的，但我们可以假定它有一定的厚度 t. 如果在金属中的电流密度是 J，并以(静电单位/秒)/厘米^2 为单位，那末在 z 方向上每一厘米高度的电流带上的电流将是 Jt 静电单位/秒. 我们把它叫做"面电流密度"，或"层电流密度"，并用符号 $\mathscr{J}$，以区别于体电流密度 $\mathbf{J}$. $\mathscr{J}$ 的单位是(静电单位/秒)/厘米. 如果我们不考虑电流层本身内部的情况，$\mathscr{J}$ 是一有用的量. 我们将会看到，是 $\mathscr{J}$ 决定一侧的磁场到另一侧的磁场的变化.

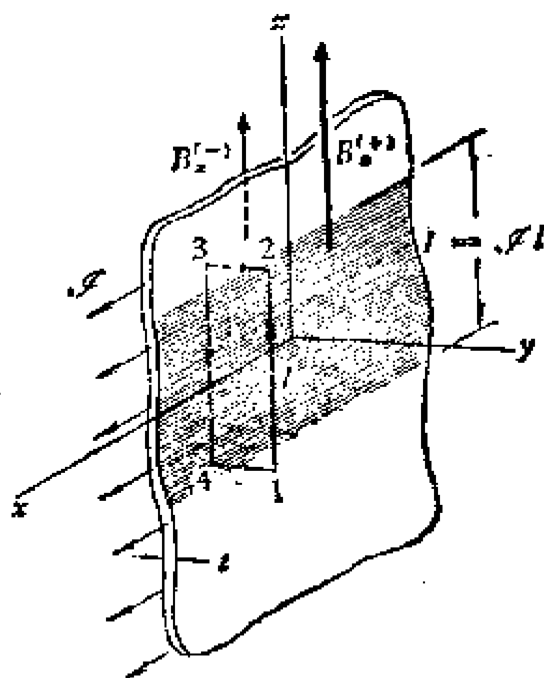


图 6.21 在面电流层处 B 的平行分量从一侧到另一侧一定有所改变.

图 6.21 的场不只是这电流层的场. 在 z 方向上存在着

另一个源的场。包括这电流层的效应在内的总磁场，由画在这电流层前面及后面的 **B** 矢量表示出来。

我们来看图 6.21 中沿长方形 12341 的 **B** 的线积分。一长边是在这表面的前面，另一长边在表面的后面，两短边穿透电流层。令 B_z^+ 表示紧靠表面前面的磁场的 z 分量，B_z^- 代表紧靠表面后面的磁场的 z 分量。这里我们所指的场是包括这电流层本身在内的所有的源的场。**B** 沿着这个长矩形的线积分简单地是 $l(B_z^+ - B_z^-)$。(即使有其他的源可导致平行于矩形的短边的场的分量，但可使短边比长边短得很多，因为我们假定在任何情形下电流层，与任何场变化的尺度相比，是很薄的。)这长方形包围的电流正好是 $l\mathscr{J}$。所以我们有关系式 $l(B_z^+ - B_z^-) = 4\pi\mathscr{J}l/c$，或

$$B_z^+ - B_z^- = \frac{4\pi\mathscr{J}}{c}. \tag{46}$$

可见密度为 $\mathscr{J}$ 的电流层使平行于表面，垂直于 $\mathscr{J}$ 的 **B** 的分量产生一突变。这使我们想到电荷层处的电场变化。**E** 的垂直分量是不连续的，变化的大小决定于面电荷密度。

如果这电流层是唯一的源，那末这场对这电流层自然是对称的。B_z^+ 是 $2\pi\mathscr{J}/c$，B_z^- 是 $-2\pi\mathscr{J}/c$。这情形画于图 6.22(a) 中。另外的一些情形，示于图 6.22(b) 及 (c) 中，电流层的场叠加在已经存在着的另一源的场上。假定有两个电流层，载有大小相同，方向反相的电流，如图 6.23 的截面图，在周围没有其他的源。电流的方向垂直于纸面，左侧的流出，右侧的流入。在电流层之间的磁场是 $4\pi\mathscr{J}/c$，在外部一点磁场也没有。当一对平行的载流的带或条，相对于他们的宽度来说距离靠得很近时，有些和这情形相似，如图 6.24 所示。在发电厂里分配大功率的电流的汇流条就是这种样子。

B 的改变发生在电流层之内，象我们在图 6.19 中所陈述

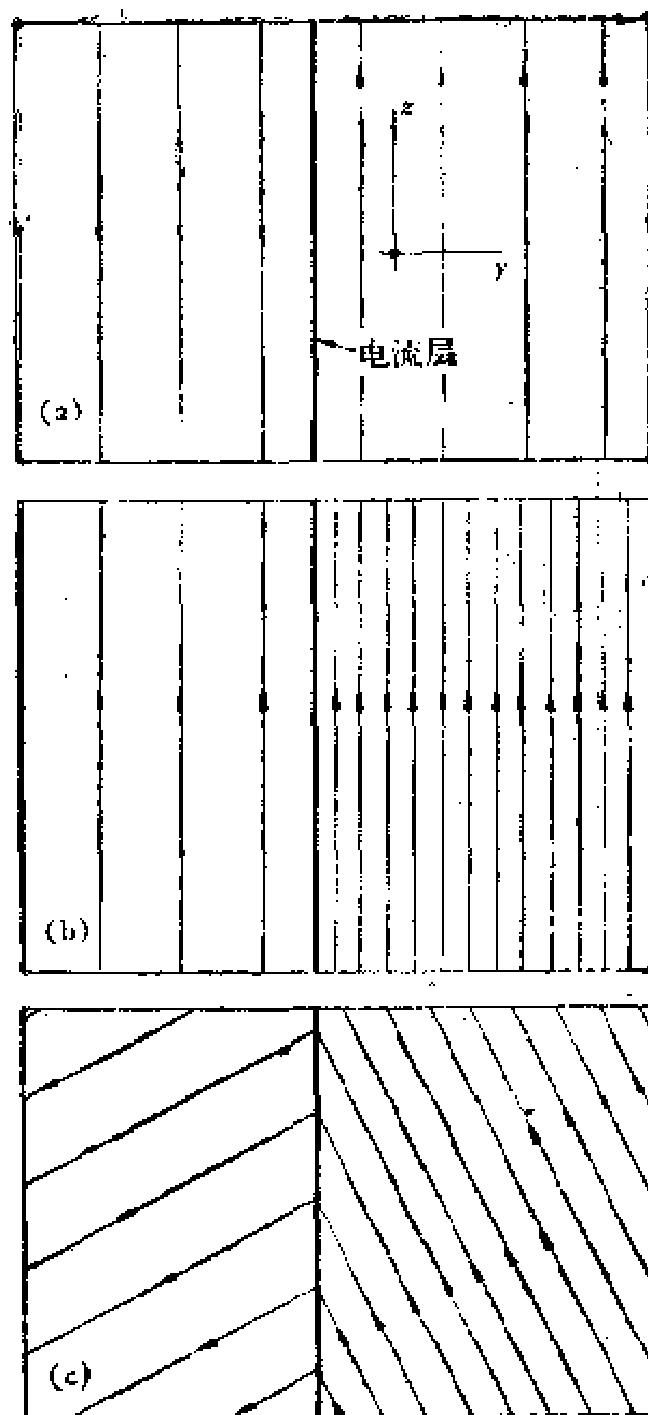


图 6.22　靠近电流层的总磁场的几种可能情况．电流沿 x 方向流动(从纸面流出)．(a)只有这电流层的场；(b)在 z 方向上叠加一均匀场．(和图 6.21 中的情形相象)；(c)在另一方向上叠加一均匀场．在每一情形中在穿过这电流层时，场分量 B_z 的变化都是 $4\pi \mathcal{J}/c$，分量 B_y 没有变化．

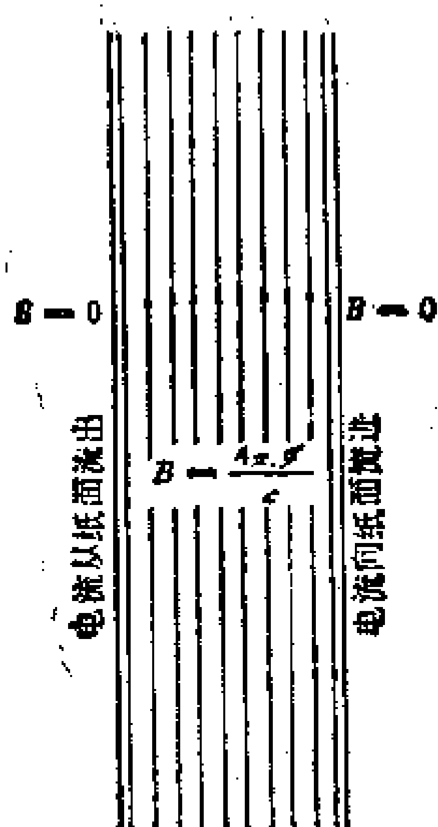


图 6.23 平行平面电流层之间的磁场.

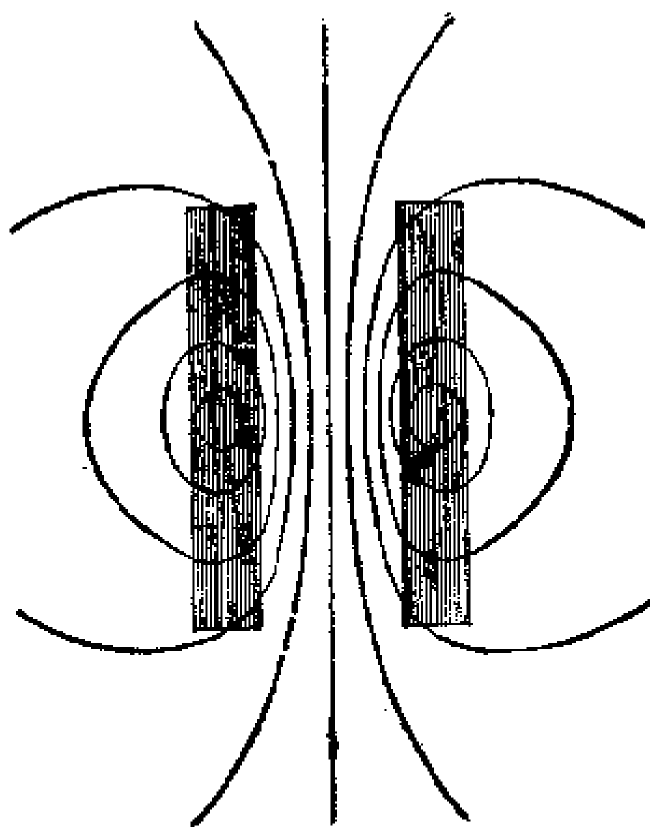


图 6.24 一对载有相反方向电流的汇流条的磁场截面.

的那样. 对于相同的 $\mathcal{J}$, 电流层越薄场的变换越突然. 我们在第 1 及第 2 章中研究在面电荷处 **E** 的垂直分量的不连续性时, 曾看到和这非常相似的情形. 当时提出作用在面电荷上的力的问题是很有启发性的, 我们这里也要提出同样的问题来.

我们研究电流层中每边长为 1 厘米的正方形部分. 包含在这部分中的电流是 $\mathcal{J}$, 电流路程的长度是 1 厘米, 假定在这厚度里电流分布是均匀的, 由这电流产生的平均场是 $\frac{1}{2}(B_z^+ + B_z^-)$. 所以作用在这部分电流分布上的力是

$$\text{作用在 1 厘米}^2\text{电流层上的力} = \frac{1}{2}(B_z^+ + B_z^-)\mathcal{J}/c. \quad (47)$$

根据式(46), 我们可以用 $(B_z^+ - B_z^-)/4\pi$ 代替 $\mathcal{J}/c$, 则每平

方厘米的力可表示为

$$每平方厘米的力 = \left(\frac{B_z^+ + B_z^-}{2}\right)\left(\frac{B_z^+ - B_z^-}{4\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{8\pi}[(B_z^+)^2 - (B_z^-)^2]. \tag{48}$$

这力垂直于表面，并和面积成比例，和由水静压力引起的应力相似．为了把符号弄清楚，我们可以把这一特殊的情形中的力的方向弄明白，例如图 6.23 中的力．在每一导体上的力都是向外的．看来好象高场强区就是高压力区．但是我们必须记住只是平行于表面的 **B** 的分量在决定这个力上起作用．

我们已经研究了一无限大平面的电流层，但是在任何弯曲面的紧邻地方，情形也是大致相同的．不论什么地方，若是平行于表面的**B**的分量从表面的一侧的 B_1 变到另一侧的 B_2，我们就可以作出结论：不仅有一电流层在表面中流过，而且这表面必定受到一$(B_1^2 - B_2^2)/8\pi$ 达因/厘米^{2}的垂直应力．这是*磁流体动力学*中的重要原理之一，磁流体动力学是研究导电流体的，是对电气工程师和天体物理学家有意义的课题．

6.7 电磁场怎样变换

一层面电荷如果作平行于自己的运动，则构成一面电流．如果表面上有一均匀电荷密度 σ 和这面一起以速度 v 滑动，面电流密度恰好是 $\mathcal{J} = \sigma v$．这一简单概念可以帮助我们了解当我们把一惯性系变换到另一惯性系时电磁场的量必将如何改变．

让我们想象平行于 xz 面的两个平面电荷层，如图 6.25 所示．这图只表示出面层的一部分；实际上这些面是延伸到无穷远的．在惯性系 F 中，坐标是 x, y, z，在一个面上的面

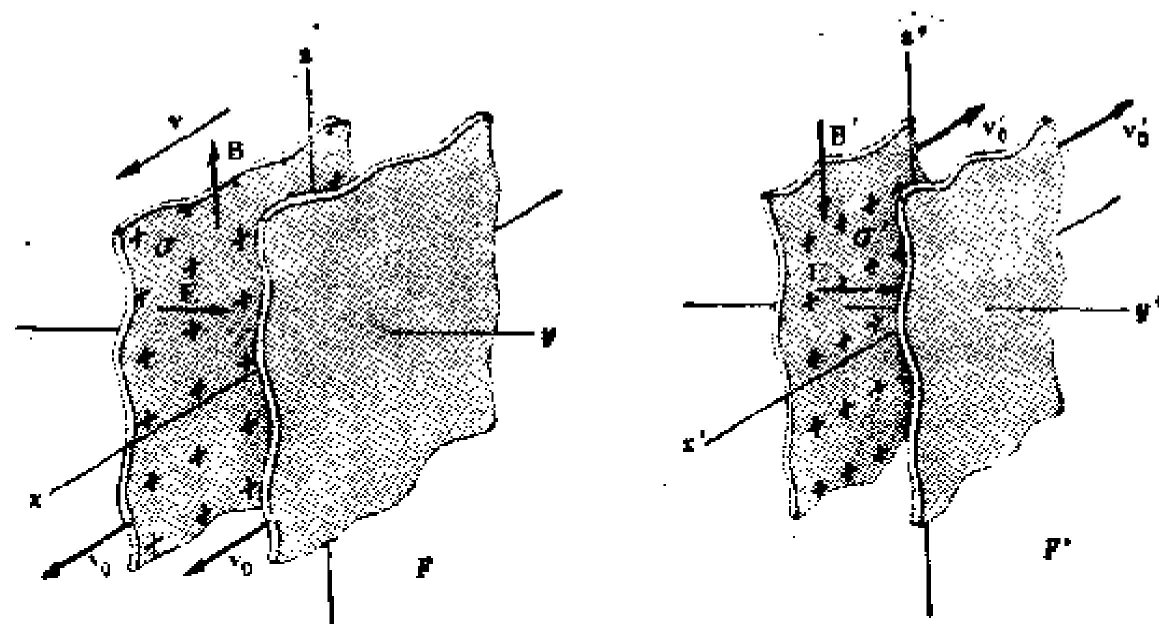


图 6.25　在 F 中的观察者看，参考系 F' 以速率 v 在正 x 方向上运动．在 F 中的观察者看到带电层以速率 v_0 运动．

电荷密度是 σ，在另一面上的是 $-\sigma$．在这个参考系中均匀电场 $\mathbf{E}$ 指向正 y 方向，和通常一样，高斯定律使我们确信，它的强度是

$$E_y = 4\pi\sigma. \tag{49}$$

在这参考系 F 中，两个电荷层都以速率 v_0 沿正 x 方向运动，所以形成一对电流层．在一个层上的面电流密度是 $\mathscr{J}_x = \sigma v_0$，在另一个层上的是负值．如图 6.21 那样，这两电流层之间的场是

$$B_z = \frac{4\pi\mathscr{J}_x}{c} = \frac{4\pi\sigma v_0}{c}. \tag{50}$$

从参考系 F 来看参考系 F' 以速率 v 沿正 x 方向运动．在 F' 中的观察者将测量到什么样的场？要回答这问题，我们只需查明在 F' 中场源是怎样的．

在 F' 中带电层在 x' 方向上的速度是 v'_0，由速度叠加公式给出

$$v_0' = \frac{v_0 - v}{1 - v_0 v/c^2} = c\,\frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta_0\beta}. \tag{51}$$

在这参考系中存在着另一电荷密度的洛仑兹收缩，这完全和我们以前在第5.9节中的运动的线电荷的例子一样．重复那时我们用过的论证，在电荷本身的静止参考系中，电荷密度是$\sigma(1 - v_0^2/c^2)^{1/2}$，或$\sigma/\gamma_0$，因此在参考系$F'$中电荷密度是

$$\sigma' = \sigma\,\frac{\gamma_0'}{\gamma_0}. \tag{52}$$

和通常一样，γ_0'代表$(1 - v_0'^2/c^2)^{-1/2}$．通过式(51)可以消去γ_0'，用β_0及β，或γ_0及γ表示γ_0'．所得结果为

$$\sigma' = \sigma\gamma(1 - \beta_0\beta). \tag{53}$$

所以在参考系F'中面电流密度

$$\begin{aligned}\mathscr{J}' &= \sigma' v_0' = \sigma\gamma(1 - \beta_0\beta)c\,\frac{(\beta_0 - \beta)}{1 - \beta_0\beta}\\ &= \sigma\gamma(v_0 - v).\end{aligned} \tag{54}$$

我们现在知道了在参考系F'中源的形式，所以我们也就知道了在这参考系中的场应该是什么样子．为了说明这一点，我们还是要应用相对论的假设．物理定律在所有的惯性参考系中都必定是相同的，包括面电荷密度和电场的关系及面电流密度和磁场的关系的公式在内．因而，

$$E_y' = 4\pi\sigma' = \gamma\left[4\pi\sigma - \left(\frac{4\pi\sigma v_0}{c}\right)\left(\frac{v}{c}\right)\right], \tag{55}$$

$$B_z' = \frac{4\pi}{c}\mathscr{J}' = \gamma\left[\frac{4\pi\sigma v_0}{c} - 4\pi\sigma\left(\frac{v}{c}\right)\right]. \tag{56}$$

如果我们回过来看一下式(49)及式(50)中的E_y及B_z的值，则以上结果可写成

$$\begin{aligned}E_y' &= \gamma(E_y - \beta B_z),\\ B_z' &= \gamma(B_z - \beta E_y).\end{aligned} \tag{57}$$

如果两电流层的中间夹层是平行于 xy 平面，而不是平行于 xz 平面的，我们就可以得到 E'_z 和 E_z 及 B_y 的关系式，B'_y 和 B_y 及 E_z 的关系式. 当然它们的形式和上式的一样，但是如果探索它们的方向，我们将看到，由于 $\mathbf{B}$ 的方向法则，会出现符号上的不同.

我们还需要找出场在运动方向上的分量如何变化. 我们在第 5.5 节中已经发现在两个参考系中 $\mathbf{E}$ 的纵向分量大小相同. 在下面我们将会看到 $\mathbf{B}$ 的纵向分量也是如此. 假定在图 6.25 的 F 参考系中 $\mathbf{B}$ 的纵向分量 B_x 是由绕 x 轴的螺线管产生的. 我们已经知道在螺线管内的场强只由导线内的电流 I，即每秒的电荷，和每厘米轴长的线圈数 n 决定. 在参考系 F' 中螺线管将发生洛仑兹收缩，所以在这系统中每厘米长的圈数将增大. 但在参考系 F' 中的观测者计算的电流将减小，因为从他的观点来看，F 中的观测者用一个走的慢的钟来数每秒钟通过导线上某点的电子数. 在 nI 的乘积中时间的变长正好抵消了长度的缩短. 确实是这样，(纵向长度)$^{-1}$ $\times$ (时间)$^{-1}$的大小在洛仑兹变换中是不改变的. 所以 $B'_x = B_x$.

要记住早在第五章中根据式(5.6)进行讨论时所提出的论点：场的变换性质是局部的性质. 在一参考系中某一空时点的 $\mathbf{E}$ 及 $\mathbf{B}$ 的值必定唯一地决定在任一其它参考系中在这同一空时点上所观测的场的分量. 所以在我们的推导中采用了一特殊的简单类型的源这一事实(平行的均匀带电层)，这并不会损害我们所得结果的一般性. 事实上我们已经得出电场和磁场的所有分量的变换的一般定律，不论是什么样的源或组态.

下面给出变换的全表. 所有有撇号的量都是在参考系 F' 中测量的，在 F 中看来，F' 以速率 v 沿正 x 方向运动. 不

带撇号的量是在 F 中的测量结果．和通常一样，β 代表 v/c，γ 代表 $(1-\beta^2)^{-1/2}$．

$$\boxed{\begin{array}{c} E'_x = E_x, \quad E'_y = \gamma(E_y - \beta B_z), \\ E'_z = \gamma(E_z + \beta B_y). \\ B'_x = B_x, \quad B'_y = \gamma(B_y + \beta E_z), \\ B'_z = \gamma(B_z - \beta E_y). \end{array}} \tag{58}$$

方框里的方程式使我们看到惊人的事实，即方程式中的 **E** 和 **B** 的对称性．如果排印者错误地把 **E** 和 **B** 对换了，把 y 和 z 对换了，这些方程式仍将完全相同！我们以前的观点认为磁性是由于运动电荷的电场的相对论变换所引起的一种“二次效应”．当然，在自然界中所发现的磁现象和电现象是显著不同的．在我们周围的世界电与磁决不是对称的．然而，脱离开图形上的源来看，我们发现场的本身，**E** 和 **B** 以非常对称的方式相互联系着．

我们也看到在一些方向性上，亦即分量上来看，电场和磁场属于单一的实体．我们可以说电磁场，我们可以认为 E_x，E_y，E_z，B_x，B_y，B_z 是电磁场的六个分量．在不同的惯性坐标系中所观察的同一场，这些分量将以不同的数值组表示出来．有点象一个矢量在有相对转动的不同坐标系中要以不同的分量表示出来．但是这样设想的电磁场，用数学语言来说，不是一个矢量，而是一个被称为张量的量．在方框里的全部方程式给出了把这样的一个张量的分量从一惯性系变换到另一惯性系的规则．我们这里不想再扩大这种数学语言．实际上我们将回到我们的老方法上去，把电场说成是矢量场，把磁场说成是和电场相结合的另一矢量场，象在第七章中将要讨论的那样．要彻底搞清楚这样一个用四维的时空系统表示出来的电磁场的单一性，必须等学到更高一级的课程才能解

决.

式(58)的变换指出在某一类型的情形中的一非常简单的关系. 假定在"不加撇号"的惯性系中，磁场 **B** 在各处都是零. 则在另一系中所观测到的场是

$$\begin{aligned} &E'_x = E_x, \quad E'_y = \gamma E_y, \quad E'_z = \gamma E_z. \\ &B'_x = 0, \quad B'_y = \beta\gamma E_z, \quad B'_z = -\beta\gamma E_y. \end{aligned} \tag{59}$$

这意味着在"加撇号"的参考系中，各处的电场和磁场之间的某种关系,即

$$B'_x = 0, \quad B'_y = \beta E'_z, \quad B'_z = -\beta E'_y. \tag{60}$$

记住在这时刻不加撇号的参考系的速度,在加撇的系统看来,是在 $-\mathbf{x}'$ 方向上的一个矢量，我们可以把以上关系式表示为矢乘的形式,这样便可得到更一般的法则:

$$\mathbf{B}' = \left(\frac{\mathbf{v}'}{c}\right) \times \mathbf{E}'. \tag{61}$$

(如果在某参考系中各处都是 $\mathbf{B} = 0$)

这里 $\mathbf{v}'$ 是从加撇号系统观测到的那个特殊参考系的速度，在那个特殊参考系中正好 **B** 在各处都是零.

用完全同样的方法,我们可以从式(58)得出,如果在一参考系中各处都是 $\mathbf{E} = 0$，我们把这参考系称为不加撇号的参考系,则在另一参考系中

$$\mathbf{E}' = -\left(\frac{\mathbf{v}'}{c}\right) \times \mathbf{B}'. \tag{62}$$

(如果在某参考系中各处都是 $\mathbf{E} = 0$)

这里，和在式(61)中一样，v' 是从加撇号的参考系中观测到的不加撇号的参考系(在这情形，其中各处 **E** 都是零). 对式(61)及式(62)的在括号中的限制条件当然是很严格的. 常常

没有这样的参考系，其中的 **B** 到处是零，也没有这样的参考系，其中的电荷密度到处都是零，因而 **E** 也到处为零．

因为式(61)中所包含的量都是在同一参考系中测定的，所以，当满足符合于限制条件的时候，很容易把它应用到在空间各处都不相同的那些场[1]．

以恒速运动的点电荷的场的是一个很好的例子，这问题在第五章研究过．取不加撇号的参考系作为这电荷静止于其中的参考系．在这参考系中当然没有磁场．式(61)告诉我们，在我们观测到电荷以速率 v 运动的"实验室"参考系中，必定有一垂直于电场和运动方向的磁场．我们已经弄清楚在这参考系中电场的正确形式：我们知道这场是从电荷的瞬时位置径向发出的，它的大小由式(5.12)给出．磁场线一定是围绕运动方向的圆，如在图 6.26 中粗略地表示出的．当电荷的

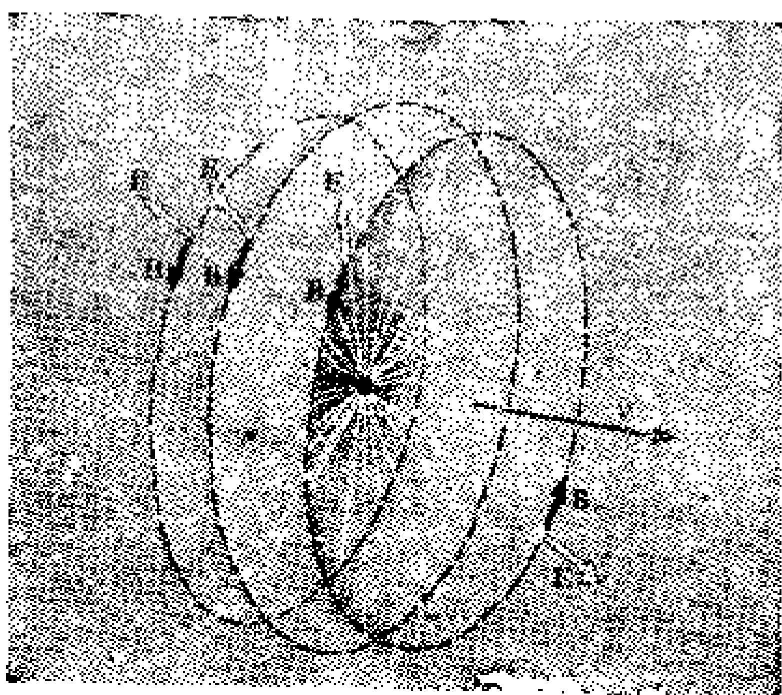


图 6.26　一匀速运动的电荷在某一时刻的电场和磁场．

[1] 对空间变化的场来说，式(58)的意义是 $E'(x', y', z', t') = E(x, y, z, t)$ 等等．因此，如果我们要计算在加撇号参考系中各处在 t' 时刻所观测的场，就必须对每一点 (x', y', z') 用和 x', y', z', t' 一致的 t，也要用和 x', y', z', t' 一致的 x, y, z．例如，是在 t 时刻在 (x, y, z) 处的 B_z 及 B_y，出现在方框中最后的方程式的右边．

运动速度很大，故 $\gamma \gg 1$ 时，则代表场线的径向辐线折叠在一起，成为一薄的圆盘。圆形磁场线也密集在这圆盘里。这时 **B** 的大小近似地等于 **E** 的大小。就是以高斯表示的磁场强度的大小和在同一地点和同一时刻的以静伏/厘米表示的电场强度的大小几乎相等。

我们离上两章的库仑定律已经很远了。但是我们只是对每一步都始终贯彻着相对论和电荷不变原理的要求。我们可以开始看到磁场的存在和它与电场之间的奇特的对称关系是这些普遍原理的必然结果。我们再一次提醒读者注意，这完全不是发现电磁定律和阐明这些定律的历史次序。在式(58)中所包含的电场和磁场之间的相互联系在法拉第关于变电流的实验中已经显现出来了。那是人们想写出这方框里的方程式的七十五年以前的事了。

6.8 罗 兰 实 验

如在第 5.9 节中所说明的，在百年前还没弄清楚在导线中的电流和运动着的带电物体实质上同样地可作为磁场的源。在麦克斯韦的著作中用电和磁的统一观点，提出任何运动电荷都应产生磁场，但很难找到实验的证明。

罗兰 (Rowland) 首先作了静电带电层的运动产生磁场的实验，他是以制衍射光栅而闻名的美国物理学工作者。罗兰作了很多灵巧的和精确的电学测量，但没有一个能象检查和测量转动的带电盘的磁场的技巧那样高明的。被检测磁场的大小大约是地球磁场的 10^{-5}——甚至使用今天的仪器，这也还是一项艰难的实验！在图 6.27 中可以看到罗兰仪器的草图，和他描述他的实验的说明的第一页。在赫兹发现电磁波的十年以前，罗兰的结果就对麦克斯韦电磁场理论给出了独立的支持，虽然这个实验没有赫兹实验那样引人注目。

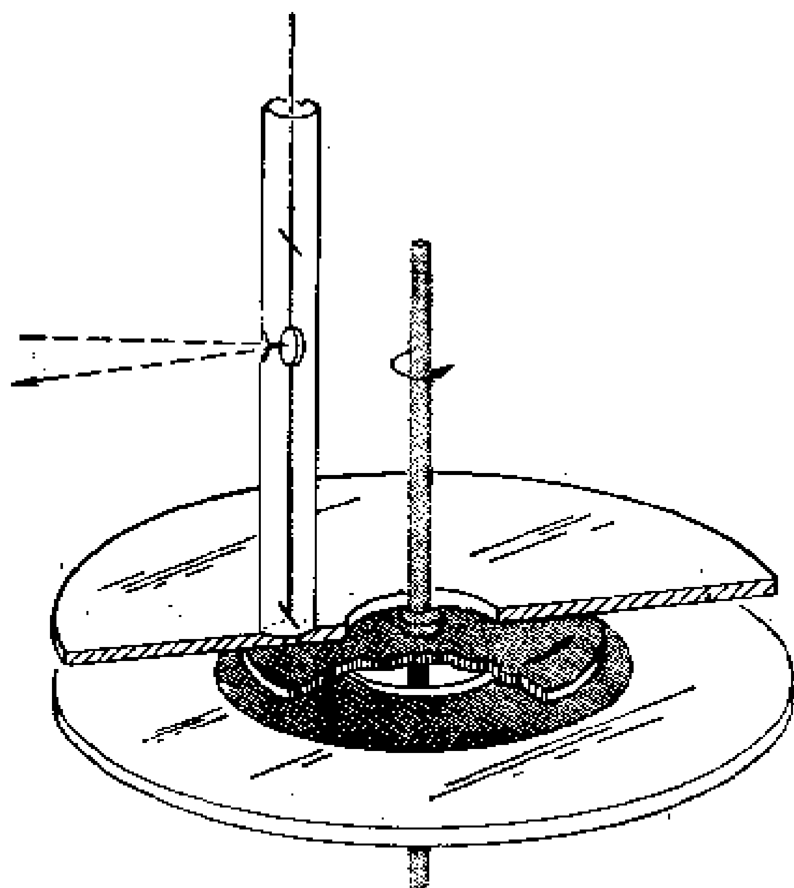


图 6.27 罗兰的仪器的主要部分．在左侧的管中水平地悬着两个短磁针．

关于电流动的磁效应

[*American Journal of Science*[3], XV, 30-38, 1878]

本文所描述的实验的目的是为了确定运动着的带电体是否产生磁场．鉴于把传导电流的磁作用解释为是由于导体和电流之间的相互作用所引起的似乎不能作为解决这问题的理论根据．因此作一个实验是有意义的．麦克斯韦教授在他的“电学”的第 770 节中曾计算了运动着的带电面的磁作用，但是磁作用的存在还没有为实验或理论所证明．

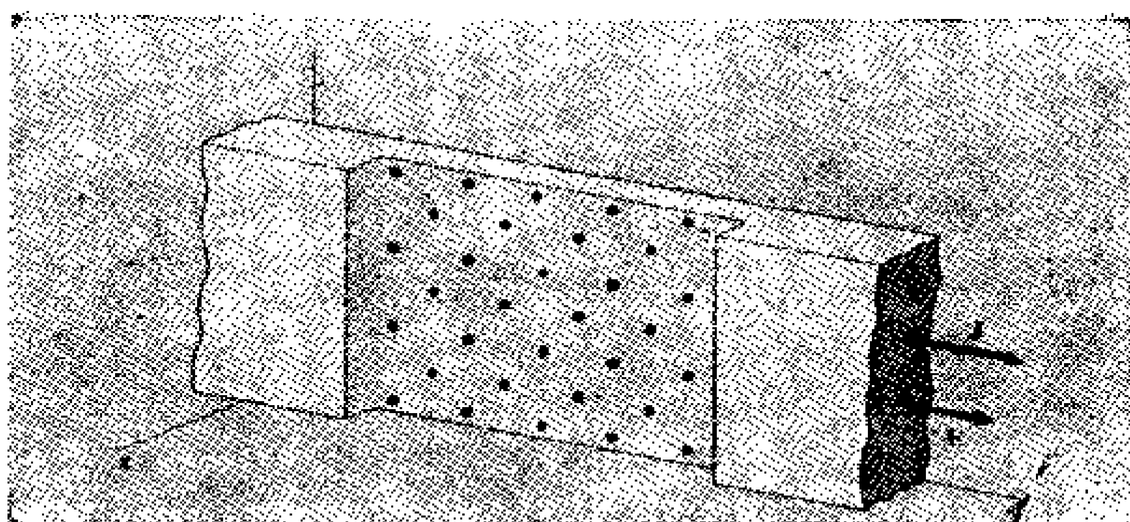
所用的仪器是由一个直径为 21.1 厘米，厚度为 0.5 厘米的硬橡胶制的盘构成的，它能绕一垂直轴以每秒 61 次的速度转动．盘的两面在距 0.6 厘米处固定直径为 38.9 厘米的两玻璃板，玻璃板的中心开一直径为 7.8 厘米的圆孔．硬橡胶盘的两面都镀上金，两玻璃板的内面有镀金的圆环，外径为 24.0 厘米，内径为 8.9 厘米．玻璃板的镀金面可以面向或背向转动的圆盘，但一般都是使之面向圆盘；这样做为的是问题更容易计算，在起电上没有误差．外边的板通常都是接地的；中间的

盘和一电池相接，接法是把一个尖端置于距盘的边缘三分之一毫米以内的地方，并指向盘的边缘．因为边缘是宽的，除非尖端和边缘之间有电位差，尖端将不会放电．

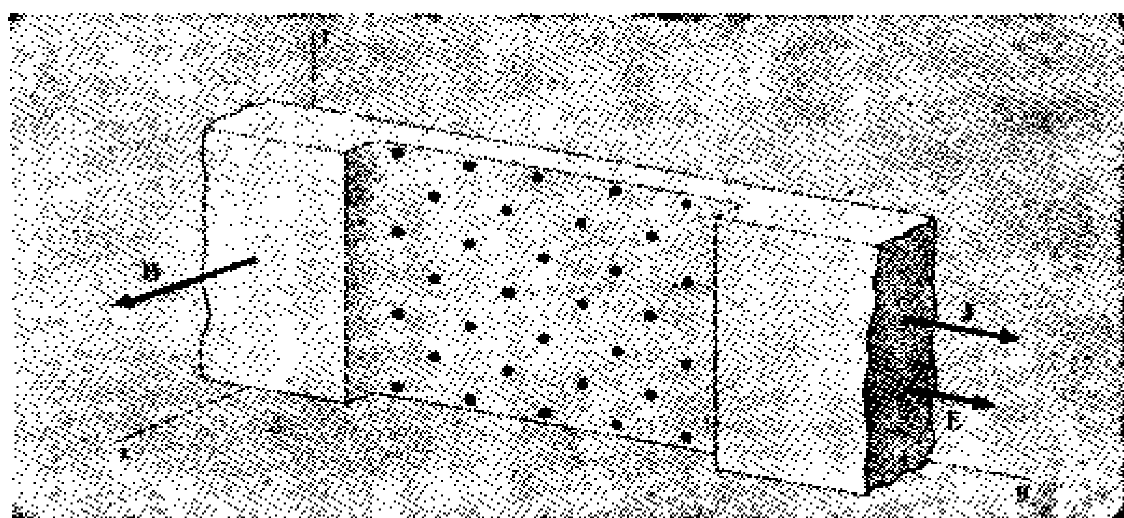
6.9 磁场中的电传导：霍尔效应

在磁场中当电流在导体中流动时，有一作用力$(q/c)\mathbf{v}\times\mathbf{B}$直接作用在载流子上．然而我们观测到的是作用在整个导体上的力．现在我们研究一下这是怎样发生的．图 6.28(a)表示一段金属杆，杆中流着稳定电流．电子被一电场 $\mathbf{E}$ 驱动，以平均速率 $\bar{v}$ 向左漂移，它和我们在第四章讨论传导时所用的 $\bar{u}$ 有同样的意义．传导电子，示意地用白点表示．黑点是正离子，它们构成固态金属杆的刚硬构架．因为电子是负的，电流是沿 y 方向的．电流密度 $\mathbf{J}$ 和电场 $\mathbf{E}$，和通常一样，由金属的电导率 σ，联系着：$\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}$．在图 6.28(a) 中除电流本身的磁场外，没有外加磁场，我们不考虑电流本身的磁场．现在在 x 方向上加上一外加磁场 $\mathbf{B}$．运动状态便立刻成为图 6.28(b) 的样子．电子向下偏移．但是因为它们不能逸出杆的底面，它们在那里堆积起来，直到在杆底部的过剩电子和相应的在顶部的多余正离子形成电场 $\mathbf{E}_t$，电子在此电场中受的向上的力 eE_t 和受的向下的力，$(e/c)\bar{v}B$，相平衡时为止．在固定于金属晶格的坐标中观测，在稳定状态时(很快就达到！)，平均运动又是水平的了，并在金属内部存在着这个横向电场 $\mathbf{E}_t$ [图 6.28 (c)]．这场对正离子产生一向下的作用力．这就是作用在电子上的力，$(-e/c)\bar{\mathbf{v}}\times\mathbf{B}$，怎样传递给固体杆的．当然，这杆将要推动支持着它的东西，或者如果没有支持物，它自己将加速向下．

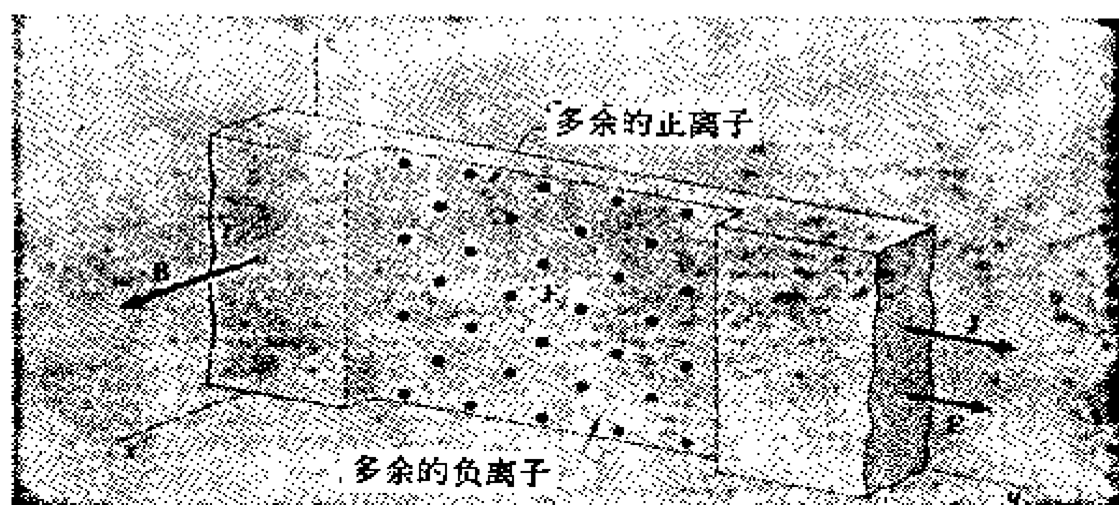
这横向电场 $\mathbf{E}_t$ 的存在可以直接地用电学方法演示出来(图 6.29)．在杆相对面上的 P_1 和 P_2 两点连结上导线，这两个



(a) 一电流在金属杆中流动，只表示出杆的很短一段．传导电子用白点表示（大小和数目不是真实的！）晶格正离子用黑点表示．箭头表示电子的平均速度 v．



(b) 一磁场作用在 x 方向上，（在开始时）使运动着的电子向下偏斜．



(c) 改变了的电荷分布产生一横向的电场 E_t．在这电场里不动的正离子受到一向下的作用力．（图中负离子为电子）

图 6.28

结点要很仔细地安置好，使这两点当电流在杆中流动时及磁场 **B** 等于零时，处于相同的电势．把导线接到检流计上．在加上磁场 **B** 后，便有一稳定电流在这电路内流通，表示 P_1 和 P_2 不再是同电势的了． 事实上，在上述系统中 P_1 相对于 P_2 来说是正的．

霍尔于 1879 年在 Johns Hopkins 地方，在罗兰的指导下，发现了这一效应．当时还没有人了解金属中导电的机理．甚至还不知道电子．已经证明霍尔效应是最有启发性的现象．在近代的导电现象的研究中，特别是对于半导体，测量霍尔效应是不可缺少的．

我们已经了解电流的磁场，以及在外场中作用在载流导体上的力，与导电过程的细节完全无关．但是，霍尔效应揭

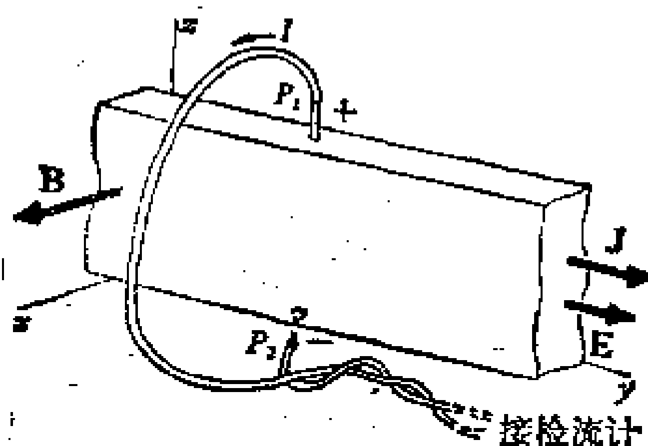


图 6.29 霍尔效应． 当磁场垂直作用在载流的导体上时，可以观测到杆对边上两点之间的电势差，这两点在没有磁场时电势是相同的．这和杆内存在电场 $\mathbf{E}_t$ 是一致的．通过测量"霍尔电压"便可决定每立方厘米的载流子数以及它们的符号．

示了关于载流子的一些性质．我们要注意在图 6.28 中如果在杆中的电流是由于正电荷向右运动而形成的，则将产生一反方向的横向电场 $\mathbf{E}_t$．因此，在 P_1 和 P_2 之间的"霍尔电势差"的符号告诉我们载流子是正的还是负的．在数量上，横向场

E_t 的大小由以下等式决定，

$$qE_t = q\frac{\bar{v}}{c}B \quad 或 \quad E_t = \frac{\bar{v}}{c}B. \tag{63}$$

另一方面载流子的平均速度 $\bar{v}$ 和电流密度 J 的关系是

$$J = nq\bar{v}, \tag{64}$$

这里 n 是每单位体积中载流子的数目，每个载流子的电量是 q. 把式(63)和式(64)合并起来，可以消去 $\bar{v}$，得

$$E_t = \left(\frac{1}{nqc}\right)JB. \tag{65}$$

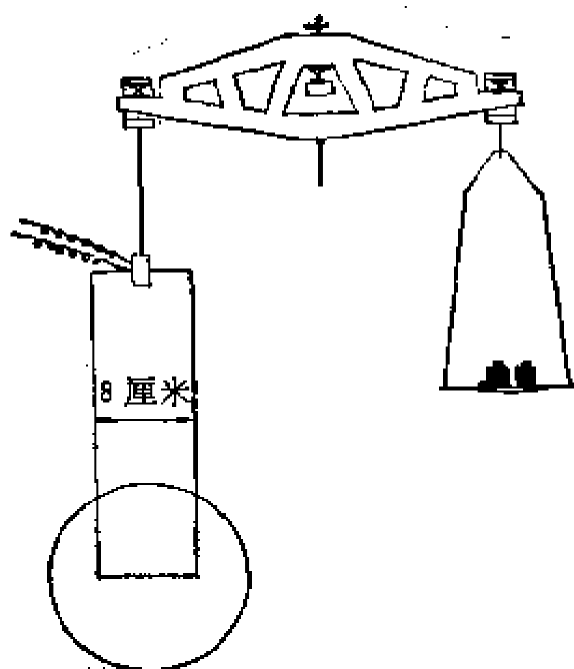
象图 6.29 那样的装置可以测定 E_t、J 及 B. E_t 正好是 P_1 和 P_2 之间的电势差除以杆的宽度；J 是总电流除以横截面的面积. 所以我们可以推断出 $(1/nqc)$. 这系数称为该物质的"霍尔系数". 如果假定每一原子有一个导电电子，大多数金属的霍尔系数的值和预计的值大致相同，效应的符号表示载流子的符号确实是负的. 但是有些金属具有相反符号的霍尔系数！在用金属中电子的量子理论解释之前，这似乎是矛盾的事情.

习　　题

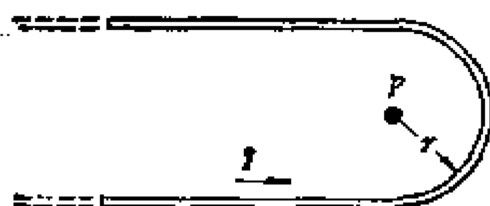
6.1　图 5.1(b) 的电路中有 30 安电流. 两平行导线相距 5 厘米. 一个导线上每单位长度受力多少？

6.2　这图表示一长方形线圈，挂在分析天平的一个臂上，并悬在电磁铁的两极间，线圈平面平行于磁极面，在阴影区域的磁场是均匀的，在导线的顶部附近的磁场可略去不计，这线圈共有 15 圈，底边长 8 厘米. 先使系统平衡然后把 0.500 安的电流通进线圈. 如果必须再加 60.5 克于右盘中才能使系统重新平衡，这磁场强度 B 是多少高斯？国家计量局把这种方法精密化，用来极精确地测量磁场强度.

[精确测量磁场的一种方法]



习题 6.2



习题 6.4

6.3 一圆形电流圈的磁场，在圆圈的轴上各点的强度由式(41)给出．试沿轴从$-\infty$到∞计算场的线积分，来校核一般公式

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{4\pi I}{c}.$$

为什么我们可以略去构成闭合迴路所必需的“回程”部分？

6.4 一长线弯曲成如图那样的夹发针形．求出在半圆中心处 P 点的磁场的精确表达式．

6.5 一氢原子由一质子及一电子组成，(为了某些目的)可以认为电子围绕质子，沿半径为$a_0 = \hbar^2/me^2 = 0.53 \times 10^{-8}$厘米的圆形轨道，以速率$v = e^2/\hbar$运动．这里$e$是电子的电量，$4.8 \times 10^{-10}$静电单位，$\hbar \simeq 10^{-27}$尔格·秒，是普朗克常数除以$2\pi$，$m$是电子质量．这个作圆运动的电荷的电流等于多少？由电子运动引起的在质子处的磁场强度是多少高斯？

[在原子中作圆运动的电子产生的磁场]

6.6 把载直流电 5000 安的导线接到一大磁铁上，其结

构是这样的：一个 5 厘米直径的固体铝杆围以内径为 7 厘米外径为 9 厘米铝筒，铝筒作为回路的导线.（在筒和杆之间的环形空间中充满流动的油，以便带走热量.）在每一导体的截面上的电流密度是均恒的. 把磁场 B（高斯）作为从轴线到外导体以外的一点的半径（厘米）的函数，计算出磁场和 r 的关系，并画出图形.（铝本身及油的存在不影响磁场——参阅第 6.1 节的说明.）

［同轴导体中的磁场］

6.7 一由 14 号铜线绕成直径为 6 厘米圆筒状的单层绕组构成的螺线管. 每厘米 5 圈，螺线管是 0.163 厘米，在 75℃ 时每米的电阻是 0.010 欧.（我们估计这线圈要发热！）如果把这螺线管接到 24 伏的发电机上，螺线管中的磁场强度是多少高斯？功率耗散多少瓦？

答：520 高斯，2000 瓦.

［螺线管设计］

6.8 在 x，y，z 坐标系的原点区有个 100 静伏/厘米的电场，其方向与 x 轴成 30°，与 y 轴成 60°. 参考系 F' 的轴和前者的轴平行，以 $0.6c$ 的速率，沿正 y 方向相对于前者运动. 求出在参考系 F' 中的观测者所观测到的电场的大小和方向. 这观测者观测到的磁场是怎样的？

［场的变换］

6.9 一洋流在地球磁场的垂直分量为 0.35 高斯处以每小时 2 海里（约 1 米/秒）速率流动. 在这区域海水的导电率是 0.04（欧·厘米）$^{-1}$. 假定除了运动项 $(\mathbf{v}/c)\times\mathbf{B}$ 外没有其他的 $\mathbf{E}$ 的水平分量，试求水平电流密度是每平方米多少安？如果你带一瓶水以这速率通过这地球磁场，其中有这样的电流流动吗？

［导体在磁场中运动］

6.10 对于比 c 小得多的速度，场变换可写成极简单的形式：

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E}$$

$\mathbf{v}$ 是在"不加撇号"的参考系中看到的"加撇号"的参考系的速度．设 $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{x}}\beta c$ 相当于式(58)的一特殊情形，试证在 $(1-\beta^2)^{1/2} \approx 1$ 的近似情形，上式和式(58)是一致的．设加撇号的参考系是在一喷气飞机上的，它飞行在 0.4 高斯的地磁区域，向地磁指北方向飞行，这里地球磁场是在北半球向下成 30° 角的方向．问在飞机坐标中由于穿过磁场的运动引起的额外电场分量是在哪一方向上？以静伏/厘米计它的强度有多大？

[低速度下的场变换]

6.11 利用式(58)试证 $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$ 对洛仑兹变换是一不变量．也就是证明如果 $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$ 在某一惯性系中有某一值，它在所有惯性系中都有相同的值．同样，试证 $E^2 - B^2$ 在洛仑兹变换中是不变的．

[场变换中的两个不变量．这里所证明的结果在第七章末讨论电磁波时应用]

6.12 试设计一矢势，它相当于 z 方向上的一个均匀场：$B_x = 0$，$B_y = 0$，$B_z = B_0$．

6.13 注意矢势 $\mathbf{A}$ 和磁场 $\mathbf{B}$ 相联系，$\mathbf{B}$ 和电流密度 $\mathbf{J}$ 相联系．即 $\operatorname{curl}\mathbf{A} = \mathbf{B}$，而 $\operatorname{curl}\mathbf{B} = (4\pi/c)\mathbf{J}$．沿闭合曲线的 $\mathbf{B}$ 的线积分等于 $4\pi/c$ 乘以这闭合曲线所包围的电流，相当于这段说明的，关于 $\mathbf{A}$ 的说明是什么？我们来研究一长的金属圆棒的磁场，圆棒中通过均匀分布于它的截面上的平行于轴线的电流．你知道这种电流分布的场是怎样的．画一表示电流分布和磁场线的图．利用刚才提出的类似方法，

求无限长螺线管的场的矢势. 值得注意的是在这种情形，矢势本身在磁场为零的区域里并不是零.

6.14 因为平行电流线是相互吸引的，我们可以设想象习题 6.6 的内导体那样在固体杆中的电流有集聚在杆轴附近的倾向. 这就是，导电电子不是象通常那样均匀地分布在金属内部，而是向内密集于轴线，大部分电流都在那里. 你想应怎样来阻止发生这种现象？它可能无限地发展吗？如果存在的话，你能提出一个实验来检验这一效应吗？

（讨论题）

6.15 在阴极射线管中两个电子以相同速率 v，并排地在平行的路线上运动. 在垂直于它们的速度的方向上它们之间的距离是 r. 在实验室参考系中观测，一个电子作用在另一个电子上的力是多大？如果 v 比 c 很小，你将回答是 e^2/r^2，那就算是这样. 但 v 并不太小，所以你必须注意.

(a) 回答这问题的最简单方法是：取一和电子一起运动的参考系. 在这参考系中两电子是静止的，它们之间的距离仍是 r（为什么？），作用力正好是 e^2/r^2. 利用力的变换定律，公式(5.31)，把力变换到实验室参考系中.（要注意哪一参考系是加撇号的？在实验室参考系中的力比电子参考系中的力大还是小？）

(b) 我们可以完全在实验室参考系求得相同的结果. 在实验室参考系中，在电子 1 的瞬时位置上同时存在着由电子 2 引起的电场及磁场（参阅图 6.26）. 计算电子 1 以速率 v 通过这些场时所受到的净力，并表明你求得的结果和(a)的结果相同. 作图表明这些场及力的方向.

(c) 根据这结果你能说出在 $v \to c$ 的极限下并排运动的电子之间的力是怎样的吗？

[两并排平行运动的电荷间的力]

第七章　电磁感应与麦克斯韦方程

7.1 法拉第的发现

1.具有张力的电能使它的近邻处于相反带电状态，这种能力我们已经用普通术语感应来表示了。由于感应一词已经纳入科学术语之中，因此我们也就可以恰当地在同样普遍意义下用感应一词来表示电流所具有那种能力，即能使它邻近本来在平常状态的物质感应至某种特殊状态的能力。本文就是在这种意义下使用感应一词的。

2.电流的某些感应效应已经为人们所了解和描述过了：诸如磁化效应；安培将铜盘移近平面螺旋线圈的实验；安培用阿喇果(Arago)特别实验中的电磁铁所重复的上述实验，或许还有几个其它效应。看来，以上这些还不大可能是电流所能产生的全部感应效应；特别是，上述这些效应如果不用铁，就几乎全都看不出来了，然而除铁之外尚有无数对有张力的电能显示感应现象的物体，运动电荷的感应效应也对它们起作用。

3.更进一步说：不管采用安培的漂亮理论或其它什么理论，也不管思想上作些什么保留，都会感到下述论点十分特别，即虽然每一电流总伴有一个与它的方向成直角的磁作用力；然而电的良导体，当放在该作用范围内时，却应该没有任何感生电流流过它，也不产生在作用力方面与此电流相当的某些可觉察的效应。

4.对这些问题及其后果的考虑，再加上想从普通的磁中获得电的希望，时时激励着我从实验上去探求电流的感应效应。最近，我得到了肯定的结果；不仅满足了我的期望；而且使我得到了全面解释阿喇果磁现象的关键；并且还发现了一种新情形，这在电流的某些最重要的效应中可能有巨大的影响。

5.我描述这些结果不打算采用获得它们的方式来进行，而将采用

另一种方式以便最简明地给出整体的观点。

法拉第就是这样开始说明他所发现的电磁感应现象的。上面的引文是法拉第在1831年发表的论文中的一部分，是从法拉第1839年在伦敦出版的电的实验研究一书中引来的。在那篇论文中，后面紧接着描述了十几个实验，通过这些实验，法拉第揭示出来了磁作用产生电效应的主要特点。

法拉第的“有张力的电”一词指的是静电荷。他在第一句中提到的感应一词含义就是我们在第三章中已经研究过的那种含意，即电荷的存在引起附近导体内电荷的重新分布。法拉第提出的问题是，为什么一个电流不在它附近的导体中引出另一个电流来？

在奥斯忒的发现之后，电流产生的磁场已经彻底地研究过了。实验室中人们所熟知的“伽伐尼”电流的电源是伏打电池。对这类电流的最灵敏的检测计是电流计。它是由两个线圈和一根磁针组成的，磁针像指南针那样按在枢轴上或用一根细线悬挂着放在两个线圈之间。有时，在线圈外面用另一根针与第一根磁针刚性地连接着，用来补偿地球磁场的影响[图7.1(a)]。草图7.1(b)到7.1(e)画出了几个法拉第的感应实验。读者须阅读法拉第本人的说明，这是实验科学的经典之一。

在早期的实验中，法拉第因发现稳定电流对它附近的导线并不产生可察觉的影响而感到迷惑。他做了各式各样的线圈，图7.1(a)就是一例，两个线圈紧挨着，不过中间用布或纸绝缘隔开。其中一个线圈和电流计一起形成一个电路。另一个线圈则由电池通以强电流。使法拉第感到失望的是，电流计并不产生偏转。但是在这些实验中，有一次法拉第注意到在电流接通时，电流计有一轻微扰动，断开时，也有一轻微扰动。抓住这个线索，他立刻就可以毫无疑问地肯定另一根导线中的电流不是由稳定电流感生的，而是由变化电流感生的。这

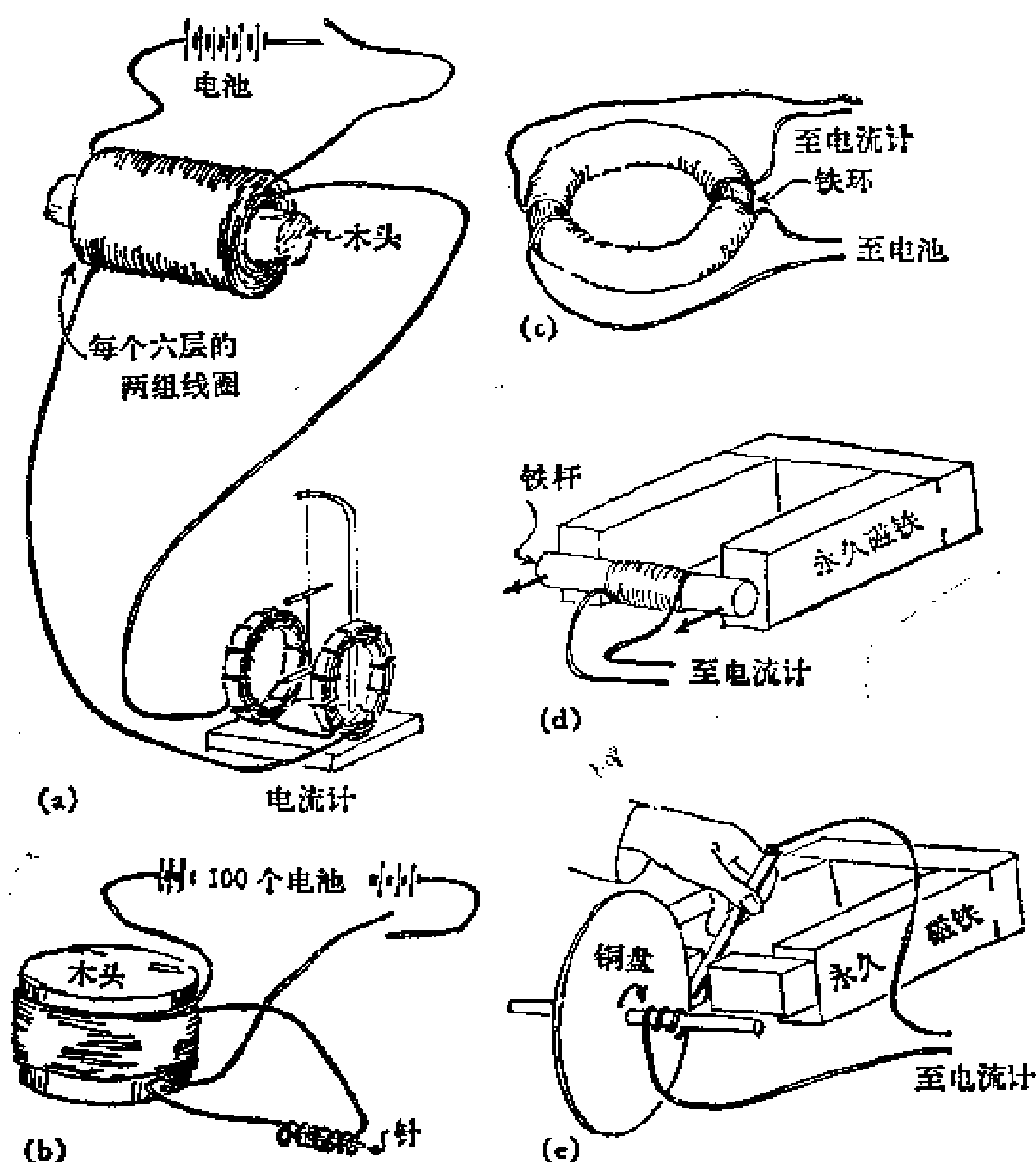


图 7.1 (a—e) 在法拉第著的《电的实验研究》一书中，作者对所描述的一些法拉第实验的说明。

到这一步后，法拉第把一根未磁化的钢针放在一个简单的小线圈中以代替检流计，因为他认为对于短暂的脉冲电流，电流计并非是良好的检测计[参看图 7.1(b)]．他发现由于给原线圈通电而感生出来的脉冲电流把这根针磁化了，并且在原线圈中切断电流时感生的脉冲电流会把这个针反向磁化．以下

是他本人对另外一个实验的描述：

在前面的实验中，两个导线线圈彼此放得很近，当需要感应效应时，将产生感应的那个线圈与电池接触一下；由于这种特殊作用可以设想为只在接触与分离的瞬间发生，故也可用另一种办法来产生感应。把几英尺铜线在宽板的一面上拉成锯齿状，成字母W的形状；另一根铜线在第二个板上做成完全同样的形状，以致将第二个板移近第一个板时，两根铜线除了隔着一张插入的厚纸外，处处都将接触在一起的。这两根线中的一根与电流计联接，另一根与伏打电池联接。然后让第一根导线向着第二根导线运动，当其移近时，磁针偏转；然后移开，则磁针向相反方向偏转。让两铜线先靠近而后撤回，此时磁针将振动，振动的幅度迅速变大；当两铜线停止移近或移开时，电流计的磁针就立即回到它通常的位置。

当两导线接近时，感生电流与诱导电流的方向相反；当两导线移开时，感应电流与诱导电流的方向相同；当两导线保持静止时，无感生电流。

本章我们就来研究法拉第在这些实验中所发现的电磁作用。按现在的观点，感应可以看成是运动电荷在磁场中经受作用力的自然结果。从某种意义上说，*感应定律*可以由我们已经知道的规律推导出来。在本书以后各章中，我们将再次离开历史发展的顺序，(借用前面已经引用过的法拉第原话中的末一句来说)而*最简明地给出*整体的观点。

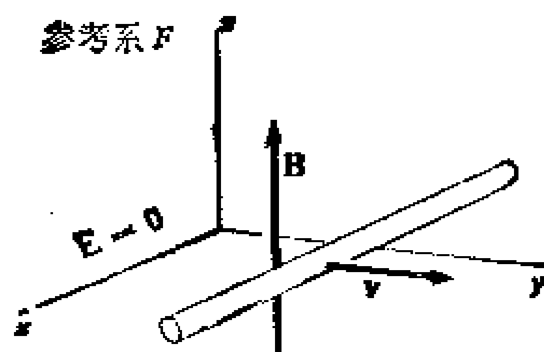
7.2 导体杆在均匀磁场中运动

图 7.2(a) 画出了一段直金属线，或一根细长的金属杆，假定它在长度的垂直方向上以速度 $\mathbf{v}$ 匀速运动着。在此杆运动的空间中有一个不随时间而变的均匀磁场 $\mathbf{B}$，这个磁场可以由一个将图中全部区域都包含在内的大螺线管来提供。螺线管静止在由 x, y, z 坐标轴表示的参考系 F 中。当此杆不存在时，该参考系中没有电场，只有均匀磁场 $\mathbf{B}$。

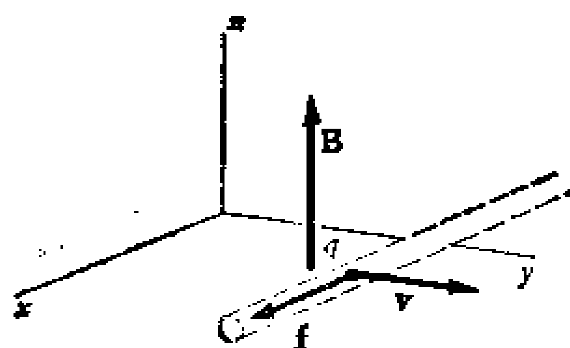
因为杆是导体的，它含有带电粒子，如果这些带电粒子受到力的作用，它们就要运动．杆所携有的任何带电粒子，例如图 7.2 (b) 中画出的带电为 q 的粒子，必然要在磁场 **B** 中运动，因此将受到一个力

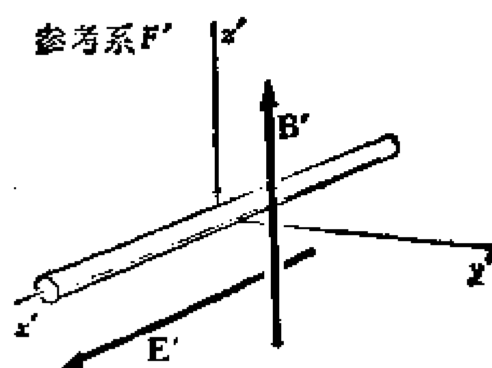
$$\mathbf{f}=\frac{q}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}. \tag{1}$$

B 和 **v** 的指向如图 7.2 所示，如果 q 是正电荷，则力沿 x 轴的正向；对于带负电的电子，则力的方向相反．事实上在绝大多数导体中可移动电荷的载流子是电子．不管可移动的电荷是正的还是负的，或二者兼有，都有式(1)的结果．



(a) 一导体杆在磁场中运动．





(b) 随着杆运动的任一电荷 q 受 $(q/c)\mathbf{V}\times\mathbf{B}$ 的作用力．

(c) 参考系 F' 随着杆运动，在此参考系中有电场 $\mathbf{E}'$．

图 7.2

当杆以匀速运动而且达稳定状态之后，杆内各点受到的力 **f** [式(1)] 必定被一个大小相等方向相反的力所平衡．这个力只能起因于杆内的电场．电场是这样产生的：力 **f** 将负

电荷推到杆的一端，使另一端带正电，这一过程一直进行到这些分开的电荷本身所产生的电场 $\mathbf{E}$ 在杆内各处都达到

$$q\mathbf{E}=-\mathbf{f} \tag{2}$$

时为止．这时，电荷相对于杆的运动就停止了．这一电荷分布在杆外也产生电场，正如在杆内一样．外部的电场看起来有些象分开的正负电荷形成的场，差别在于电荷并不完全集中在杆的两端而是沿着杆分布的．杆外的电场画在图 7.3(a) 中．图 7.3(b) 是杆的正电荷端的放大图，示出了电荷在杆表面上的分布以及导体内外的一些电力线．在参考系 F 中，任意时刻看来，情形都是这样．

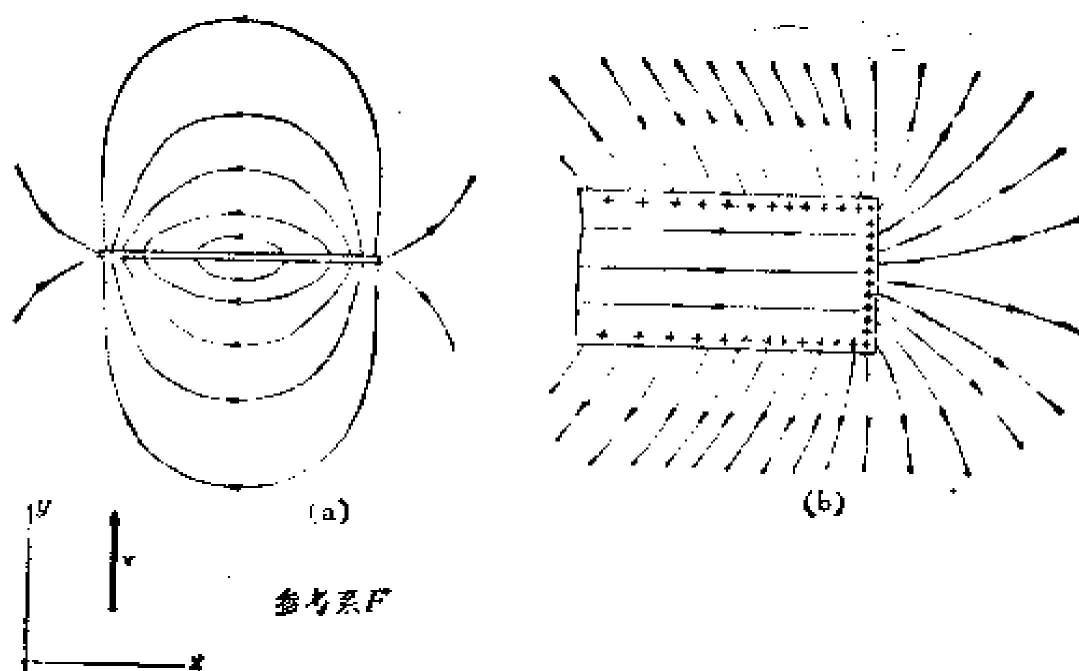


图 7.3 (a) 在参考系 F 中某一时刻所看到的电场．杆的附近有电场，杆内也有电场．场源是杆表面上的电荷，如图 (b) 所示，它是杆的右端的放大图．

让我们随着杆运动的参考系 F' 来观察这个系统．暂且先不管这根杆，如图 7.2(c) 所表示的，在参考系 F' 中我们看到磁场 $\mathbf{B}'$（如果 v 很小时，和 $\mathbf{B}$ 差别不大）和一个均匀电场，此电场由式 (6.62) 给出

$$\mathbf{E}' = -\frac{\mathbf{v}'}{c} \times \mathbf{B}' = \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}'. \tag{3}$$

当我们将杆放进这个系统时，我们所做的只是把一根静止的导体杆放入一个均匀电场．杆表面上的电荷将重新分布，使杆内的电场为零，和图 3.6 所示的那个金属盒子或者电场中的任意其它导体的情形一样．磁场 $\mathbf{B}'$ 的存在并不影响静止电荷的分布．图 7.4(a) 画出了在参考系 F' 中的一些电力线．由图 7.4 (b) 的杆端放大图我们可看到，在杆内的电场为零．

除了相差一个洛仑兹收缩量外（它是 v/c 的二级量），在

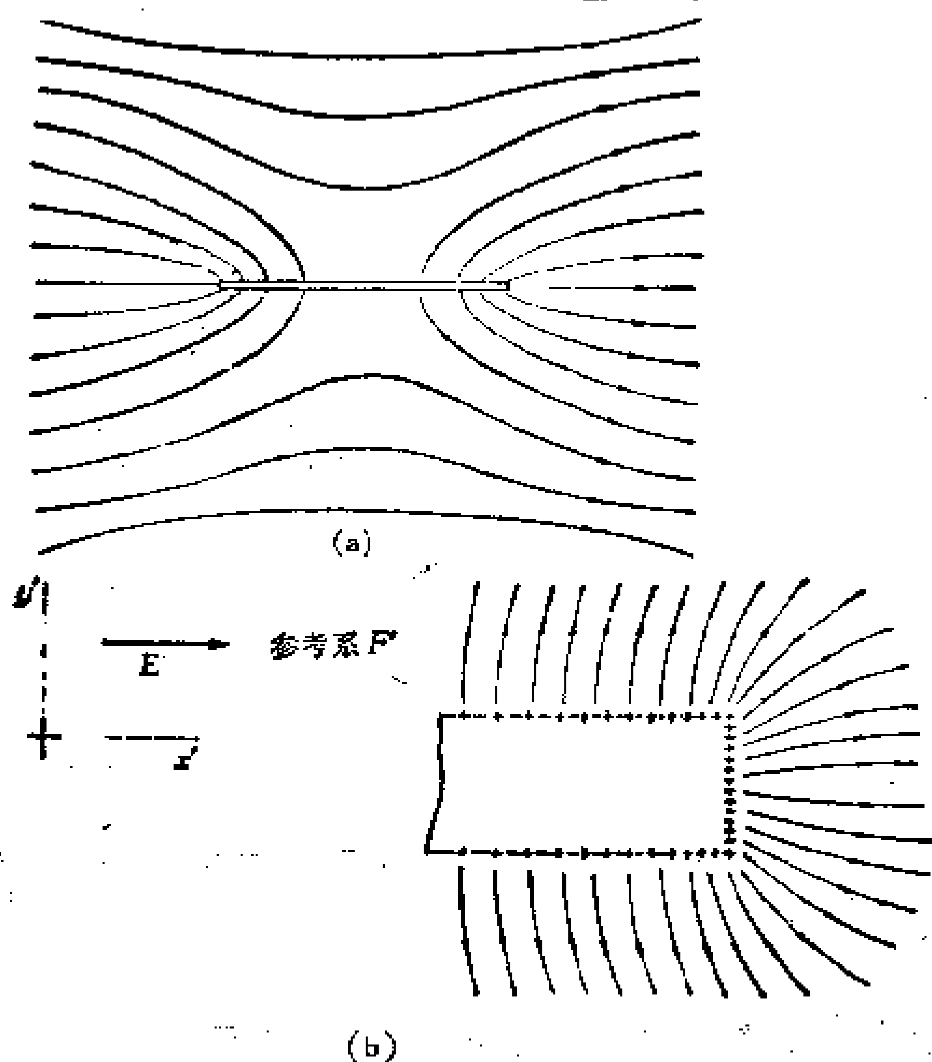
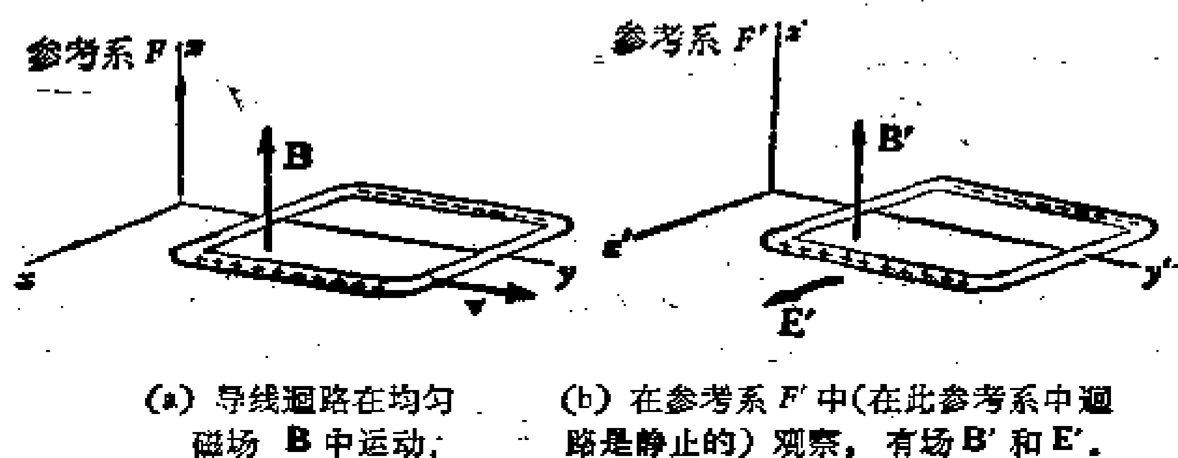


图 7.4 (a) 参考系 F' 中的电场，在这参考系中，杆是静止的．这个电场是通常的电场 $\mathbf{E}'$（在空间各处均匀）和杆表面上分布的电荷的电场的叠加．其结果是杆内电场为零，其放大的细节表示在图 (b)中．试与图 7.3 比较．

参考系 F 中某一瞬间所见到的电荷分布［图 7.3(b)］，和在 F' 中所见到的是一样的． 两个参考系中的电场不同，这是因为图 7.3 里的电场只是表面电荷分布所形成的电场，而我们在图 7.4 里所见到的电场，则是表面电荷分布的电场叠加上参考系中存在的均匀电场后所形成的总电场．在 F 内的观察者认为："杆内产生了电场 $\mathbf{E}=-(\mathbf{v}/c)\times\mathbf{B}$，它施加 $q\mathbf{E}=-q(\mathbf{v}/c)\times\mathbf{B}$ 的作用力，此力恰好和力 $q(\mathbf{v}/c)\times\mathbf{B}$ 相平衡，如果没有前一个力，后一个力将使电荷 q 沿杆运动．"而在 F' 内的观察者则认为："杆内没有电场；并且，尽管这里有均匀磁场存在，但并不产生作用力，因为没有电荷运动．"这两种看法都是对的．

7.3 迴路在非均匀磁场中运动

假如我们做一个图 7.5 那样的矩形导线迴路，并使它在均匀磁场 $\mathbf{B}$ 中匀速移动，将会如何？ 为了预言会发生什么情况，我们只须问问自己——采用 F' 参考系——如果把这个迴路放进均匀电场时会如何？ 显然，在矩形的两个对边上会出现一些电荷，但也仅只如此而已．现在，再假设在参考系 F 中磁场 $\mathbf{B}$ 尽管不随时间而变，但在空间上是不均匀的． 为逼真起见，我们在图 7.6 中以短螺线管作为磁场的源．这个螺线管



(a) 导线迴路在均匀磁场 $\mathbf{B}$ 中运动；

(b) 在参考系 F' 中（在此参考系中迴路是静止的）观察，有场 $\mathbf{B}'$ 和 $\mathbf{E}'$．

图 7.5

同为它提供稳恒电流的电池一起固定于坐标系 F 的原点附近（我们早先已经讲过，在坐标系 F 中没有电场：如果我们真的用一有限电阻的螺线管来提供磁场的话，与电池和电路相联系是会有一个电场的，但它与我们讨论的问题无关，因而可以略去. 或者，我们可将这整个线圈连同电池一起都装入金属盒中）.

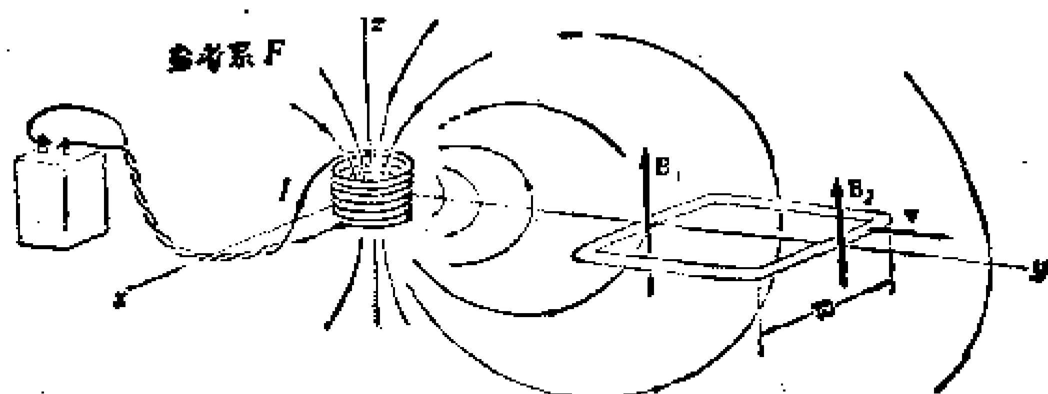


图 7.6　在参考系 F 中观察，磁场 $\mathbf{B}$ 不均匀，其大小及方向均随地点变化.

现在，在坐标系 F 中迴路以速度 v 沿 y 方向运动，设在某时刻 t，迴路左边边上的磁场强度为 B_1，而右边边上的磁场强度为 B_2（图 7.6）. 令 $\mathbf{f}$ 表示作用于沿迴路运动的电荷 q 上的力. 在这一时刻，作用力是迴路上位置的函数. 让我们来计算 $\mathbf{f}$ 绕迴路一周的线积分：在迴路与运动方向平行的两个边上，$\mathbf{f}$ 垂直于路径元 $d\mathbf{s}$，故对积分无贡献. 再考虑其它两个边的贡献，每边边长为 w，可得

$$\int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \frac{qv}{c}(B_1 - B_2)w. \tag{4}$$

我们假设电荷 q 绕迴路移动一周所化的时间很短，以至于迴路的位置没有明显的改变，那么力 $\mathbf{f}$ 所做的功就是式(4). 每单位电荷所作的功为 $(1/q)\int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$. 我们称此量为电动势. 用符号 $\mathscr{E}$ 表示它，通常把它的名称缩写为"emf". $\mathscr{E}$ 与电势的量纲相同，在 CGS 单位制中，以静电伏特或每单位

电荷的尔格数来计量.

$$\mathscr{E}=\frac{1}{q}\int \mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}. \tag{5}$$

电动势一词早已在第4.10节中引入过了. 它定义为使电荷绕电路(其中包括伏打电池)跑一圈时单位电荷所需的功. 现在我们要扩充电动势的定义，把使电荷绕闭路一周的一切影响都包括在内. 如果电路恰好是由电阻R组成的实际电路，按照欧姆定律，电动势将产生电流: $I=\mathscr{E}/R$. 在我们所讨论的特殊情况中，$\mathbf{f}$ 是作用在磁场中运动的电荷上的力，而$\mathscr{E}$的大小为

$$\mathscr{E}=\frac{vw}{c}(B_1-B_2). \tag{6}$$

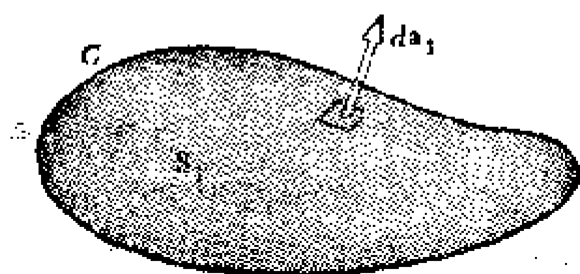
式(6)所给出的电动势与通过迴路的磁通量的变化率有个极简单的关系. 我们用通过某迴路的磁通量来表示以该迴路为边界的表面上的$\mathbf{B}$的面积分. 通过图7.7(a)的闭合曲线或迴路C的磁通量由$\mathbf{B}$在S_1面上的面积分给出:

$$\Phi_{(S_1)}=\int_{S_1}\mathbf{B}\cdot d\mathbf{a}_1. \tag{7}$$

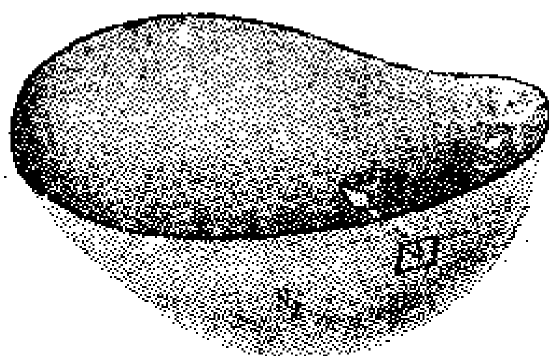
我们可以画出无限多个以C为边界的曲面. 图7.7(b)表示以C为边界的另一曲面S_2. 为什么我们不必指定用哪个曲面来计算通量呢? 这是因为对于所有这些曲面，$\int\mathbf{B}\cdot d\mathbf{a}$ 的值都相同，不同的曲面并不造成任何差别. 让我们花一些时间，把这一点说明一下. 通过S_2的通量为$\int_{S_2}\mathbf{B}\cdot d\mathbf{a}_2$. 注意，我们让矢量$d\mathbf{a}_2$由$S_2$向上的一侧穿出，以便与我们对$S_1$的侧边方向的选择相一致. 如果通过$C$的净通量是向上的，则将得出正值.

$$\Phi_{(S_2)}=\int_{S_2}\mathbf{B}\cdot d\mathbf{a}_2. \tag{8}$$

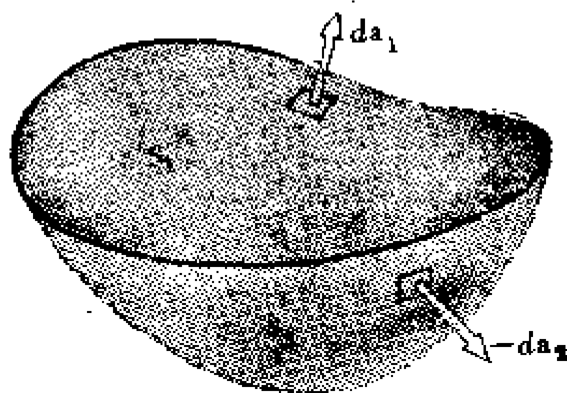
在6.2节中我们已经知道，磁场的散度为零，$\mathrm{div}\mathbf{B}=0$. 如果



(a) 通过 C 的通量是 $\Phi = \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_1$.



(b) S_2 是以 C 为边界的另外一个曲面，它同样可以用来计算 Φ.



(c) S_1、S_2 联合起来成为一个闭合曲面，其 $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$ 必为零，这就证明了 $\int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_1 = \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_2$.

图 7.7

S 为任一闭合曲面（"气球"），V 为其体积，根据高斯定理有

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{B} dv = 0. \tag{9}$$

将此式应用于由 S_1 和 S_2 构成的铜鼓似的闭合曲面上［如图 7.7 (c) 所示］. 在 S_2 上，外法向与我们计算通过 C 的通量时所用的矢量 $d\mathbf{a}_2$ 是反向的. 故

$$0 = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_1 + \int \mathbf{B} \cdot (-d\mathbf{a}_2)$$

或

$$\int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_1 = \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_2. \tag{10}$$

这表明我们无论用哪一个曲面来计算通过 C 的通量都没有关

系.

如果读者理解 $\mathrm{div}\mathbf{B}=0$ 意味着一种空间的通量守恒性质，则上述结果是很明显的. 流入任一容积的通量与流出此容积的通量相等（我们考虑的是在某时刻整个空间的情况）. 设想一种通量"管"会对我们有所助益. 通量管（图 7.8）是这样的一种表面，表面上各点的磁力线均位于该表面上. 它是个没有通量通过的表面，并且可以认为它包含着一定数量的通量，就象电话电缆包含着导线那样. 通过任一紧贴通量管闭合曲线的通量都是相同的. 对于电场 $\mathbf{E}$ 只在无电荷存在的区域才能谈得到这种性质，因为 $\mathrm{div}\mathbf{E}=4\pi\rho$. 而磁场则各处的散度恒为零.

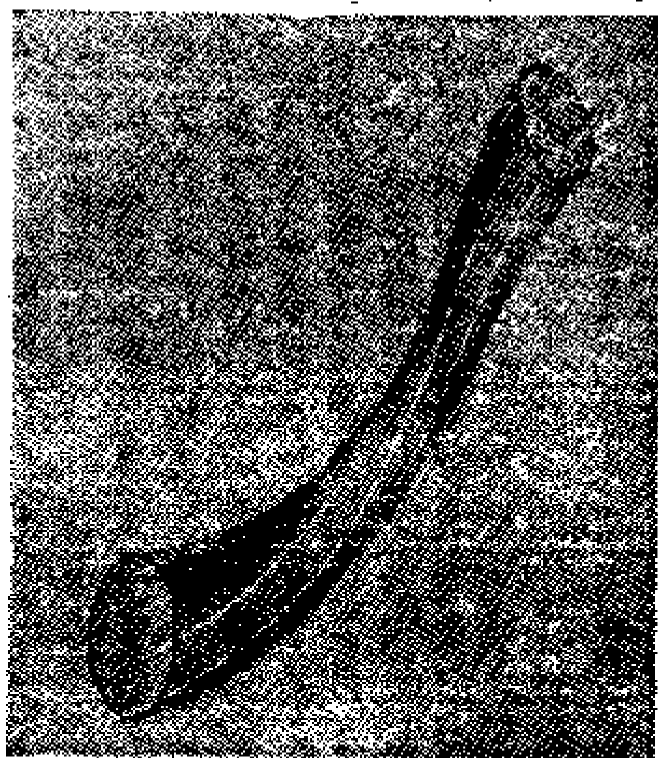


图 7.8 一通量管. 磁力线位于该管表面. 该管包围着一定数量的通量 Φ. 不论在什么地方切开它，都会发现该截面上的 $\int\mathbf{B}\cdot d\mathbf{a}$ 为同一个 Φ 值. 通量管并不一定是圆的. 可以从任意截面的某处开始，当沿着通量管前进时，磁力线的径迹将确定截面的尺寸和形状如何变化.

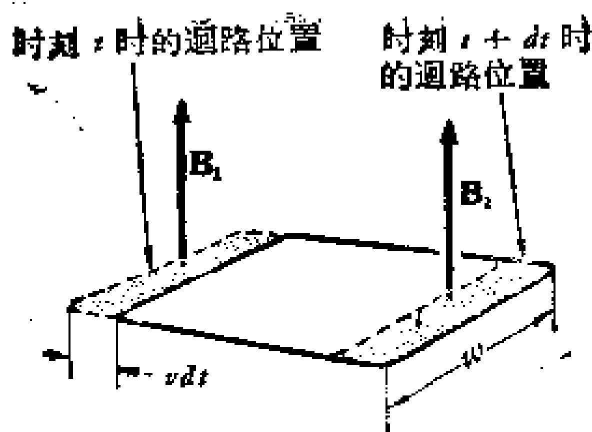


图 7.9 在时间间隔 dt 中，迴路得到通量增量 B_2wvdt，失去 B_1wvdt.

现在让我们再回到移动的矩形迴路上来，求出通过迴路的磁通量的变化率. 在时间 dt 内，迴路移动了 vdt 的距离. 通过迴路的总通量就是对跨越在迴路上的表面积分 $\int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{a}$，它以两种方式变化. 如你们可以从图 7.9 中看到，右边增加的通量为 B_2wvdt，而左边却失去了通量 B_1wvdt，因而在时间 dt 内通过迴路的通量变化为

$$d\Phi = -(B_1 - B_2)wvdt. \tag{11}$$

将式(11)与式(6)相比较，我们看到，至少在上述情形下电动势可以写为

$$\mathscr{E} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}. \tag{12}$$

可以证明，对于任意形状以任意方式运动的迴路，这个式子都是普遍有效的. 图 7.10 中的迴路 C，t 时刻在位置 C_1，由于它在运动，所以到 $t+dt$ 时它在位置 C_2. 迴路上的一特定线元 ds 以速度 $\mathbf{v}$ 移至新位置. S 表示 t 时刻跨越在迴路上的一个面. 此时通过这个迴路的通量为

$$\Phi(t) = \int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{a}. \tag{13}$$

对于固定在此参考系中的任何点，磁场 $\mathbf{B}$ 来源于在此参考系

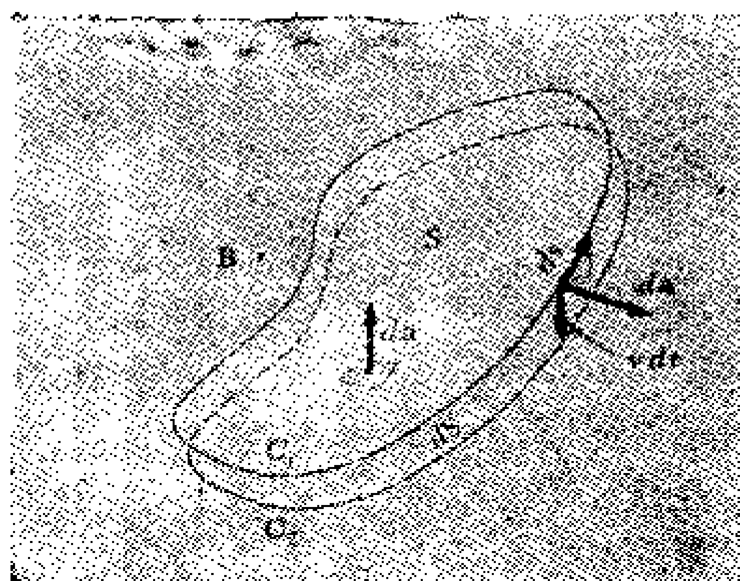


图 7.10 在 dt 时间内，迴路由位置 C_1 移到 C_2.

中是稳定的场源，并且 **B** 不随时间而变化. 在 $t+dt$ 时刻，跨越在迴路上的表面是原来的表面 S，它在空间保持固定，再加上"轮边" dS.（记住，我们可以用跨在迴路上的任意表面来计算通过迴路的通量）故

$$\Phi(t+dt)=\int_{S+dS}\mathbf{B}\cdot d\mathbf{a}=\Phi(t)+\int_{dS}\mathbf{B}\cdot d\mathbf{a}, \quad (14)$$

在 dt 时间内通量的变化正好是通过"轮边" dS 的通量 $\int_{dS}\mathbf{B}\cdot d\mathbf{a}$. 在轮边上，面元 $d\mathbf{a}$ 可以用 $(\mathbf{v}dt)\times d\mathbf{s}$ 表示，故对曲面 dS 的积分可以写成绕路径 C 的积分，

$$d\Phi=\int_{dS}\mathbf{B}\cdot d\mathbf{a}=\int_{C}\mathbf{B}\cdot[(\mathbf{v}dt)\times d\mathbf{s}]. \quad (15)$$

对这个积分来说由于 dt 是常量，可将它作为因子提出来，故有

$$\frac{d\Phi}{dt}=\int_{C}\mathbf{B}\cdot(\mathbf{v}\times d\mathbf{s}). \quad (16)$$

根据三重混合积的规则［见卷 I，式(52)］，我们有等式 $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=-(\mathbf{b}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{c}$. 用此公式重新排列式(16)，可得

$$\frac{d\Phi}{dt}=-\int_{C}(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{s}. \quad (17)$$

作用于沿迴路运动的电荷 q 上的力正是 $q(\mathbf{v}\times\mathbf{B})/c$，故每单位电荷所受的力沿迴路一周的曲线积分，即电动势，给为

$$\mathscr{E}=\frac{1}{c}\int_{C}(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{s}. \tag{18}$$

比较式(17)和式(18)，就可得到在式(12)中已经给出过的简单关系，但此时对任何形状，任意运动的迴路都有效。(甚至无需假定迴路各部分的 $\mathbf{v}$ 相同!) 概括地说，单位电荷所受的力 $\mathbf{f}/q$ 绕运动着的环路的积分正好等于 $-1/c$ 乘上通过迴路的通量变化率。

线积分的取向与磁通量的正向之间的关系遵从右手螺旋法则。例如在图 7.6 的情形，通过迴路的通量是向上的，并且在减少着。考虑到式(12)中的负号，我们得出的规律预言，从迴路由上向下看时，电动势将趋向于推动正电荷沿逆时针方向环绕迴路运动(图 7.11)。

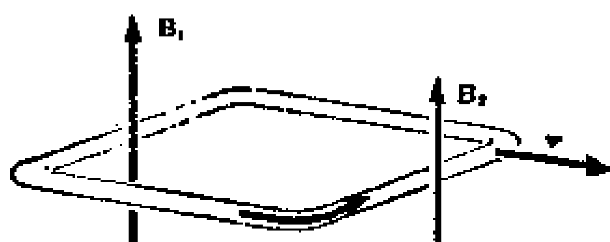


图 7.11　通过迴路的通量是向上的，且随时间而减小。图中的箭头表示电动势的方向，即正电荷有沿此方向被推动的趋势。

有个考虑符号和方向问题的更好办法。注意，对图 7.11 所示的情形，如果电流沿感应电动势方向流动，则此电流本身将产生某些通过这迴路的磁通量，以抵消原来的磁通量变化。这是个带有根本性的物理事实，而不是对符号和方向所作的任意规定的结果。这是系统反抗变化倾向的一种表现。在电磁感应方面，习惯上称之为楞次定律。

楞次定律的另一个例子示于图 7.12 中。一导体环在线圈的磁场中下落。通过环的磁通量的方向向下而且数值在增大。为了反抗这种变化，需要一些新的向上的磁通量。倘若使电

流按箭头方向绕环流动，那么就会产生这种磁通．楞次定律使我们确信，感应电动势将会在箭头方向产生这样的电流．

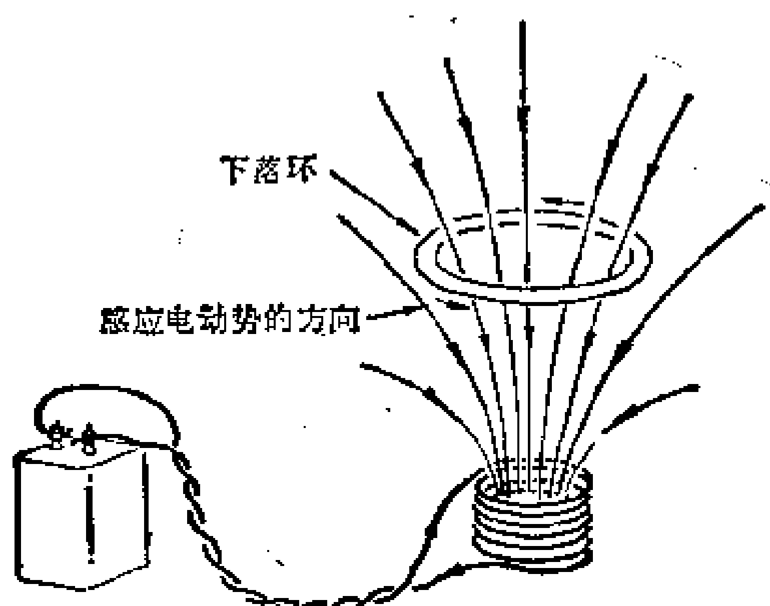


图 7.12 当环下落时，过环向下的磁通量增大．楞次定律告诉我们，感生电动势应沿箭头所指的方向，因为电流须沿此方向流动才能产生过环向上的通量．系统产生这样的作用才能反抗正在发生的变化的．

如果电动势所引起的电流在图 7.6 和图 7.11 所示的迴路中流动，迴路又有一定的电阻，那么导线将消耗一些能量．由什么来提供这一能量呢？为了回答上述问题，我们考虑一下，如果电流沿图 7.11 箭头的方向流动，作用在迴路电流上的力．右边的导体处于强度为 B_2 的场中，受一向右的力，而对边则处于强度为 B_1 的场中，将被向左推．但 B_1 大于 B_2，故迴路所受的净力是向左的，与运动方向相反．为了保持迴路为恒速运动，某种外力必须做功，这能量递给导线之后，最后在金属导线中就以热表现出来．试想如果楞次定律被破坏，或者说，如果作用在迴路上的力是沿迴路运动的方向，帮助迴路运动的话，将会发生怎样的情形！

在电机和电学仪器中最一般的部件是在磁场中旋转的迴

路或线圈．让我们把刚才学到的知识应用于图 7.13 中所示的系统，这是一个在近似均匀的磁场中以恒定速率旋转的回路．其机械结构，旋转轴、轴承、传动装置等均未画出．磁场 **B** 由两个固定线圈提供．设回路以角速度 ω 转动，单位为弧度/秒．若回路在任一时刻的位置由角度 θ 给出，则 $\theta=\omega t+\alpha$，常数 α 就是 $t=0$ 时的回路位置．**B** 的垂直于回路平面的分量为 $B\sin\theta$．故在 t 时刻通过回路的通量为

$$\Phi(t)=SB\sin(\omega t+\alpha), \tag{19}$$

这里 S 是回路的面积．故感生电动势为

$$\mathscr{E}=-\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{SB\omega}{c}\cos(\omega t+\alpha). \tag{20}$$

如果回路不是闭合的，而是将回路通过滑环与外导线联接，如图 7.13 所示，则我们可以在导线的端点测出正弦式交替变化的电势差．

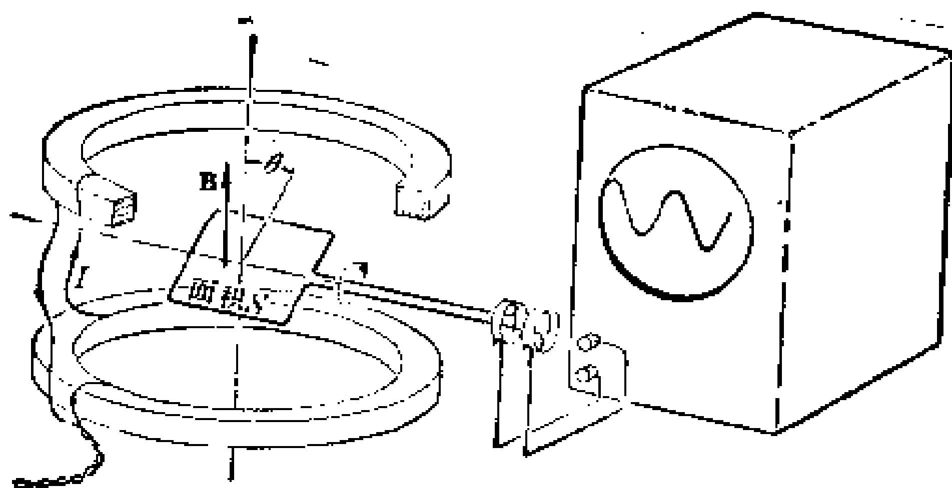


图 7.13　两组线圈产生的磁场 B 在回路附近几乎是均匀的．在以角速度 ω 转动的回路中感生了一个按正弦变化的电动势．

举个具体数值的例子，可以弄清关于单位的问题．假设磁场强度 B 是 500 高斯，转速为每秒 30 周，回路面积为 100 厘米^2．则 $\omega=2\pi\times30$，即 188 弧度/秒；而振荡电动势的振幅，即最大值，为

$$\mathscr{E}_{\max}=\frac{SB\omega}{c}=\frac{(188\ 秒^{-1})(100\ 厘米^2)(500\ 高斯)}{(3\times10^{10}\ 厘米\cdot秒^{-1})}$$

$$=3.1\times10^{-4}\ 高斯\cdot厘米，或静电伏特. \qquad (21)$$

由于$\mathscr{E}$是每单位电荷的功，在我们所用的 CGS 单位制中，应当以静电伏特为单位。注意，在式(21)中导出的单位为高斯·厘米。在 CGS 高斯单位制中，电场强度 E 和磁场强度 B 有同样的量纲。例如，象在 $\mathbf{E}'=(\mathbf{v}/c)\times\mathbf{B}$ 这样的转换公式中，我们用一个无量纲的比值 v/c 乘磁场强度就得到电场强度(电场强度的单位是每厘米静电伏特，没有给它一个独特的，象高斯这样的名称)。故 1 高斯·厘米直接转换为 1(静电伏特/厘米)·厘米，即 1 静电伏特。通常用"实用"单位制的伏特为单位，上例中电动势的振幅等于 $3.1\times10^{-4}\times300$，即 0.093 伏特。

7.4 场源运动时场中的静止迴路

如果愿意，我们可以在随迴路一起运动的参考系中来观察图 7.6 中所描绘的事件。这不会改变其物理实质，只是改变描述的用语。令坐标为 x'、y'、z' 的参考系 F' 是附着在迴路上的，并认为它此时是静止的(图 7.14)。则在参考系 F 中静止的线圈和电池在 F' 中沿 $-y'$ 的方向以速度 $\mathbf{v}'=-\mathbf{v}$ 运动着。令 B_1' 和 B_2' 是在 F' 中的观察者在某时刻 t' 测得的迴路两边上的磁场。在 F' 内，这些地方将有电场存在。式(6.62)告诉我们：

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1'&=-\frac{\mathbf{v}'\times\mathbf{B}_1'}{c}=\frac{\mathbf{v}\times\mathbf{B}_1'}{c},\\ \mathbf{E}_2'&=-\frac{\mathbf{v}'\times\mathbf{B}_2'}{c}=\frac{\mathbf{v}\times\mathbf{B}_2'}{c}.\end{aligned}\qquad(22)$$

对于 F' 中的观察者说来，这是一个真实存在的电场。它

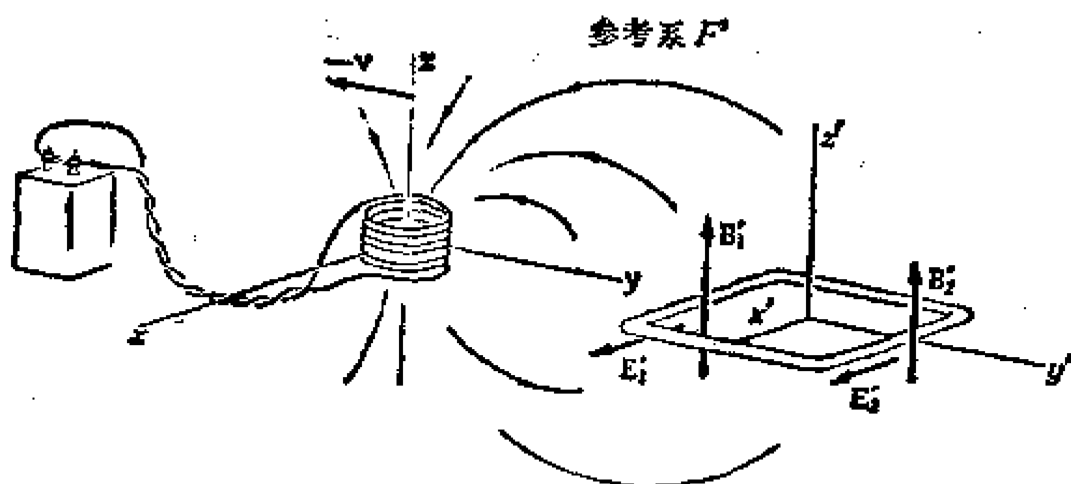


图 7.14 F' 参考系中的观察者看来，迴路是静止的，场源在运动．$\mathbf{B}'$ 与 $\mathbf{E}'$ 两种场都存在，它们既是位置又是时间的函数．

不是静电场． 在 F' 参考系中，$\mathbf{E}'$ 绕任一闭路的线积分一般并不为零．事实上 $\mathbf{E}'$ 绕矩形迴路的线积分为

$$\int \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{s}' = \frac{wv}{c}(B_1' - B_2'). \qquad (23)$$

我们可以称式(23)中的线积分为沿这路径的电动势 $\mathscr{E}'$．若有一带电粒子绕此路径一周，$\mathscr{E}'$ 就是对每单位电荷所做的功． $\mathscr{E}'$ 与通过迴路的磁通量的变化率有关．为了看出这点，我们应注意到，当迴路本身静止时，磁场的图案现在是以磁场源的速度 $-\mathbf{v}$ 运动着的． 由于迴路两边在时间间隔 dt' 内失去或得到磁通量，我们得到的结果与式(11)相同，从而得出结论

$$\mathscr{E}' = \frac{1}{c}\frac{d\Phi'}{dt}. \qquad (24)$$

对于二个参考系，一个是 B 的源在其中是静止的参考系 F，另一个是迴路在其中静止的参考系 F'，概括起来可以作如下的描述：

在 F 中的观察者说："我们这里有个在空间分布上不均匀，而且不随时间变化的磁场．这里没有电场．金属迴路以速

度 $\mathbf{v}$ 在通过磁场中，因而廻路中的每单位电荷受到 $(\mathbf{v}/c)\times\mathbf{B}$ 这因的作用力. 此单位电荷所受的力绕整个廻路一周的线积分就是电动势 $\mathscr{E}$，它等于 $-(1/c)(d\Phi/dt)$. 磁通量 Φ 是，按我的时钟上的某时刻 t，对跨越在廻路上的曲面 S 的面积分 $\int\mathbf{B}\cdot d\mathbf{a}$。"

在 F' 中的观察者则说："廻路静止不动，只有电场才能使廻路中的电荷运动. 事实上确有一个电场 $\mathbf{E}'$. 看来似乎是由一个象磁体一样的东西突然以速度 $-\mathbf{v}$ 运动的那一瞬间产生的，同时还产生一相当强的磁场 $\mathbf{B}'$. 对这个电场说来，绕此静止廻路一周的积分 $\int\mathbf{E}'\cdot d\mathbf{s}'$ 不为零，它等于 $-1/c$ 乘上通过这个廻路的磁通量的变化率 $d\Phi'/dt'$. 通量 Φ' 是跨在廻路的面上的面积分 $\int\mathbf{B}'\cdot d\mathbf{a}'$，$B'$ 的值是，按我的时钟的某时刻 t'，在上述表面各处测得的."

到此为止我们的结论都是相对论性准确. 只要我们严密地注意 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{B}'$，t 和 t' 等之间的区别，对于一切 $v\leqslant c$，上述结论都是正确的. 如果 $v\ll c$，v^2/c^2 可以忽略，B' 实际上就等于 B，而且我们还可以放心地忽略 t 和 t' 之间的区别.

7.5 普适的感应定律

让我们用图 7.15 所示的仪器来做三个实验. 两个工作台都安在轮子上，因此它们容易移动. 一个灵敏电流计连接在原先那个矩形廻路上，为了增大感生电动势，廻路绕了好几圈而不是一圈. 尽管如此，老实讲用图中那样的微弱磁场源来做实验的话，我们的灵敏度可能是非常勉强的，或许你在实验室中能够设计出更切合实际的实验方案.

实验 I　线圈中通以恒定电流，台 1 保持静止，台 2 以速率 v 向右移动. 电流计偏转. 我们并不感到惊奇，因为在 7.3 节中我们已经分析过这种情况了.

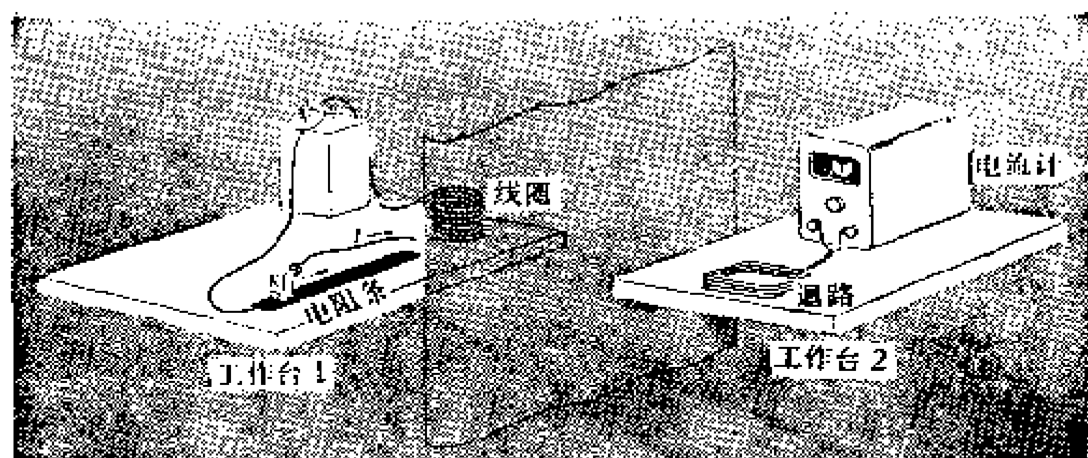


图 7.15　设想两个工作台，每个都可移动；或者将二者固定，线圈中的电流 I 可逐渐改变.

实验 II　线圈中通以恒定电流，台 2 保持静止，台 1 以速率 v 向左移动，电流计偏转．这也不使我们感到惊奇．我们刚才已经讨论过，实验 I 与 II 是等价的．这种等价是洛仑兹不变性的一个例子；或者，由于工作台以低速率移动，它也是伽里略不变性的一个例子．我们知道，在这两个实验中，电流计的偏转能够与经过回路的 **B** 的通量的变化率相联系．

实验 III　两个工作台都保持静止，但使触片 K 沿电阻条滑动以改变线圈中的电流 I．滑动时让回路中的磁场 **B** 的减小率与实验 I 和 II 中磁场 **B** 的减小率相同．电流计偏转吗？

对于一个站在工作台 2 的回路旁边，测量回路近傍的磁场(它是时间和位置的函数，对观测者来说，他是无法区分实验 I、II、III 之间的差别的．设想在两个工作台之间有个黑布帘．虽然实验 II 和 III 中磁场的构图可能有微小的差别，但一个不知道帘子后面在做什么的观察者，仅仅根据对局部区域的 **B** 的测量无法判断是在进行实验 II 还是进行实验 III．所以，如果电流计在实验 III 中的偏转与实验 II 中的不同，可能意味着某个区域中的磁场和电场间的关系与某个远方场源的性质有关．在局部地域性质上基本类似的两个磁场，就会在一种

情况下，有一个电场符合$\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}\neq 0$与之相联系，而在另一情况下，则没有这个电场。

我们由实验发现，实验 III 与实验 I、II 等效。实验 III 中电流计的偏转量和实验 I、II 的一样。法拉第实验是第一个证明这个基本事实的实验。我们所观察到的电动势只取决于 $\mathbf{B}$ 的通量变化率而与其它任何因素无关。我们可以把法拉第感应定律表达为如下的普遍关系式：

> 若 C 为某一闭合曲线，静止在 x, y, z 坐标系中；又若 S 为跨在 C 上的曲面，$\mathbf{B}(x, y, z, t)$ 为任一时刻 t 在 x、y、z 处测得的磁场，则
>
> $$\mathscr{E}=\int_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}=-\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{a}=-\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}. \tag{25}$$

采用旋度这个矢量微商，我们可以用微分形式来表示这个定律。如果关系式

$$\int_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}=-\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{a} \tag{26}$$

确实对任意曲线 C 及跨于其上的曲面 S 都成立，那么，就如我们的定律所断言的，在任意点有如下的关系：

$$\operatorname{curl}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{d\mathbf{B}}{dt}. \tag{27}$$

为了证明式(27)是可由式(26)推出的，我们象通常那样，令 C 环绕着函数 $\mathbf{B}$ 的非奇点收缩。在极限情况，跨越 C 的一小块面积 $\mathbf{a}$ 上的各点 $\mathbf{B}$ 的变化可忽略不计，而面积分将趋近于 $\mathbf{B}\cdot\mathbf{a}$。根据定义［式(2.76)］，当小块曲面收缩时，$\int_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$ 趋近的极限为 $\mathbf{a}\cdot\operatorname{curl}\mathbf{E}$。于是在极限时，有

$$\mathbf{a}\cdot\operatorname{curl}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{d}{dt}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{a})=\mathbf{a}\cdot\left(-\frac{1}{c}\frac{d\mathbf{B}}{dt}\right). \tag{28}$$

因为对于任一无限小的 $\mathbf{a}$ 上式都成立，故必有[1]

$$\text{curl}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{d\mathbf{B}}{dt}. \tag{29}$$

注意到$\mathbf{B}$不仅随时间变化而且还可能随位置改变，因此我们应该用 $\partial\mathbf{B}/\partial t$ 代替 $d\mathbf{B}/dt$. 于是感应定律就有两种完全等效的表述：

$$\int_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{a},$$

或

$$\text{curl}\ \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}. \tag{30}$$

在式(30)中电场$\mathbf{E}$用绝对静电单位，即静伏特/厘米表示，$\mathbf{B}$用高斯. 电动势$\mathscr{E} = \int_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$以静伏为单位. 在实际计算中，我们经常用伏特来表示电动势，同时保持用高斯做磁场强度的单位. 由于1静电伏特等于300伏，就会看出$\mathscr{E}$和磁通量变化率间的关系必为：

$$\underset{(\text{伏特})}{\mathscr{E}} = \int_C \underset{(\text{伏特/厘米})}{\mathbf{E}}\cdot \underset{(\text{厘米})}{d\mathbf{s}} = -(10^{-8})\underset{(\text{秒})}{\frac{d}{dt}}\underset{(\text{高斯})}{\mathbf{B}}\cdot \underset{(\text{厘米}^2)}{d\mathbf{a}}$$

$$= -(10^{-8})\frac{d\Phi}{dt}\left(\frac{\text{高斯}\cdot\text{厘米}^2}{\text{秒}}\right). \tag{31}$$

微分表达式，$\text{curl}\ \mathbf{E} = -(1/c)\ \partial\mathbf{B}/\partial t$，更清楚地显示出了我们早先想要得出的场关系的区域性质. 在某点邻域中，$\mathbf{B}$随时间的变化完全确定了该点的 curl $\mathbf{E}$，与别的任何事都无关. 当然，这并不能完全确定$\mathbf{E}$本身. 可以叠加上任何静电场(其 curl $\mathbf{E} = 0$)而不影响这一关系.

1) 如果觉得这还不明显，可以想一想，当 $\mathbf{a}$ 选在沿 x 方向时，将有 $(\text{curl}\mathbf{E})_x = -\frac{1}{c}\frac{dB_x}{dt}$，等等.

作为一个具体例子，假设线圈是如图 7.13 那样的，但输入的不是直流，而是 60 周/秒的交变电流．电流和磁场以 $\sin(2\pi\cdot 60\cdot t)$，即 $\sin 377t$ 而变化．假设电流的幅值能使线圈中心区域的 **B** 值达到极大值 50 高斯．我们来研究半径

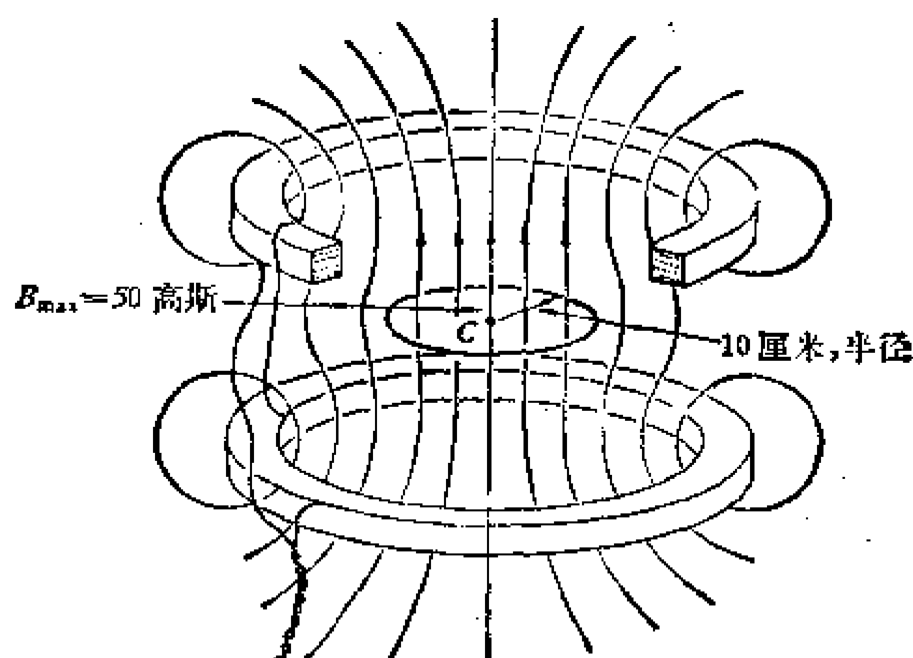


图 7.16 在线圈中心，线圈中交变电流产生的磁场在向上 50 高斯与向下 50 高斯之间振荡．任何时刻，在圆周 C 内的磁场近似均匀．

为 10 厘米的圆周上的感生电场和感生电动势（如图 7.16 所示）．可以假设任何时刻在这圆内的磁场 **B** 实际上是均匀的．

$$B = 50\sin 377t, \tag{32}$$

B 以高斯，t 以秒为单位．通过回路 C 的通量为

$$\begin{aligned}\Phi = \pi r^2 B &= \pi \times 10^2 \times 50\sin 377t\\ &= 15{,}700\sin 377t(\text{高斯}\cdot\text{厘米}^2).\end{aligned} \tag{33}$$

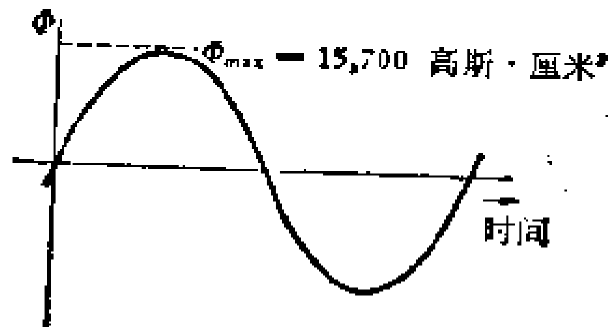
用式 (31) 来计算电动势(以伏特为单位)，

$$\begin{aligned}\mathscr{E} = -(10^{-8})\frac{d\Phi}{dt} &= -(10^{-8})(377)(15{,}700)\cos 377t\\ &= -0.059\cos 377t\ (\text{伏特}),\end{aligned} \tag{34}$$

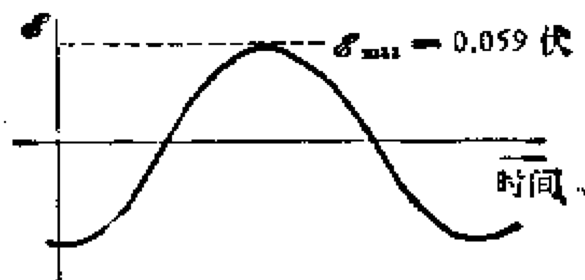
$\mathscr{E}$ 所达到的极大值为 59 毫伏．如果我们规定的方向与过去一

致的话，式中的负号就能保证和楞次定律相一致。Φ 与$\mathscr{E}$随时间的变化表示在图 7.17 中。

电场本身是怎样的呢?只知道 curl **E** 通常不能推出 **E** 来。



(a) 通过圆周 C 的通量。



(b) 路径 C 上的电动势。

图 7.17

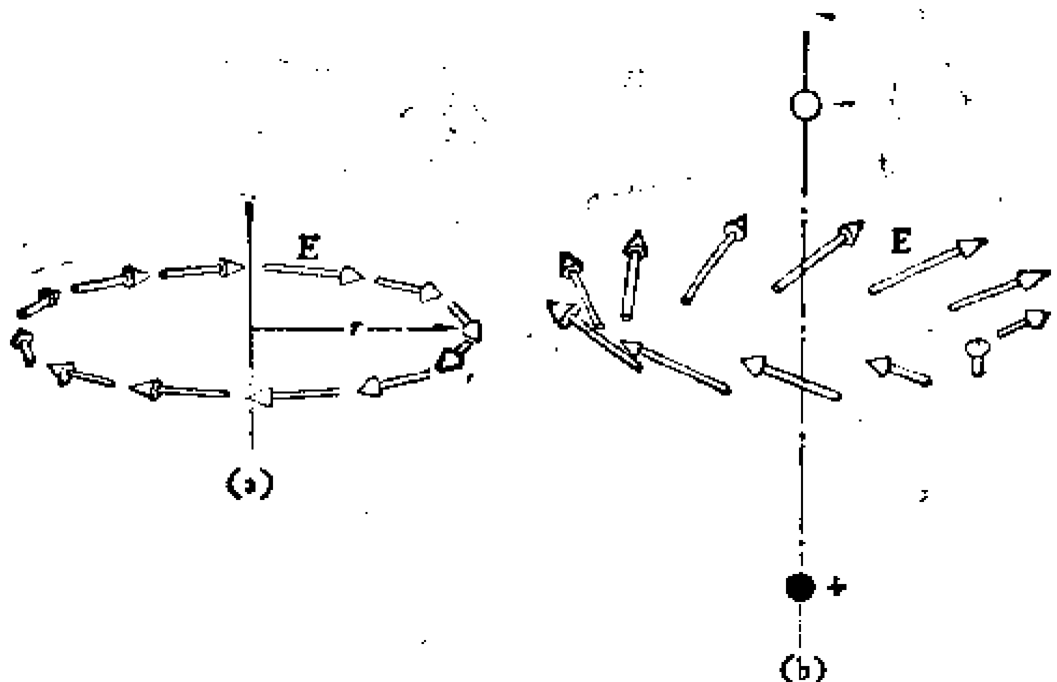


图 7.18 在圆形路径 C 中的电场：(a) 除了对称的振荡电流外无其他源；(b) 除上述电源外，还要包括轴上两个电荷的静电场。

然而，这里的路径 C 是一个环绕对称系统中心的圆，如果周围无其它电场，我们可以假定在圆周 C 上，$\mathbf{E}$ 位于圆周平面上，其数值为常量．这样一来，预言 $\mathbf{E}$ 的大小就简单了．因为我们已经计算过，$\int_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = 2\pi r E = \mathscr{E}$．在这种情况下，在某特定时刻，圆周上的电场可以看作是象图 7.18 (a) 那样的．但是如果有其他场源，则电场就可能会完全不同了．如果轴上恰好有一个正电荷和一个负电荷，如图 7.18 (b) 所示，则圆周附近的电场将是这两个电荷的静电场与感生电场的叠加．

7.6 互　感

两个电路或迴路 C_1 和 C_2 的相对位置保持固定(图7.19)．

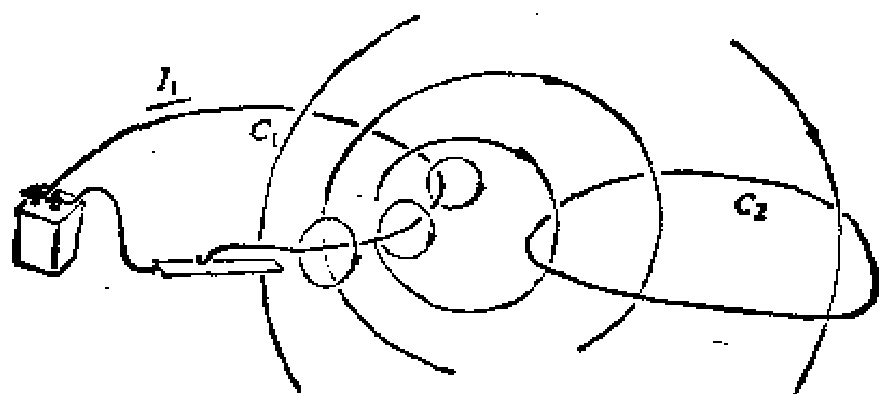


图 7.19　迴路 C_1 中的电流 I_1 在迴路 C_2 中引起磁通量 Φ_{21}．

用某种方法，例如用一电池和可变电阻，在电路 C_1 中产生一个可控制的电流 I_1．设 C_1 中的电流保持恒定值 I_1，其磁场为 $B_1(x,y,z)$，并令 Φ_{21} 表示 $\mathbf{B}_1$ 通过电路 C_2 的通量．于是

$$\Phi_{21} = \int_{S_2} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{a}_2, \tag{35}$$

S_2 为跨在迴路 C_2 上的曲面．若这两个电路的形状和相对位置固定，则 Φ_{21} 将正比于 I_1

$$\frac{\Phi_{21}}{I_1} = 常数． \tag{36}$$

现在假定 I_1 随时间变化，但变得足够慢，以致于使 C_2 近傍的任意点的场 $\mathbf{B}_1$ 与同一时刻流过 C_1 的电流 I_1 之间的关系仍和恒稳电流时一样（为了看出这种限制为什么是必要的，设想 C_1 和 C_2 相距 10 米，并使 C_1 中的电流值在 10 毫微秒中增大一倍时的情形！）. 磁通量 Φ_{21} 的变化将与 I_1 的变化成正比. 在电路 C_2 中将有一感生电动势，其大小为

$$\mathscr{E}_{21}=-\frac{\text{常量}}{c}\cdot\frac{dI_1}{dt}, \tag{37}$$

此处之常量与式(36)中的相同. 将分母中的 c 包括到一个单一的常量之中，并以 M_{21} 表示它，式(37)就可写为

$$\mathscr{E}_{21}=-M_{21}\frac{dI_1}{dt}. \tag{38}$$

我们称常量 M_{21} 为互感系数. 其值由两个迴路的几何组态决定. 单位自然决定于所选用 $\mathscr{E}$, I 和 t 的单位. 在实用单位制中，$\mathscr{E}_{21}$ 以伏特，I_1 以安培为单位，M 以亨利来表示[1]. 就是说，若以 1 安培/秒的速率变化的电流 I_1 在电路 C_2 中感生的电动势为 1 伏特，则互感 M_{21} 为 1 亨利.

作为一个例子，我们来研究一下图 7.20 中的电路，它由两个共面同心的圆环组成，小环 C_2 和大环 C_1. 这种情形 M_{21} 多大？当 I_1 在 C_1 中流动时，在 C_1 中心的磁场 B_1 由下式给出

$$B_1=\frac{2\pi I_1}{cR_1}, \tag{39}$$

其中 I_1 以静电电量单位/秒为单位，B_1 以高斯为单位［如果你不记得如何求电流环中心处的磁场，请复习一下 6.5 节开

---

1) 此单位是以那时最有名的美国物理学家约瑟夫·亨利(1797—1878)命名的. 实际上与法拉第实验的同时，亨利独立地发现了电磁感应. 他是第一个了解自感现象的. 他发明了电磁铁，研制了电动机、继电器，几乎要发明电报.

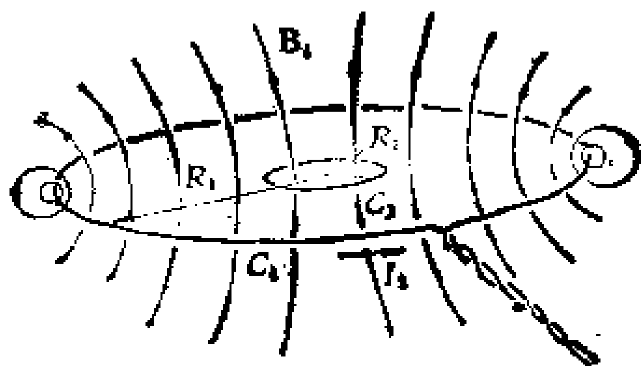


图 7.20　圆环 C_1 中的电流 I_1 产生磁场 B_1，它在小环 C_2 的区域内几乎是均匀的。

始处导出式(6.42)的那一段]．假定 $R_2 \ll R_1$，我们可以忽略 B_1 在小环内的变化．通过小环的通量为

$$\Phi_{21} = (\pi R_2^2)\frac{2\pi I_1}{cR_1} = \frac{2\pi^2 I_1 R_2^2}{cR_1}, \tag{40}$$

所以在这一特殊情况下，式(36)中的"常量"值为 $2\pi^2 R_2^2/cR_1$，C_2 中的感生电动势将为

$$\mathscr{E}_{21} = -\frac{1}{c}\frac{2\pi^2 R_2^2}{cR_1}\cdot\frac{dI_1}{dt}, \tag{41}$$

$\mathscr{E}_{21}$ 以静电伏特为单位，I_1 以静电电量单位/秒为单位．为了用亨利来表示互感，我们注意 1 静电伏特等于 300 伏特，I(静电电量单位/秒) $= I$(安培)$/3\times10^9$，则

$$\mathscr{E}(\text{伏特}) = -\frac{2\pi^2 R_2^2}{R_1}\times10^{-9}\frac{dI}{dt}(\text{安培/秒}). \tag{42}$$

故 R_2、R_1 以厘米为单位，M_{21} 以亨利为单位时，M_{21} 的值为

$$M_{21} = \frac{2\pi^2\times10^{-9}R_2^2}{R_1}. \tag{43}$$

附带提一下，前面一直保留的负号现在意义不大了．如果想要确定 C_2 中电动势将沿什么方向驱动电流，最可靠的准则仍是楞次定律．

若电路 C_1 由 N_1 圈导线构成而不是单圈的，那么对已给

定的电流 I_1，中心处的磁场 B_1 将是原来强度的 N_1 倍. 如果小环路 C_2 由半径为 R_2 的 N_2 圈导线构成，则每一圈的电动势将加到下一圈上，这就使电路中的总电动势为单圈时的 N_2 倍. 故当每个线圈均为多圈时，互感将由

$$M_{21}=\frac{2\pi^2\times 10^{-9}N_1N_2R_2^2}{R_1} \tag{44}$$

给出.

这须假定线圈每一匝都是整齐地捆在一起的，而且线包横截面与线圈半径相比是很小的. 互感 M_{21} 对两个任意形状或分布的线路具有确定的定义. 就是电路 2 中的电动势（由电路 1 中的变化电流产生，以伏特为单位）与电流 I_1 的变化率（以安培/秒为单位）之比，即

$$M_{21}(\text{亨利})=\frac{\mathscr{E}_{21}\,(\text{伏特})}{\left(\frac{dI_1}{dt}\right)\left(\frac{\text{安培}}{\text{秒}}\right)} \tag{45}$$

7.7 互易定理

在考虑电路 C_1 和 C_2 时，我们也可以问电路 C_2 中的变化电流在电路 C_1 中感生的电动势如何. 这就会涉及到另一个互感系数 M_{12}:

$$M_{12}=\frac{\mathscr{E}_{12}}{\left(\frac{dI_2}{dt}\right)}. \tag{46}$$

对于任意两个电路

$$M_{12}=M_{21}, \tag{47}$$

这是一个值得注意的事实.

这不是几何对称性的问题. 即使像图 7.20 中那样的简单例子，两个电路也不是对称的. 注意，R_1 和 R_2 在 M_{21} 的表达

式中出现的地位不同；式(47)断言，对于这两个不同的电路，若

$$M_{21}=\frac{2\pi^2\times 10^{-9}N_1N_2R_2^2}{R_1},$$

则 M_{12} 也必有同样的值

$$M_{12}=\frac{2\pi^2\times 10^{-9}N_1N_2R_2^2}{R_1}.$$

这并不是把式子中各处的下标1、2对调所能得到的！

为了证明式(47)的定理，我们须证明由电路 C_2 中的电流 I 产生的通过电路 C_1 的磁通量 Φ_{12}，等于当电路 C_1 中流过相等的电流 I 时，通过电路2的磁通量 Φ_{21}. 我们用矢势来证明这一点.

根据斯托克斯定理

$$\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s}=\int_S(\mathrm{curl}\,\mathbf{A})\cdot d\mathbf{a}. \tag{48}$$

特别是如果 $\mathbf{A}$ 是磁场 $\mathbf{B}$ 的矢势，也就是如果 $\mathbf{B}=\mathrm{curl}\,\mathbf{A}$，则有

$$\boxed{\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s}=\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{a}=\Phi_S}. \tag{49}$$

就是说，矢势绕一迴路的线积分，等于通过该迴路的 $\mathbf{B}$ 的通量.

根据式(6.35)，矢势与电流源间有下述关系：

$$\mathbf{A}_{21}=\frac{I}{c}\int_{C_1}\frac{d\mathbf{s}_1}{r_{21}}. \tag{50}$$

$\mathbf{A}_{21}$ 是电路 C_1 中的电流 I（静电电量单位/秒）所产生的磁场在某点 (x_2, y_2, z_2) 的矢势；$d\mathbf{s}_1$ 是迴路 C_1 上的一段线元，r_{21} 是由此线元至点 (x_2, y_2, z_2) 的距离.

图7.21表示 C_1、C_2 两个迴路，C_1 中有电流 I 流动. 令

(x_2, y_2, z_2) 为迴路 C_2 上的一点，则由 C_1 中的电流 I 产生的通过 C_2 的通量为

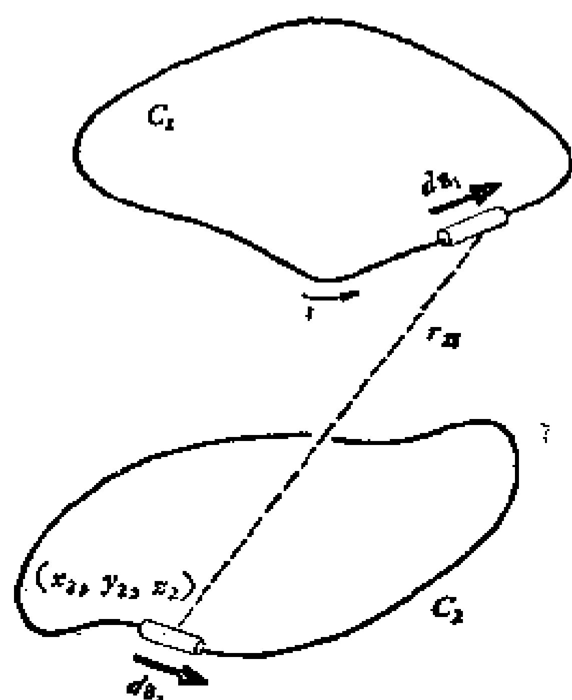


图 7.21 计算由在 C_1 中流动的电流 I 产生的通过 C_2 的通量 Φ_{21}.

$$\Phi_{21} = \int_{C_2} \mathbf{A}_{21} \cdot d\mathbf{s}_2 = \int_{C_2} d\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{A}_{21} = \frac{I}{c} \int_{C_2} d\mathbf{s}_2 \cdot \int_{C_1} \frac{d\mathbf{s}_1}{r_{21}} \tag{51}$$

同样，由在 C_2 中流动的电流 I 所产生的通过 C_1 的通量是

$$\Phi_{12} = \frac{I}{c} \int_{C_1} d\mathbf{s}_1 \cdot \int_{C_2} \frac{d\mathbf{s}_2}{r_{12}}. \tag{52}$$

现在 $r_{12} = r_{21}$，因为它们只是距离的大小，不是矢量. 式(51)与式(52)这两个积分的含意是：在每个迴路上各取一线元，并求此对线元的标积，用它们间的距离去除，再对所有线元对求和. 式(51)与式(52)的唯一区别就是于这种运算的*次序*，但这并不影响最终的结果. 所以 $\Phi_{12} = \Phi_{21}$，由此可直接得到 $M_{12} = M_{21}$. 由于这个定理，我们无需区分 M_{12} 和 M_{21}，因而今后我们就可以讲任意两个电路之间的互感M了.

这类定理通常称为"互易"定理. 电路中还有一些其它的互易定理，也不是与它没有关系的. 这可能使我们想到 3.6 节中提到过，并在习题 3.27 中处理过的关系 $C_{jk} = C_{kj}$. 互易关系通常代表某种普遍的对称规律，它在系统的外表结构上并不明显. 当我们研究电磁波传播时，我们会遇到非常广泛的，从某种观点看来也是令人惊异的互易定律.

7.8 自　感

当电流 I_1 变化时，通过电路 C_1 本身的磁通量也有变化，因此产生感生电动势，称之为$\mathscr{E}_{11}$. 不管磁通量的来源怎样的，感应定律都成立：

$$\mathscr{E}_{11}=-\frac{1}{c}\frac{d\Phi_{11}}{dt}, \tag{53}$$

Φ_{11} 是电路 1 中的电流 I_1 产生的磁场 B_1 通过电路 1 的通量. 负号表示电动势所取的方向总是阻止电流变化，这仍然是楞次定律. 因为 Φ_{11} 正比于 I_1，故可写出

$$\mathscr{E}_{11}=-L_1\frac{dI_1}{dt}, \tag{54}$$

常数L_1称为电路的自感

举一个可以算出 L_1 的电路作为例子.我们考虑习题 6.19 中的矩形环状线圈，如习题 7.22 的图所示. 可以求出（假若读者解过这个习题）流过这N匝线圈的电流 I(以静电电量单位/秒为单位）在离线圈轴 r 远处产生场强为 $B=2NI/cr$

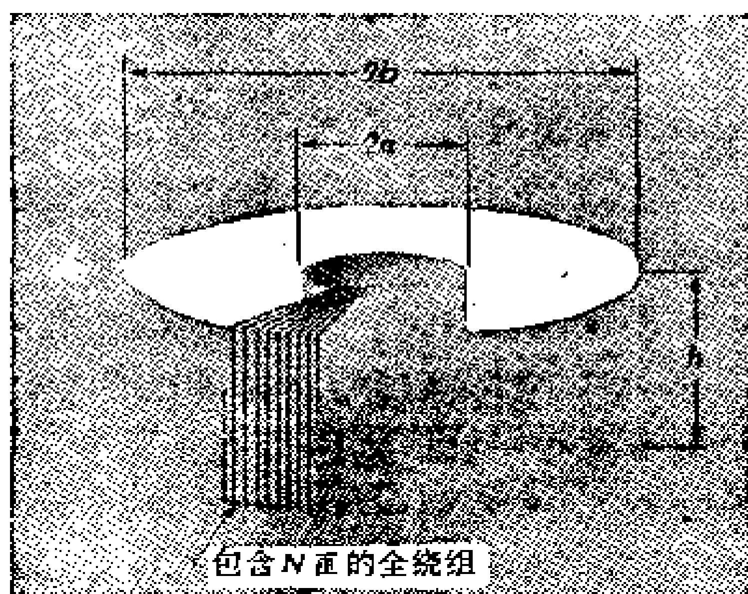


图 7.22　一个矩形截面的环状线圈。图中只画了几圈。

的磁场．通过线圈中每一圈的总通量是这磁场对线圈截面的积分

$$\Phi\,(\text{一匝}) = h\int_a^b \frac{2NI}{cr}\,dr = \frac{2NIh}{c}\ln\left(\frac{b}{a}\right), \tag{55}$$

穿过N匝线圈的总通量是此值的N倍

$$\Phi = \frac{2N^2Ih}{c}\ln\left(\frac{b}{a}\right), \tag{56}$$

故感应电动势$\mathscr{E}$为

$$\mathscr{E} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{2N^2h}{c^2}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\frac{dI}{dt}. \tag{57}$$

所以，此线圈的自感为

$$L = \frac{2N^2h}{c^2}\ln\left(\frac{b}{a}\right). \tag{58}$$

如果I以静电电量单位/秒为单位，$\mathscr{E}$以静伏为单位，式(58)就是自感的正确表达式．若I以安培，$\mathscr{E}$以伏特为单位，则L的适当单位是亨利，这和互感的情形一样．转换成这些单位时可得：

$$L\,(\text{亨利}) = 2\times 10^{-9}N^2h\ln\left(\frac{b}{a}\right). \tag{59}$$

读者可能以为前面考虑过的圆环该是说明计算自感的更简单的例子．但是，如果我们要去计算这个简单圆环的自感，将会遇到令人迷惑的困难．把导线的直径假定为零似乎是简化问题的一个好主意，但是我们马上会发现，当有限的电流在直径为零的细丝中流动时，通过细丝迴路的磁通量是无限大！原因是在这极细电流的邻域，磁场B按$1/r$变化，r是距细丝的距离．当$B\times$面积的积分进行到$r=0$的区域时，积分就会象$\int(dr/r)$那样发散．为了避开这一困难，我们可以令导线的半径是有限的，不为零，无论如何，这会更实际些．在

给定的情形下，这可能使计算复杂一点，但这不会难住我们．真正的困难是导线的不同部分将表现为不同的迴路，和大小不同的磁通相联系．我们再也不能肯定通过这一迴路的通量指的是什么了．事实上，由于电路能够分成许多极细的迴路，不同的迴路有不同的电动势，当迅速改变圆环中的电流时，必然会发生电流密度的某种重新分配．所以电路的自感多少会依赖于 I 的变化速度，而不象式(54)所说的那样严格地是个常量．

在环状线圈的例子中，我们不考虑直接靠近单个绕组处的磁场，这样就可以避开上述困难．磁通量的绝大多数并不通过导线本身，只要情况确是这样，刚才使我们为难的效应就并不重要了．

7.9 包含自感的电路

将电动势为 $\mathscr{E}_0$ 的电池与自感为 L 的线圈或电感器连接起来，如图 7.23(a) 所示．线圈本身，连接的导线，甚至电池都会有若干电阻．不管在整个电路中电阻是怎么分布的，我们可以把它全部集中成一个电阻 R，在电路图 7.23(b) 中用具有该阻值的电阻器的符号来表示．此外，电路的其余部分，尤其是连线对总电路的自感也有一点贡献，假定这也包含在 L 中．

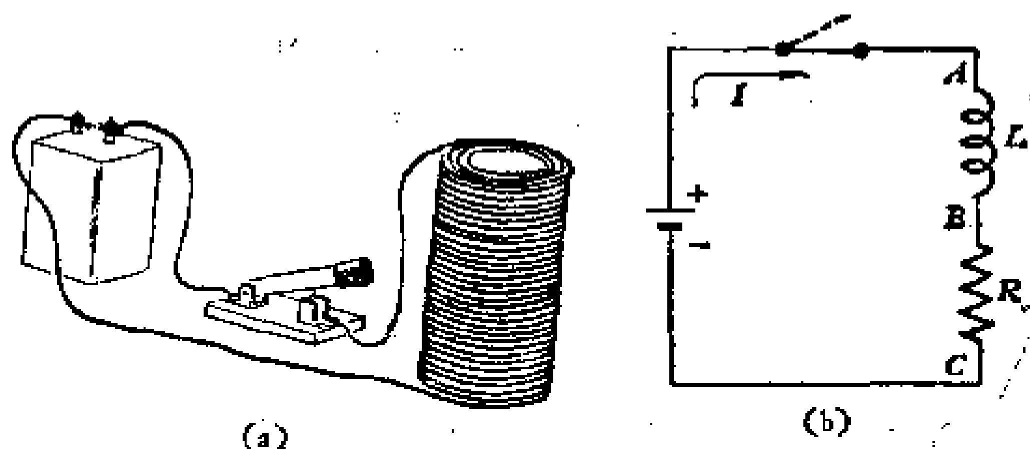


图 7.23 由电感和电阻组成的简单电路(a)，(b)．

换句话说，图 7.23(b) 代表着一个理想化的物理电路：电感器 L 没有电阻，用符号 ꟾ 表示；电阻器 R 没有电感。我们现在要分析的就是这种理想电路。

若电路中的电流 I 以速率 dI/dt 变化，就将感生电动势 LdI/dt，其取向是要抵制这种变化。还有电池的恒定电动势 $\mathscr{E}_0$。如果我们把电池驱动电流绕电路流动的方向规定为电流的正方向，则任一时刻的净电动势为 $\mathscr{E}_0 - LdI/dt$，它驱动电流 I 通过电阻 R，即

$$\mathscr{E}_0 - L\frac{dI}{dt} = RI. \tag{60}$$

这种情形也可以这样描述：我们称点 A 和点 B 的电势差为电感器的端电压，它等于 LdI/dt。如果图中所示方向的 I 在增大，那么电感器的上端为正。B 和 C 间的电势差，即电阻器的端电压为 RI。电阻器的上端为正。故电感器的端压与电阻器的端压之和为 $LdI/dt + RI$。这和电池两端的电势差 $\mathscr{E}_0$ 相同（理想化的电池无内阻）。故有

$$\mathscr{E}_0 = L\frac{dI}{dt} + RI, \tag{61}$$

这不过是式 (60) 的另一种说法。

在研究式 (60) 的数学解之前，让我们预先估计一下若在 $t = 0$ 时合上开关，这电路中会发生什么情况。在合上开关之前，必然是 $I = 0$。开关合上很久之后，会达到某种稳定状态，电流实际上为某一常量 I_0。以后，$dI/dt \approx 0$，式 (60) 化为

$$\mathscr{E}_0 = RI_0. \tag{62}$$

电流由零变到稳定电流 I_0，这种转变不可能在 $t = 0$ 时突然发生，因为如果那样的话，dI/dt 将是无限大。事实上，刚离开 $t = 0$ 时，电流 I 是非常之小的，以致式 (60) 中的第二项

RI 可以略去不计，则可得

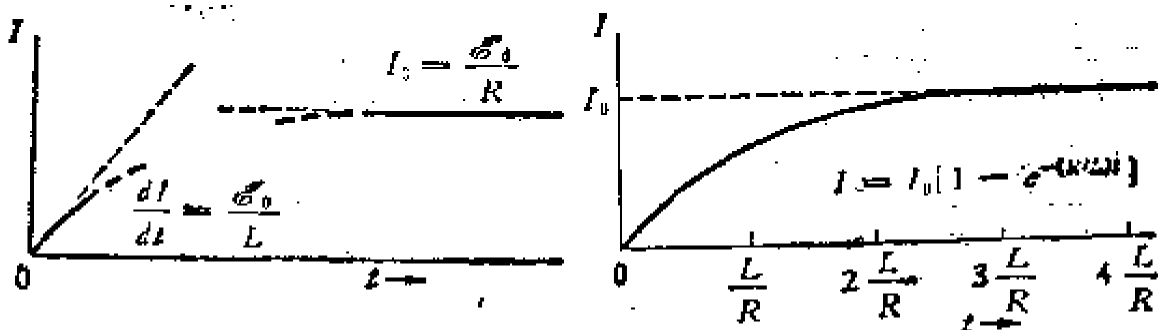
$$\frac{dI}{dt}=\frac{\mathscr{E}_0}{L}, \tag{63}$$

电感 L 限制了电流上升的速率.

我们把现在所知道的概括在图 7.24 (a) 中. 剩下的问题就是要找出全过程的变化情况. 式 (60) 是一个微分方程，和我们在第 4.11 节和卷 I 中已经遇到过的那些情况一样. 不用费事就可以写出满足初始条件，$t=0$ 时，$I=0$ 的式(60)的解，

$$I=\frac{\mathscr{E}_0}{R}(1-e^{-(R/L)t}). \tag{64}$$

图 7.24 (b) 中的曲线表明电流按指数律趋向于渐近值 I_0. 此电路的"时间常数"为 L/R. 若 L 以亨利，R 以欧姆度量，则由于亨利～伏特/(安培/秒)，欧姆～伏特/安培，因而得出时间常数以秒为单位.



(a) 开始时和经过很长时间后电流必定是这样的.

(b) 图 7.23 的电路中电流随时间的全部变化过程.

图 7.24

电流 I_0 建立以后，如果断开开关会发生什么情况? 会强迫电流突然下降到零吗? 倘使果真如此，就会使 LdI/dt 项变成负无穷大! 这种灾难可不仅仅是数学上的. 人们拉开大电感电路的开关时，甚至会被电击毙. 通常会发生这样的情况，极高的感生电压在断开开关的触点之间引起电火花或电

弧，使电流继续流通．假设我们不从电路中移走电池，而是接上横跨在 LR 组件两端的电路，如图 7.25(a)，同时断开电池．此电路由方程

$$0 = L\frac{dI}{dt} + RI \tag{65}$$

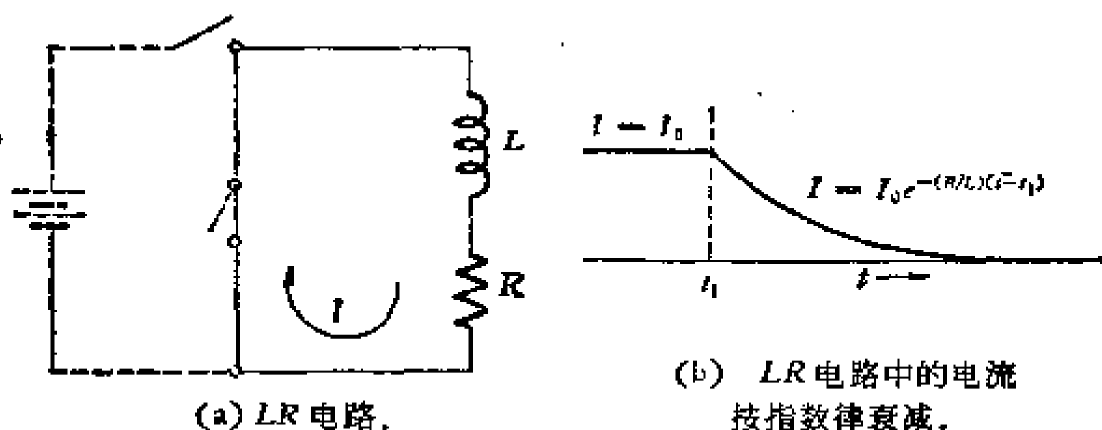
来描述，其初始条件为在 $t = t_1$ 时，$I = I_0$，t_1 为短路电路接通的时刻．方程解为一简单的指数衰减函数

$$I = I_0 e^{-(R/L)(t-t_1)}, \tag{66}$$

时间常数 L/R 和前面的相同．

7.10 磁场中储存的能量

式(66)和图 7.25(b) 描述了电流的衰减过程，在这过程中，电阻 R 消耗了能量．因为在任一短暂的时间间隔 dt 内消



(a) LR 电路．

(b) LR 电路中的电流按指数律衰减．

图 7.25

耗的能量 dU 为 RI^2dt，所以在时刻 t_1 合上开关后，总能量消耗一定是

$$U = \int_{t_1}^{\infty} RI^2 dt = \int_{t_1}^{\infty} RI_0^2 e^{-(2R/L)(t-t_1)} dt. \tag{67}$$

我们作一代换，令 $x = 2R(t - t_1)/L$，不难算出：

$$U = RI_0^2\left(\frac{L}{2R}\right)\int_0^{\infty} e^{-x}dx = \frac{1}{2}LI_0^2. \tag{68}$$

这个能量的来源是电感器及其磁场．实际上，最初建立

电流时，电池所作的功正好要比 $t=0$ 到 $t=t_1$ 时刻电阻器所消耗的能量大上述数量，电阻消耗的能量当然也是由电池供给的．为了说明这是一个普遍的关系，应注意到如果电感器上的电流在逐渐增大，由于要驱动电流 I 去阻止感生电动势 LdI/dt，这样必然就要做功．在 dt 时间内所做的功为

$$dW = LI\frac{dI}{dt}dt = LIdI = \frac{1}{2}Ld(I^2). \tag{69}$$

因此，我们可以指定载电流 I 的电感器的总能量为

$$U = \frac{1}{2}LI^2. \tag{70}$$

当这个电流最后衰减完毕时，这些能量将在别的地方出现．

很自然，我们把它看成是储存在电感器的磁场中的能量，正如我们曾经把带电电容器的能量描述为储存于电容器的电场中一样．电势差为 V 的荷电电容器的能量为 $1/2CV^2$，它可以由电场强度为 E 处的体积元 dv，它拥有的能量为 $(1/8\pi)E^2dv$ 计算出来．我们发现储存在电感器中的能量有与此十分类似的关系．令人欣慰，但并不使人惊异．就是说，我们可以赋予磁场以能量密度 $(1/8\pi)B^2$，将整个磁场的能量加起来，就能得到总能量 $\frac{1}{2}LI^2$．

为了说明在某一情形下这是怎么算出的，我们可以回到环状线圈的情形，其自感 L 已在 7.8 节中计算过．已经得出［式(58)］

$$L = \frac{2N^2h}{c^2}\ln\left(\frac{b}{a}\right). \tag{71}$$

电流 I 的磁场强度 B 由

$$B = \frac{2NI}{cr} \tag{72}$$

给出．为了计算 $B^2/8\pi$ 的体积分，可以用图 7.26 中画出的由

圆柱形壳层构成的体元，其体积为 $2\pi rhdr$. 在此壳层由 $r=a$ 扩展至 $r=b$ 的过程中，它将掠过包含磁场的全部空间（记住，环路以外各处的场 B 为零）.

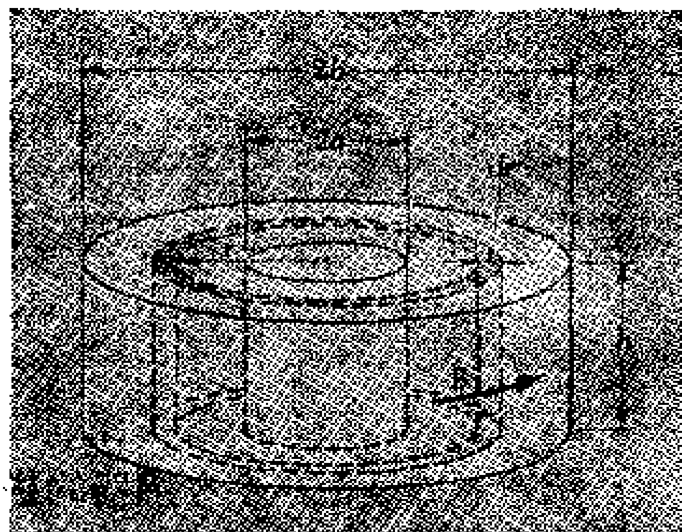


图 7.26 计算贮存于图 7.22 环状线圈磁场中的能量.

$$\frac{1}{8\pi}\int B^2dv=\frac{1}{8\pi}\int_a^b\left(\frac{2NI}{cr}\right)^2 2\pi rhdr=\frac{N^2hI^2}{c^2}\ln\left(\frac{b}{a}\right). \quad (73)$$

将此结果与式(71)相比较，我们确实看到

$$\frac{1}{8\pi}\int B^2dv=\frac{1}{2}LI^2. \quad (74)$$

更一般的说法是——和在式(1.36)中我们对电场的论述相对应——与任意磁场 $B(x, y, z)$ 相联系的能量 U 由

$$\boxed{U=\frac{1}{8\pi}\int_{\text{全部空间}}B^2dv} \quad (75)$$

给出.

若 B 用高斯，v 用立方厘米为单位，则式(75)中 U 的单位为尔格. 在式(70)中我们可以用实用单位制，L、I 用亨利和安培为单位，则 U 以焦耳为单位.

7.11 遗漏了什么

让我们来复习一下电荷与场之间的关系. 在第二章中我们已经知道, 和库仑定律相当的一个表述形式是联系电荷密度 ρ 及电场 $\mathbf{E}$ 的微分关系式

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \tag{76}$$

这对运动电荷和静止电荷都成立. 也就是说, ρ 不仅可以是位置的函数, 而且也可以是时间的函数. 正如我们在第五章中强调的那样,式 (76) 对运动电荷也成立这个事实是和电荷不变性相一致的: 不管孤立的带电粒子怎样运动, 用 $\mathbf{E}$ 在包围电荷的表面上的面积分来度量的粒子的电荷, 在每一个参考系中都呈现相同关系.

运动着的电荷就是电流. 因为电荷既不能创造也不能消灭,因此电荷密度 ρ 与电流密度 $\mathbf{J}$ 永远满足以下条件:

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \tag{77}$$

我们曾在式 (4.9) 中首次写下这个"连续性方程".

如果电流密度 $\mathbf{J}$ 不随时间变化, 我们称之为稳定的电流分布. 稳定电流分布的磁场满足方程

$$\operatorname{curl} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \tag{78}$$

第六章中我们用过这个关系.

我们现在关心的是随时间变化的电荷分布和相应的场. 假设我们有一电荷分布 $\rho(x, y, z, t)$, $\partial\rho/\partial t \neq 0$. 例如有一个通过电阻放电的电容器. 根据式 (77), $\partial\rho/\partial t \neq 0$ 意味着

$$\operatorname{div} \mathbf{J} \neq 0, \tag{79}$$

但根据任何矢函数的旋度的散度恒为零 (参看习题 2.15), 由式 (78) 得

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{div} (\operatorname{curl} \mathbf{B}) = 0. \tag{80}$$

式 (80) 与式 (79) 的矛盾表明，对于电荷密度随时间改变的系统，式 (78) 不可能正确. 当然，没人说过它是正确的；而遵从式 (78) 的稳定电流分布中，不用说电荷密度 ρ，就是电流密度 $\mathbf{J}$ 也是与时间无关的.

这个问题可以用另一种方式提出来. 考虑图 7.27 中磁场

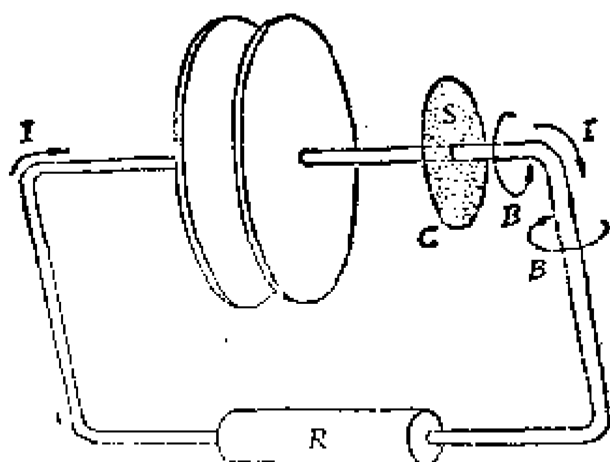


图 7.27 右边的平板带有正电荷，电容器通过电阻器放电. 环绕导线存在磁场 $\mathbf{B}$. curl $\mathbf{B}$ 对通过导线的 S 面的积分值为 $4\pi I/c$.

绕传送电容器极板上电荷的导线一周的线积分. 根据斯托克斯定理

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \operatorname{curl} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}. \tag{81}$$

有电流 I 流过的导线垂直地通过 S 面. 在导线内，curl $\mathbf{B}$ 之值是有限的，为 $4\pi\mathbf{J}/c$，故等号右边的积分等于 $4\pi I/c$. 就是说，若曲线 C 离导线很近而离电容器的间隙又较远，则远处的磁场和环绕通有同样电流的任何导线周围的磁场没有什么不同. 再看图 7.28 中的面 S'，它也是跨在 C 上的一个面，斯托克斯定理式 (81) 也应该同样适用. 然而，完全没有电流流过这个曲面！虽则如此，但是不可能在整个 S' 上 curl $\mathbf{B}$ 都是

零而又不违反斯托克斯定理. 因此,在 S' 上 curl **B** 必定取决于不是电流密度 **J** 的其它某种东西.

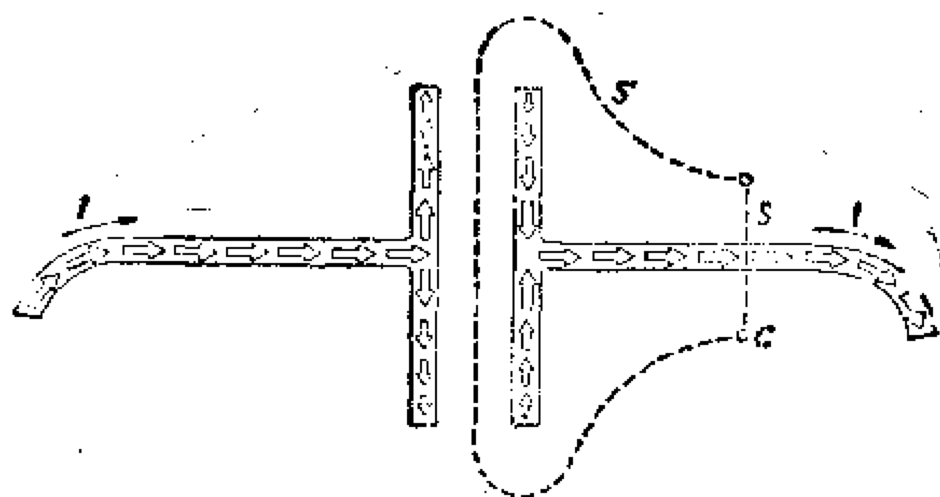


图 7.28 白色箭头表示导体中电流的流动. 面 S' 和 S 一样,也是以曲线 C 为边的,但没有电流通过它.

我们只能得出这样的结论, 对于变化着的电荷分布的更一般的情况,式 (78) 必须用某种其它的关系来代替. 让我们用

$$\text{curl}\ \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + (?) \tag{82}$$

来代替式 (78), 再来看看我们能否发现(?)应该是什么.

另外一条思路可以提示出答案. 我们记得, 在电磁场的坐标变换定律[式(6.58)中], **E** 和 **B** 是非常对称的. 在法拉第感应现象中表明, 变化的磁场伴随着一个电场, 其关系用式 (30),

$$\text{curl}\ \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{30}$$

来描述. 这是一个在不直接包含电荷的空的空间中, 使电场与磁场联系起来的区域关系式. 如果 **E** 和 **B** 之间存在对称性的话,我们一定可以预期, 变化的电场也会产生磁场, 也应该有一个像式 (30) 那样的方程来描述的这种感应现象, 不过,

$\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 所起的作用要掉换一下．最后弄清，还要改变一下符号，这就是全部内容

$$\text{curl}\ \mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{83}$$

这就提供了式(82)中所要求的那个空缺项．为了彻底检验一下，写出

$$\text{curl}\ \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{84}$$

然后对两边取散度

$$\text{div}\ (\text{curl}\ \mathbf{B}) = \text{div}\left(\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}\right) + \text{div}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right). \tag{85}$$

如以前已经讲过的，左边必定为零．在右边第二项中，我们可以交换时间与空间微分的次序．于是，用式 (76) 就得到

$$\text{div}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\ (\text{div}\ \mathbf{E}) = \frac{4\pi}{c}\frac{\partial \rho}{\partial t}. \tag{86}$$

这样式 (85) 的右边变成

$$\frac{4\pi}{c}\text{div}\ \mathbf{J} + \frac{4\pi}{c}\frac{\partial \rho}{\partial t}. \tag{87}$$

由于连续性条件式 (77)，上式为零．

上面引入的新项解决了图 7.28 中所产生的困难．因为电荷从电容器流出，电场的强度减小，该电场在任何时刻都具有图 7.29 的形态．此时 $\partial \mathbf{E}/\partial t$ 与 $\mathbf{E}$ 的指向相反．在图 7.30 中矢函数 $\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ 用黑色箭头表示．由于 $\text{curl}\,\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$，curl $\mathbf{B}$ 在 S' 上的积分和在 S 上的积分之值相同．在 S' 上积分有贡献的只是第二项；在 S 上积分实际要计算的只是含有 $\mathbf{J}$ 的第一项．

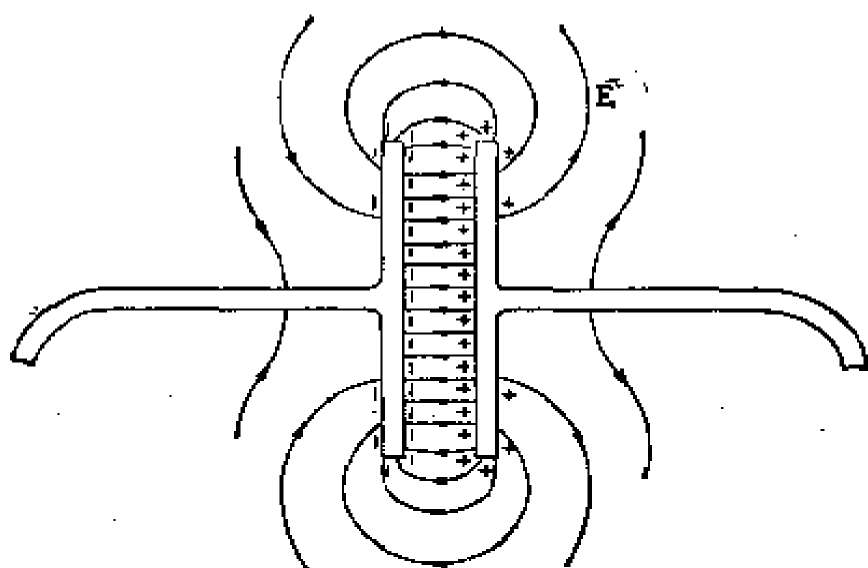


图 7.29　某特定时刻的电场，各处的 **E** 值都随时间减小。

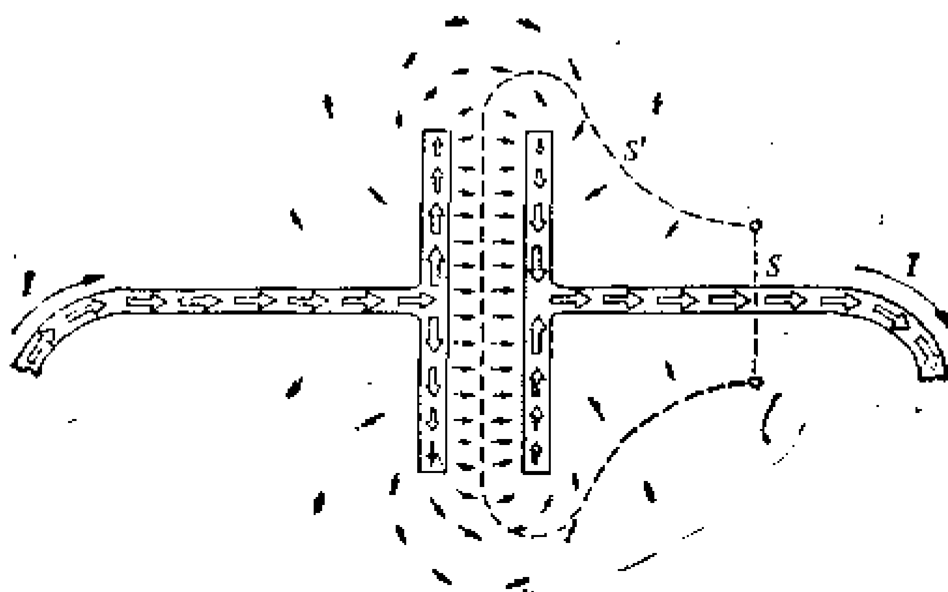


图 7.30　传导电流(白色箭头)与位移电流(黑色箭头)。

7.12 位 移 电 流

注意矢量场 $\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$，它表现为传导电流分布的延续．麦克斯韦称之为位移电流，这个名称一直沿用下来，虽然现在看来已经不很恰当了．为了更明确些，我们可以把方程 (84) 写

成如下形式，从而能定义出"位移电流密度" $\mathbf{J}_d$，以区别于传导电流密度 $\mathbf{J}$

$$\operatorname{curl}\mathbf{B}=\frac{4\pi}{c}(\mathbf{J}+\mathbf{J}_d) \tag{88}$$

并定义 $\mathbf{J}_d\equiv\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$.

在传导电流随时间变化的情形下，我们需要这个新项，以使电流与磁场间的关系和连续性方程相一致．如果把它纳入上式的话，这就意味着存在一种新的感应效应：一个变化的电场伴随着一个磁场．如果这种效应果真存在，为什么法拉第没有发现它呢？一个原因是法拉第没有去探索它，但还有个更根本的原因说明为什么象法拉第做的那些实验都不能显示出属于式(84)最后一项所引起的新效应．在任何仪器中存在变化电场时，都同时存在着传导电流，即运动着的电荷．仪器周围各处的磁场 $\mathbf{B}$ 就会被认为是这些传导电流产生的．事实上，如果略去电路可能不连续这个事实的话，用毕奥-萨伐尔公式［式(6.38)］去求每一个传导电流元对空间某点磁场的贡献，就几乎正好是你所要计算的场．

例如，考虑放电电容器极板之间的 P 点(图 7.31)．导线上和电容器极板上的每个传导电流元都按照毕奥-萨伐尔公式对 P 点的场作出贡献．我们也须计及"位移电流" $\mathbf{J}_d$ 的各电流元吗？答案颇为令人吃惊．可以包括 $\mathbf{J}_d$ 在内；但是如果我们仔细地计算全部位移电流分布，对于变化比较缓慢的场说来，其净效应为零．

为了明白为什么是这样的，注意图 7.30 中用黑色箭头标示的矢函数 $\mathbf{J}_d$ 和图 7.29 中的电场 $\mathbf{E}$ 的形式相同．这个电场，除了它在慢慢地消逝之外，实际上是个静电场．因此可以料到，其旋度实际为零，这就意味着 $\operatorname{curl}\mathbf{J}_d$ 实际上必为零．更精

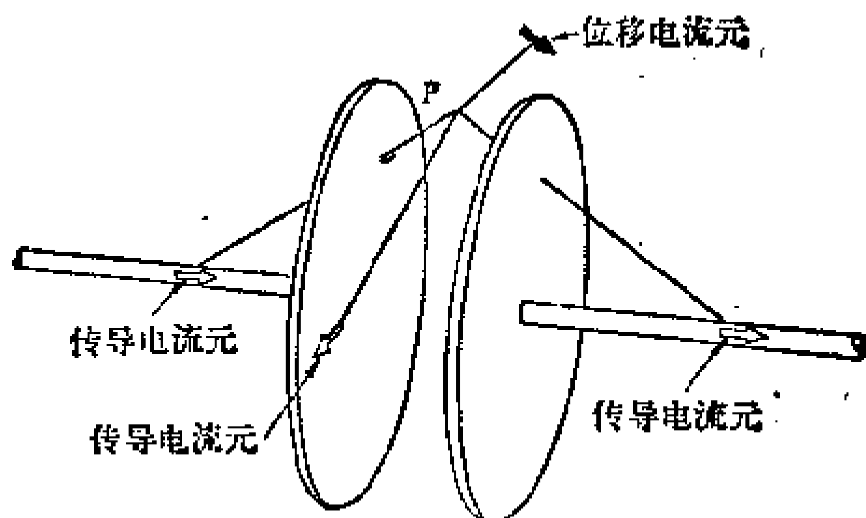


图 7.31　在缓慢变化场的情况中，全部位移电流对任意点的磁场的总贡献为零．P 点的磁场只须将毕奥-萨伐尔公式应用于传导电流元就可算出．

确地讲，我们有 curl $\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$，以及位移电流

$$\mathbf{J}_d = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

交换微分次序，可得

$$\text{curl}\,\mathbf{J}_d = \frac{1}{4\pi}\text{curl}\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}(\text{curl}\,\mathbf{E})$$

$$= -\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}. \tag{89}$$

对变化得足够缓慢的场，这是可以略去不计的．我们可以称缓慢变化的场为*准静态*的．如果 $\mathbf{J}_d$ 为无旋度的矢量场，它可由一些流出点源或流向点状“尾闾”的径向电流叠加而成(图 7.32)，这和静电场可以由一些点电荷的电场构成是一样的．但是任何径向对称电流分布的磁场，按毕奥-萨伐尔公式计算，由于对称性必为零；因为除了径向自身之外，无论哪里都没有其它独特的方向．

在准静态场中，对于磁场，只有传导电流是唯一需要考虑

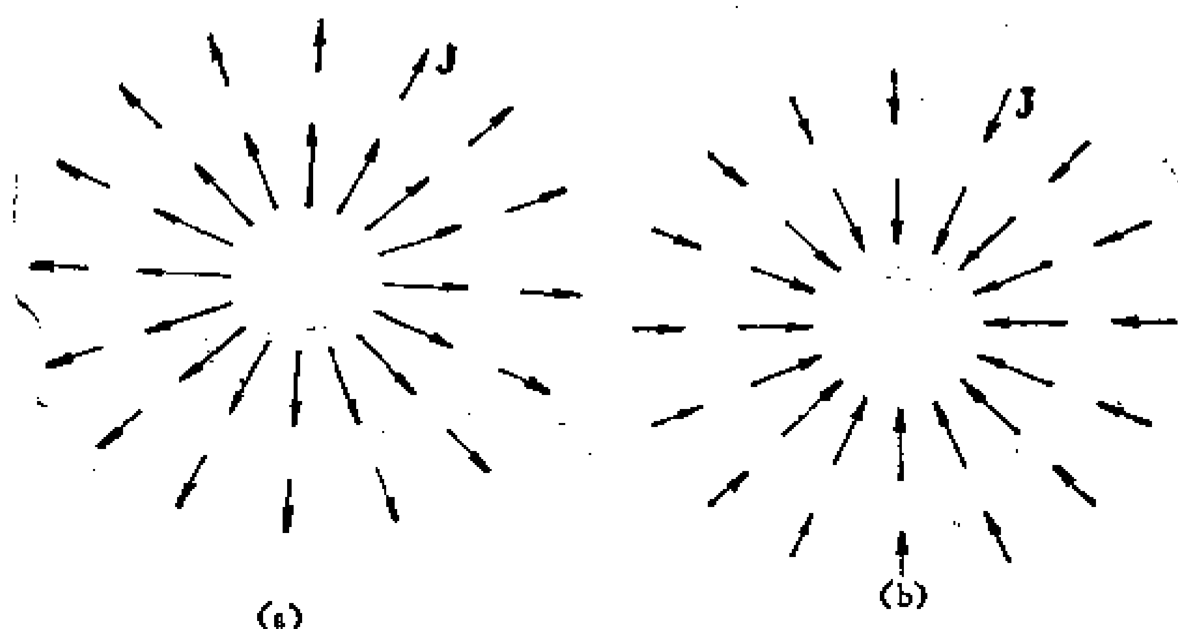


图 7.32 表明什么是径向电流分布．对于(a)中的点源或对于(b)中的点状尾闾，电流密度 **J** 和点电荷的电场相似．curl**J** = 0 的任何电流分布都可以由这样的"源"和"尾闾"叠加而成．因而其磁场必然为零．

的源．换句话说，如果法拉第制做了图 7.31 那样的装置，并且譬如说用指南针测量过 P 点的磁场，他也不会感到惊异．他无需创制一种位移电流来解释它．

为了看出这种新的感应现象，我们需要迅速变化的场．事实上，我们需要这种变化在光通过仪器那样短暂的瞬间发生．这就是为什么这类现象的直接演示须到赫兹时才能做到．赫兹的实验是在这个规律本身已被麦克斯韦建立多年之后才作出来的．

7.13 麦克斯韦方程

麦克斯韦在致力于解释法拉第对电学的研究结果以后，着手从数学上来阐述电和磁的理论．麦克斯韦未能发现相对论——那是 50 年以后的事了．当时，物质的电结构还是个谜，光与电磁现象之间的关系还未被查觉．为了使下一步看起来非常明显，我们曾经采用过许多论据，但在当时这些论据

都是不可想像的. 然而,当麦克斯韦的理论提出时,我们一直在讨论的 $\partial\mathbf{E}/\partial t$ 项却十分自然地出现在他的公式中. 麦克斯韦称之为"位移电流".他研究真空中的电场,也研究固态物质中的电场. 而且当讲到"位移电流"时,他常常也把一些运动电荷包含在内.在第九章研究物质的电场时,我们将把这一点弄清楚. 事实上,麦克斯韦把空间本身看作是一种介质——"以太";所以即使没有固态物质存在,位移电流也在某种东西中发生. 但是,这都没有关系,他的数学方程是完全清楚和毫不含糊的,他所引入的位移电流曾是第一流的理论上的发现.

麦克斯韦对电磁场的描述本质上是完整无缺的. 我们已经由不同的途径获得了它的各个部分,现在我们按习惯上称之为*麦克斯韦方程组*的形式,把它们集中起来:

$$\begin{aligned}
\operatorname{curl}\mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\\
\operatorname{curl}\mathbf{B} &= \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}\\
\operatorname{div}\mathbf{E} &= 4\pi\rho\\
\operatorname{div}\mathbf{B} &= 0
\end{aligned}\tag{90}$$

这是在有电荷密度 ρ 和电流(即运动电荷)密度 $\mathbf{J}$ 存在的情形下,对真空中的场写出的.

第一个方程是*法拉第感应定律*. 第二个方程表示磁场对*位移电流*密度(或电场的时间变化率)和*传导电流*密度(或电荷的运动速率)的依赖关系.第三个方程相当于库仑定律. 第四个方程表明,除电流外,没有其它磁场源. 对于自然界中这方面的情况,我们在第十章中还将进一步讨论.

注意,在这些方程中 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{E}$ 缺乏对称性,完全是由于电荷

和传导电流的存在所引起的．在真空中，包含 ρ 和 $\mathbf{J}$ 的两项为零，麦克斯韦方程组变为

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\operatorname{curl}\mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad & \operatorname{div}\mathbf{E} &= 0, \\
\operatorname{curl}\mathbf{B} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \qquad & \operatorname{div}\mathbf{B} &= 0.
\end{aligned}
}
\tag{91}
$$

这里，位移电流项十分重要．它和第一个方程中同它对应的那一项一起，包含着**电磁波**存在的可能性．由于认识到这一点，麦克斯韦继续提出了光的电磁理论，获得了光辉的成果．在本教程的第三卷中我们将研究波动物理学，尤其是光波的物理学．现在我们可以证明，电磁扰动以光速 c 传播是和麦克斯韦方程相一致的．为此我们将描述一组最简单的电场和磁场，它表示传播着的扰动，然后，我们再证明这组电场和磁场满足式(91)的方框中的全部方程．

在 $t=0$ 的时刻，设在 $y=0$ 与 $y=2a$ 之间的区域内存在着一个电场．该电场 $\mathbf{E}$ 只有 z 分量，且其 z 分量只随 y 变化，其变化方式如下：

$$
\left.\begin{cases}
E_z = E_0\,\dfrac{y}{a}, & (0 \leqslant y \leqslant a), \\[2ex]
E_z = E_0\left(\dfrac{2a-y}{a}\right), & (a \leqslant y \leqslant 2a).
\end{cases}\right\}(\text{在 } t=0 \text{ 时}) \tag{92}
$$

这就是如图 7.33(a) 画出的一个“山”形的场强分布；其极大值在中心 $y=a$ 处，并线性地下降，至 $y=0$ 和 $y=2a$ 处各为零．对于一定的 y，不管 x 和 z 如何，其场值均相同．就是说，在一无限大的平板内各处都存在着电场，虽然在图中我们只在 y 轴上画出了场矢量．标着 I、II 的带阴影的部分在平板之内．板外各处，即 $y<0$ 与 $y>2a$ 处，在此时刻电场为零．

与此同时，在此平板空间还有一个磁场。它只有 x 分量，由下式给出

$$\left.\begin{cases} B_x = B_0 \dfrac{y}{a}, & (0 \leqslant y \leqslant a), \\ B_x = B_0 \left(\dfrac{2a - y}{a}\right), & (a \leqslant y \leqslant 2a). \end{cases}\right\} (t = 0 \text{ 时}) \quad (93)$$

我们简单地规定出这个场。设令此场的形态以速度 c 沿 y 方向传播，并保持其形状不变。写出下列规定即可做到此点。

区域 I：

$$\left.\begin{aligned} E_z &= E_0 \left(\frac{y - ct}{a}\right), \\ B_x &= B_0 \left(\frac{y - ct}{a}\right). \end{aligned}\right\} (ct \leqslant y \leqslant ct + a) \quad (94)$$

区域 II：

$$\left.\begin{aligned} E_z &= E_0 \left(\frac{2a - y + ct}{a}\right), \\ B_x &= B_0 \left(\frac{2a - y + ct}{a}\right). \end{aligned}\right\} (ct + a \leqslant y \leqslant ct + 2a) \quad (95)$$

这些描述就是我们在图 7.33(b) 中所见到的情形，或在其它任意时刻 t 所见到的情形。包含场的区域只是向右位移了距离 ct。在区域 I 和 II 内，**E** 和 **B** 都具有与前相同的形状。方程 (94) 与 (95) 描述电磁场位形的传播，不过，这种场能够存在吗？为了回答这个问题，我们必须看看，式 (94) 与式 (95) 所给出的 **E** 和 **B** 是否满足麦克斯韦方程组。

由散度方程着手，很容易看出，div **E** $= 0$ 和 div **B** $= 0$（显然，$\partial E_z/\partial z = 0$，而 E 的其余分量本身就是零）。但 curl **E** 不为零。其值为

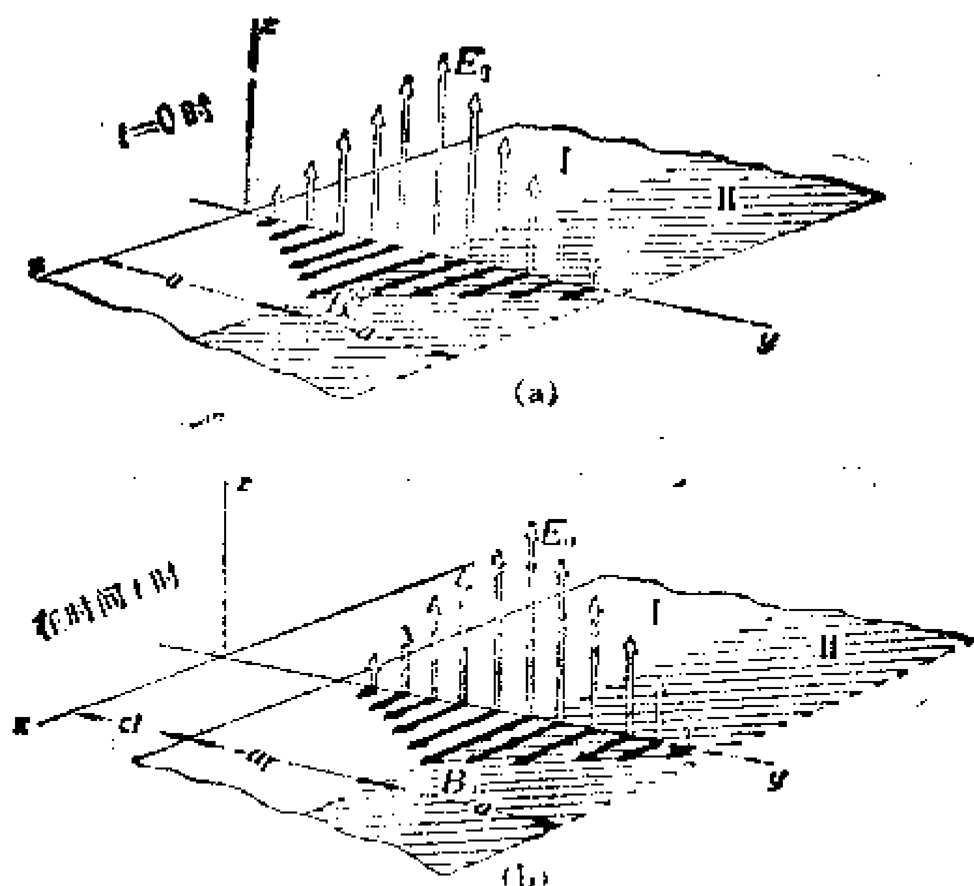


图 7.33 一种特殊形态的电场和磁场，假设以速度 c 沿 y 方向传播．(a) 表示 $t=0$ 时的场，(b) 表示过一段时间后的场．若 $B_0=E_0$，这样的电场与磁场满足麦克斯韦方程组．请注意 $\mathbf{E}$，$\mathbf{B}$ 的相对取向和传播方向 $\hat{\mathbf{y}}$．

$$\begin{aligned}
&\text{在区域 I:} \quad \nabla\times\mathbf{E}=\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial E_z}{\partial y}=\frac{E_0}{a}\hat{\mathbf{x}}.\\
&\text{在区域 II:} \quad \nabla\times\mathbf{E}=\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial E_z}{\partial y}=-\frac{E_0}{a}\hat{\mathbf{x}}.
\end{aligned} \tag{96}$$

用同样的方法计算 $\nabla\times\mathbf{B}$：

$$\begin{aligned}
&\text{在区域 I:} \quad \nabla\times\mathbf{B}=-\hat{\mathbf{z}}\frac{\partial B_x}{\partial y}=-\frac{B_0}{a}\hat{\mathbf{z}}.\\
&\text{在区域 II:} \quad \nabla\times\mathbf{B}=-\hat{\mathbf{z}}\frac{\partial B_x}{\partial y}=\frac{B_0}{a}\hat{\mathbf{z}}.
\end{aligned} \tag{97}$$

对于 t 取偏微商为

在区域 I：
$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{c}{a} E_0 \hat{\mathbf{z}}, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{c}{a} B_0 \hat{\mathbf{x}}.$$

在区域 II：
$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{c}{a} E_0 \hat{\mathbf{z}}, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{c}{a} B_0 \hat{\mathbf{x}}. \tag{98}$$

如果
$$\frac{E_0}{a} \hat{\mathbf{x}} = -\frac{1}{c}\left(-\frac{c}{a} B_0 \hat{\mathbf{x}}\right)$$

及
$$-\frac{B_0}{a} \hat{\mathbf{z}} = \frac{1}{c}\left(-\frac{c}{a} E_0 \hat{\mathbf{z}}\right), \tag{99}$$

则在区域 I 中场将满足“感应”方程. 确实，如果 $E_0 = B_0$，式(99)就满足了. 对于区域 II 中的场，为满足“感应”方程，其要求完全相同. 对这个想像的场，在山字形的峰顶和两端数学上都存在奇点. 为了保证此场各处都满足麦克斯韦方程组，我们必须弄清这些地方不会产生问题. 因为 **E** 和 **B** 在这些点是连续的，所以确实不会有问题产生的(在真空中，**E** 和 **B** 不可能出现突然的跳跃或不连续). 所以，如果我们所描述的这个特殊电磁场在同一时间同一地点，各处的电场强度(以静伏/厘米为单位)和磁场强度相等，那么它就确实代表着一个行波，并确实满足全部的场方程式. 重要的是 **E** 和 **B** 要相互垂直，并垂直于传播方向，否则场方程就不可能被满足.

这种传播着的“山”形可能使人觉得是个相当特殊的波. 但实际上，这个简单的例子却揭示了任何平面电磁波所有的基本特点！我们只须想到*叠加原理*就会明白这一点. 正如我们经常强调的，电磁场方程是线性的. 如果两组场都满足麦克斯韦方程，那么它们的和也满足麦克斯韦方程. 我们可以有任意多个“山”形场，在空间沿相同的或不同的方向传播(自然，这些场是不管坐标轴如何取向的，沿任何其他方向都和 y 轴一样). 图 7.34 给出了可以由“山形波”构成的一些波. 很明显，可以用叠加“山形波”的方法，趋近于任何函数到所希望

的程度。因此，我们学过的关于"山形波"的知识必定可以应用于任何这样的波，其中 **E** 和 **B** 只是传播方向上的坐标的函数。这些波的共同性质是：

(i) 扰动以速度 c 传播，其形状不变。

(ii) 象上述的例子那样，**E** 和 **B** 相互垂直并垂直于传播方向，矢量 $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ 总是指向传播方向。

(iii) 在任一指定时刻和指定地点，$E=B$。

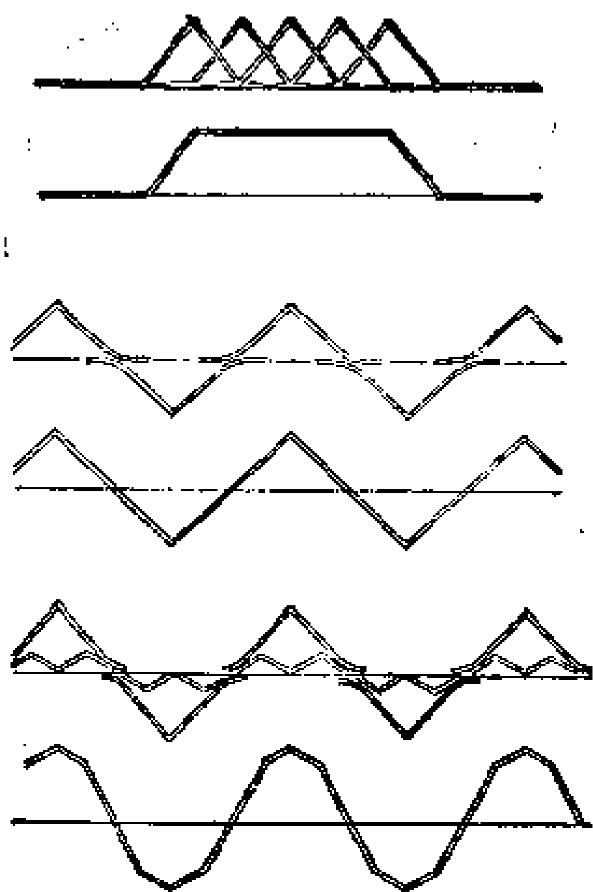


图7.34 由"山形波"叠加而构成的各种波形。

变换坐标系时，具有这些性质的电磁场可以以简单而令人满意的方式来变换。在第六章中，我们已经导出了关于电场和磁场的洛仑兹变换公式（式6.58）。让我们引用根据这些公式算出的习题6.11的结果，即当变换到另一惯性参考系时，E^2-B^2 和 $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$ 这两个标量保持不变。在上面所讨论的情形中，因为在任意点 $E=B$，不变量 E^2-B^2 的值为零。又因为 **E** 垂直于 **B**，另一个不变量 $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$ 也为零。由此得到，在任何其他坐标系中，变换后的场 $\mathbf{E}'$ 和 $\mathbf{B}'$ 的值一定相等，而且相互垂直。光波在任何参考系中看起来都是光波。

习　　题

7.1　平均半径为 12 厘米的 4000 匝线圈，在强度为 0.5 高斯的地球磁场中每秒钟旋转 30 周，线圈的最大感生电动势是多少？

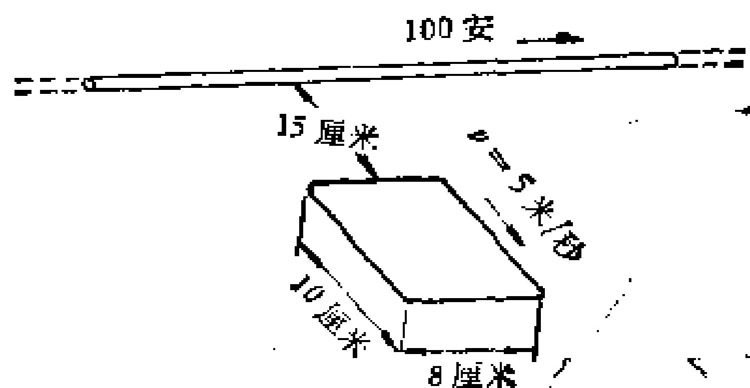
（答：1.70 伏特）

7.2　矩形迴路在均匀磁场中运动，迴路中的电动势要保持为零．试问该线圈应按何种方式运动．

7.3　面积为A，圈数为N的环状线圈处于磁铁的磁场中．用扭在一起的一对导线把它连接到外电路上．包括线圈在内，总电路的电阻为 R．设法使通过线圈的磁通量发生变化，由初始时的稳定值 Φ_i 变为最终的稳定值 Φ_f．试证明最终通过该电路的总电荷 Q 与磁通量变化率无关．这样的线圈称为翻转线圈（flip coil），常用它来测定磁铁的场强．假设将线圈平面安放得与磁场 $\mathbf{B}$ 垂直，当线圈翻转 90° 和翻转 180° 时，试问 $\mathbf{B}$，NA，R 和电荷 Q 间的关系如何？

〔磁通量变化与电荷传输的关系〕

7.4　计算运动迴路在图中位置时的电动势（见图）．假定迴路的电阻 R 很大以致迴路自身电流的效应可以忽略．试粗略地估计一下，从这方面看，迴路的电阻多大才保险？并指



习题　7.4

出图中所示时刻迴路电流流动的方向.

7.5 设图 7.6 中的迴路电阻为 R. 若迴路的自感可以忽略. 试证明不管是谁以恒定的速度推动迴路在时间间隔 dt 内做一定量的功，此功将与在该时间间隔内电阻所消耗的能量精确地相等. 再问图 7.11 中，迴路在其中是静止的，它的能量来源于何处?

[证明能量守恒]

7.6 在图 7.13 的旋转迴路中，电动势是简单的正弦变化.要作这种判断是否要求迴路是矩形的或者磁场是均匀的? 试解释之. 能否提出一种安排使迴路旋转而线圈固定，在线圈中产生的电动势确实是非正弦变化的? 请画出运用该装置后预计可以在示波器上看到什么样的电压-时间曲线.

7.7 试计算长 2 米直径 10 厘米的圆柱形螺线管的自感. 它是单层缠绕的，共 1200 圈. 作为一级近似，假设螺线管内的磁场直到两端都是均匀的. 粗略地估计一下这样假设会引起多大的误差. 实际的 L 值比这个近似值大还是小?

[长螺线管的自感]

7.8 如何绕电阻线圈以使其自感很小?

7.9 两个半径均为 a 的圆环，像车轮一样安放在同一个轴上，其中心相距 b 厘米，试推导其互感的近似公式. (采用 $b \gg a$ 时适用的近似.)

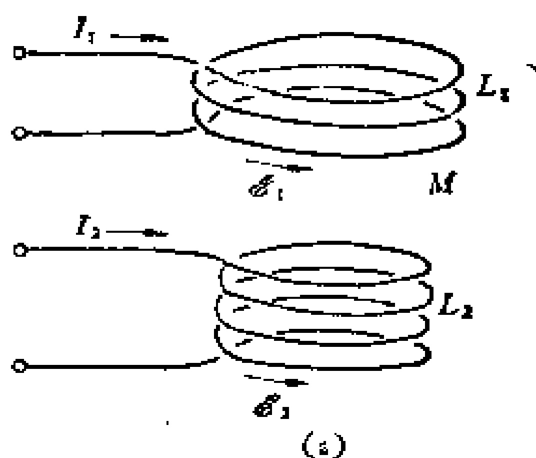
[同轴圆迴路的互感]

7.10 在法拉第电流计中第一次引起轻微的然而又是可以察觉的反冲的线圈，法拉第对这线圈是这样描述的: 线圈由两根各为 203 英尺长的铜线缠在一块大木头上制成的. 第二个螺线圈(是单层线圈)的各圈交叉插在第一个线圈的各圈之间，用麻线把它们隔开. 铜线本身的直径为 1/20 英寸. 法拉第没有给出木块的尺寸或线圈的圈数. 实验时，其中的一

个线圈和"100 片电池"相连．看看你能否粗略地估计出通过法拉第电流计的脉冲电流的持续时间（以秒为单位）和大小（以安培为单位）．

[重建历史上的互感实验]

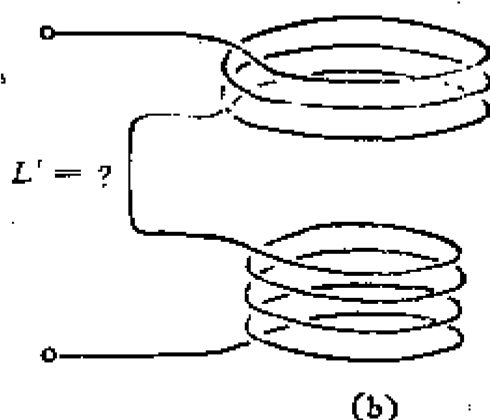
7.11 左图 (a) 表示自感为 L_1 和 L_2 的两个线圈．在如图所示的相对位置上，它们的互感为 M．每个线圈中电流的正向和电动势的正向由图中的箭头表示．联系电流与电动势的方程为



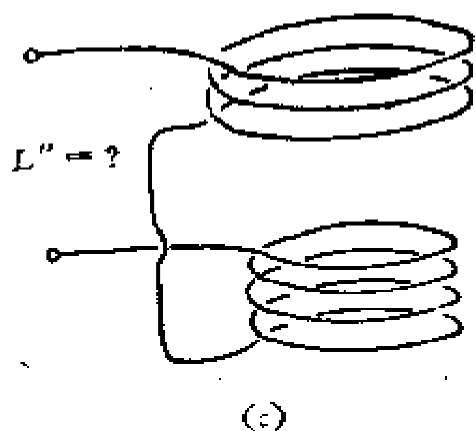
$$\mathscr{E}_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt} \underset{?}{\pm} M \frac{dI_2}{dt}$$

和

$$\mathscr{E}_2 = -L_2 \frac{dI_2}{dt} \underset{?}{\pm} M \frac{dI_1}{dt}.$$



已经给出，M 总取作正常数，试问上面两方程的符号须如何选取？如果下面线圈的电流正向和电动势正向的选择与前相反（可以这样取），又将会如何？再将这两个线圈如左图 (b) 那样连接起来形成一个单一电路，试求这个电路的电感 L'（用 L_1，L_2 和 M 来表示）？象图 (c) 那样连接这两个线圈，所形成电路的电感 L'' 又如何？那一种



习题 7.11

线路(是 b 还是 c)具有更大的自感？考虑到任一电路的自感必为一正量(它为何不能为负?)，联系到 L_1, L_2 和 M 的相对大小，试看你能否得出对任何可连接在一起的一对线圈都有效的普遍结论.

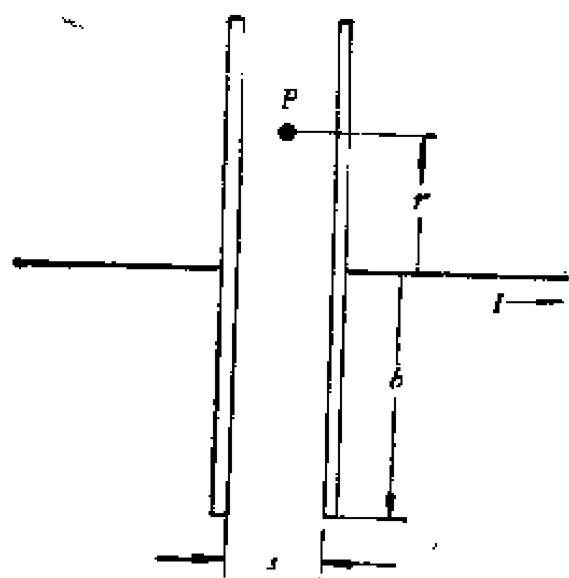
[串联线圈的合成电感及关于 L、M 的普遍规则]

7.12 在银河系的星际空间中，一般认为磁场为 10^{-6} 高斯数量级. 除了大约每立方厘米有一个热运动速度为 10^5 厘米/秒数量级的氢原子外，这个空间没有更多的东西了. 在该空间某一给定体积内，贮存于磁场的能量是多少? 并试与该体积内的物质的动能相比较.

[涉及磁场能量的天体物理学问题]

7.13 电阻为 0.01 欧姆，自感为 0.50 毫亨的线圈跨接在内阻可以忽略的大容量的 12 伏电池上. 合上开关后经过多长时间电流才能达到其终值的 90%？在这时，有多少焦耳的能量贮存到了磁场中? 合上开关到该时刻，从电池取出了多少能量?

[LR 电路的研究]



习题 7.14

7.14 图 7.27 所示的放电电容器内部的磁场，原则上可以将图 7.31 所示的所有传导电流元的贡献求和来算得. 这个工作可能是冗长的. 如果我们可以假定电容器是轴对称的，利用积分定律

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{c} \int_S \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi \mathbf{J} \right) \cdot d\mathbf{a}$$

很容易求出某一点的场 **B**，在积分时，所选用的圆形路线通过所求的点．这时我们只需知道该路径包围的总电流．试用这个办法求出 P 点的场，P 在电容器极板的正中间，和对称轴之间的距离为 r（试与图 7.16 的例子中对感应电场 **E** 的计算相比较）．

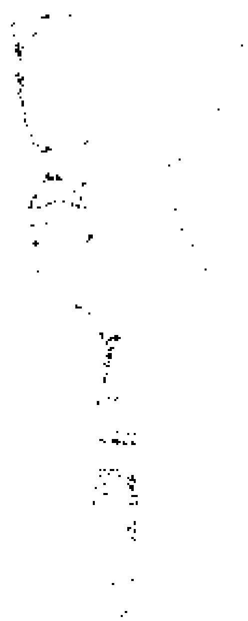
$$\left(答：\quad 2\pi r B=\frac{4\pi I}{c}\frac{r^2}{b^2},\quad B=\frac{2\pi r}{cb^2}\right)$$

[位移电流]

7.15 证明下述电磁场满足麦克斯韦方程组

$$\begin{cases}E_x=E_y=0; & E_z=\cos(y-ct),\\ B_x=\cos(y-ct); & B_y=B_z=0.\end{cases}$$

[麦克斯韦方程]



第八章 交流电路

8.1 共振电路

包含电感、电容和电阻的电路是第一卷讨论过的阻尼简谐振子的一个例子. 现在我们能够精确地来考查一下在这种系统中发生什么情况. 图 8.1 中的线路图表示一个这样的"RLC 串联"电路.

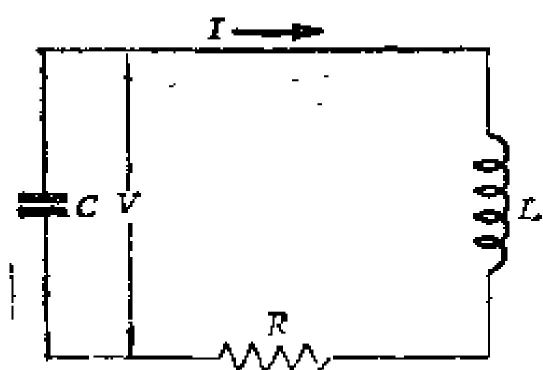


图 8.1 "RLC 串联"电路.

设该电路中电容器在 t 时刻的电荷为 Q. 电容器两端的电势差, 即电压为 V, 它显然等于电感 L 和电阻 R 串联电路的端电压. 当电容器上极板带正电时, 我们取 V 为正, 并将图8.1中的箭头方向规定为电流的正方向. 当我们这样选择符号时,联系电荷 Q,电流 I 和电容器上电压 V 的关系为

$$I = -\frac{dQ}{dt}, \quad Q = CV, \quad V = L\frac{dI}{dt} + RI. \tag{1}$$

我们希望把 Q、I、V 这三个变量消去两个. 由头两个方程, 我们得到 $I = -CdV/dt$, 于是第三个方程成为

$$V = -LC(d^2V/dt^2) - RC(dV/dt),$$

或

$$\frac{d^2V}{dt^2} + \left(\frac{R}{L}\right)\frac{dV}{dt} + \left(\frac{1}{LC}\right)V = 0. \tag{2}$$

这是一个常系数的二阶微分方程. 我们试取形式为

$$V = Ae^{-\alpha t}\cos\omega t \tag{3}$$

的解．其中 A、α 和 ω 为常量．此函数的一阶和二阶微商为

$$\frac{dV}{dt}=Ae^{-\alpha t}[-\alpha\cos\omega t-\omega\sin\omega t],\tag{4}$$

$$\frac{d^2V}{dt^2}=Ae^{-\alpha t}[(\alpha^2-\omega^2)\cos\omega t+2\alpha\omega\sin\omega t].\tag{5}$$

将它们代回式(2)，消去共同的因子 $Ae^{-\alpha t}$，于是剩下

$$(\alpha^2-\omega^2)\cos\omega t+2\alpha\omega\sin\omega t-\frac{R}{L}(\alpha\cos\omega t+\omega\sin\omega t)$$

$$+\frac{1}{LC}\cos\omega t=0.\tag{6}$$

当，而且只有当 $\sin\omega t$ 与 $\cos\omega t$ 的系数均为零时，上式才可能对一切 t 都成立．即必须要求

$$2\alpha\omega-\frac{R\omega}{L}=0,\tag{7}$$

和

$$\alpha^2-\omega^2-\alpha\frac{R}{L}+\frac{1}{LC}=0.\tag{8}$$

第一个方程给出了 α 的条件

$$\alpha=\frac{R}{2L}.\tag{9}$$

第二个方程则要求

$$\omega^2=\frac{1}{LC}-\alpha\frac{R}{L}+\alpha^2=\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}.\tag{10}$$

由于常数 ω 是实数，ω^2 不可能为负数．所以只要 $R^2/4L^2\leqslant 1/LC$，我们就成功地得到式(3)形式的微分方程的解．事实上这是“小阻尼”即低电阻的情形，也正是我们所要研究的，为此我们将假设电路中的 R、L 和 C 的值要满足不等式 $R<2\sqrt{L/C}$.

函数 $Ae^{-\alpha t}\cos\omega t$ 并非唯一可能的解；$Be^{-\alpha t}\sin\omega t$ 在 α 和 ω 满足同样的要求式(9)和式(10)时，同样是此微分方程的解. 通解是这两个解之和

$$V(t)=e^{-\alpha t}(A\cos\omega t+B\sin\omega t). \tag{11}$$

我们可以调节任意常数 A、B 以满足初始条件，这不太重要. 在任意给定情形下，解只包含正弦，或只包含余弦，或是这二者的某种叠加，这些只是如何规定计时的小事. 最本质的现象是衰减的正弦式的振荡.

电压随时间的变化示于图 8.2(a). 这类过程实际上当然不可能一直存在于已过去的全部时间. 在过去的某一时刻必定对该电路提供了一些能量，然后让它振荡. 例如可能是在开路时给电容器充电，然后再把电容器接到线圈上去.

在图 8.2(b) 中已把时间的标度放大了，还增加了用虚线画的电流 I 的变化曲线. 对于 V，我们取衰减余弦式(3). 作为时间函数的电流则由

$$I=-C\frac{dV}{dt}=AC\omega\left(\sin\omega t+\frac{\alpha}{\omega}\cos\omega t\right)e^{-\alpha t} \tag{12}$$

给出. 比值 α/ω 是衰减的度量. 若 α/ω 非常小，多次振荡后振幅只有很小的衰减. 图 8.2 中我们选择 $\alpha/\omega\approx0.04$ 的情形. 这样，式(12)中的余弦项不很大. 实际上它所起的作用只是使位相改变一个角度 $\tan^{-1}(\alpha/\omega)$. 所以电流振荡的位相几乎正好与电压振荡的位相差四分之一个周期.

这种振荡涉及能量在电容器和电感器(或说电场和磁场)之间往返转换. 在图 8.2(b) 中 1 所标示的时刻，全部能量都在电场中. 四分之一周期以后，在 2 所标示的时刻，电容器放了电，全部能量几乎都在线圈的磁场中. 这期间，线路的电阻 R 从中取走了一部分能量，因此在振荡进行过程中，留在两个场中的能量逐渐减小.

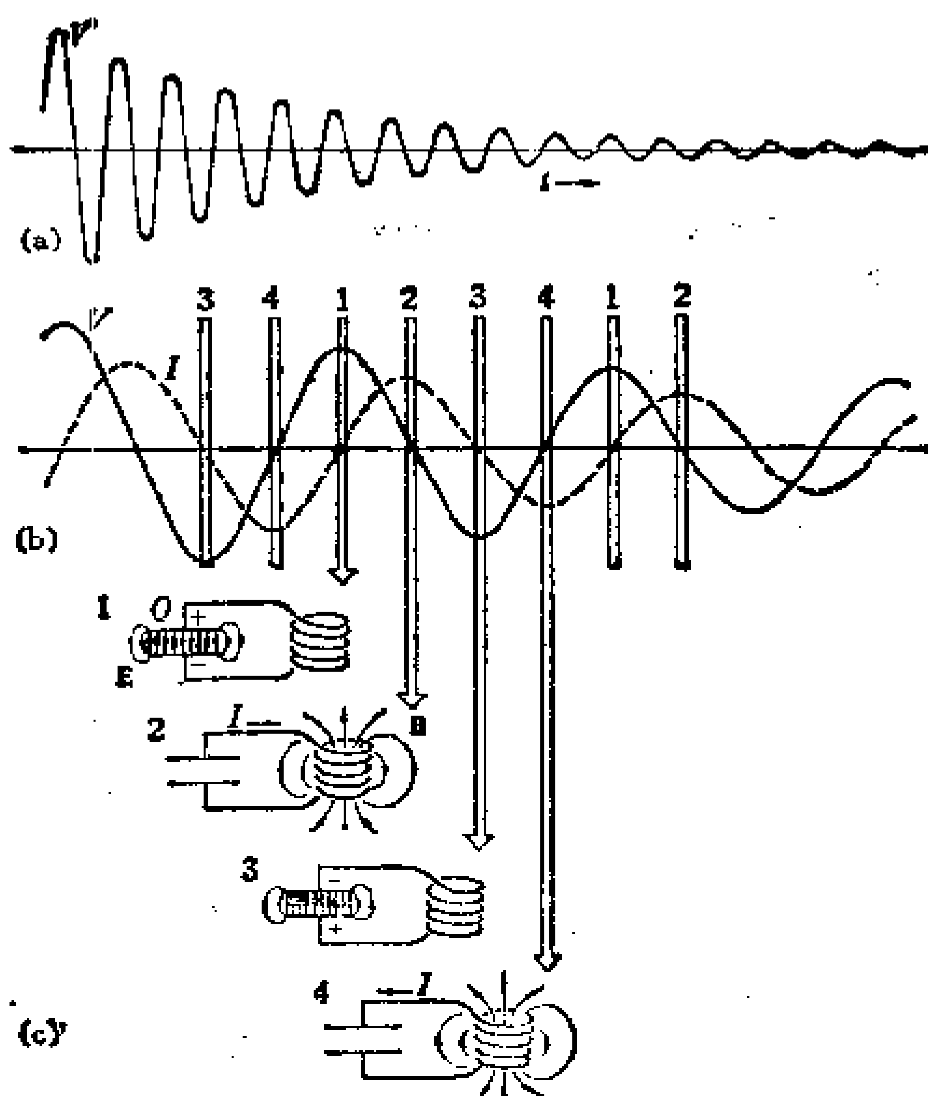


图 8.2 (a) RLC 电路中电压的衰减正弦振荡；(b) 时间标度放大后(a)图的一部分；图中还包括电流 I 的曲线；(c)能量由电场到磁场以及反过来磁场到电场的周期转换. 每个图表示 (b) 中相应数字所标示时刻的状况.

振荡器的相对衰减经常用一个称为 Q 的数来表示，这在第一卷对谐振动的一般讨论中就已经引入了. Q(不要与电容器里的电荷混淆!)是代表"品质"的，或称为"品质因数". 但事实上，谁也不这样叫它，只是称它为"Q"值. 阻尼越小，Q 值就越大. 对于以频率 ω 振荡的振荡器，Q 是如下无量纲的比值:

$$Q = \omega \frac{\text{所贮存的能量}}{\text{平均功率消耗}}, \tag{13}$$

或者宁可这样来记忆：Q是振子能量减小到$1/e$时，宗量ωt变化的弧度数(即2π乘上周期的个数)．

对于这个线路，所贮存的能量正比于V^2或I^2，因而也就正比于$e^{-2\alpha t}$．故在$t = \frac{1}{2\alpha}$的时间内能量衰减为$1/e$．宗量变化为$\omega/2\alpha$弧度．所以对于此RLC电路

$$Q = \frac{\omega}{2\alpha} = \frac{\omega L}{R}. \tag{14}$$

读者试粗略地估计一下，图8.2所示振荡的Q值多大？

显然，我们方才研究的普遍情形包括一些简单的特殊情况．若$R=0$，就得到一个完全不衰减的振荡器，其频率ω_0为

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{15}$$

我们要处理的系统大多是这种振荡器，它的阻尼很小以至在计算频率时可以忽略不计．阻尼对ω只是二级效应，习题8.9将表明这一点．

为使讨论完整起见，我们简略地研究一下超阻尼电路的情形，在这种电路中，$R > 2\sqrt{L/C}$．此时，式(2)解的形式为$V = Ae^{-\beta t}$，β有两个值．其通解为

$$V(t) = Ae^{-\beta_1 t} + Be^{-\beta_2 t}. \tag{16}$$

在这种情形下没有振动，只是单调的衰减．在“临界”阻尼的特殊情形下，$R = 2\sqrt{L/C}$，$\beta_1 = \beta_2$，微分方程(2)的解的形式为

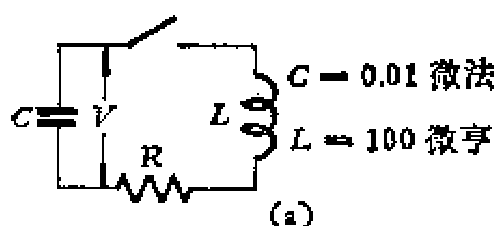
$$V(t) = (A + Bt)e^{-\beta t}. \tag{17}$$

对于给定的L和C，电路总能量耗散得最快(参看习题8.8)的条件就是这样．

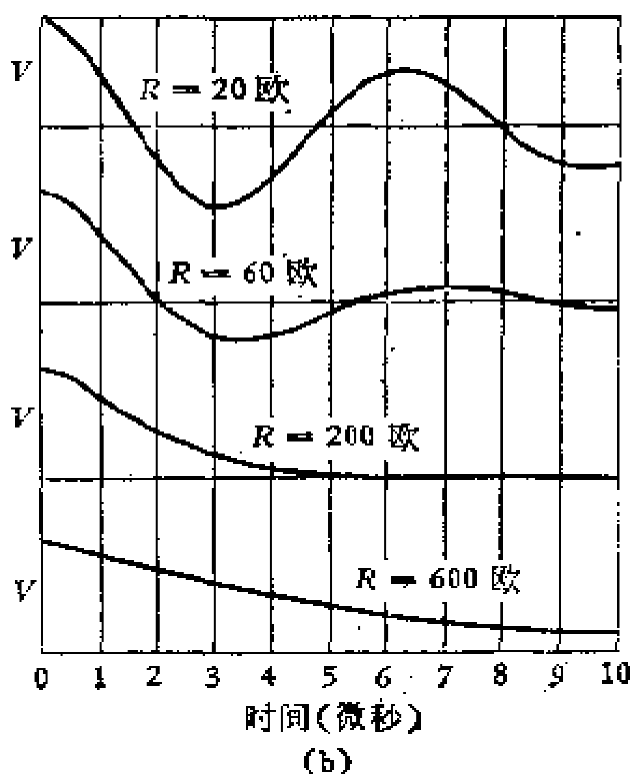
在图 8.3 中，可以看到刚才讲过的全部情形。对两个欠阻尼电路，一个临界阻尼电路和一个超阻尼电路画出了 $V(t)$。电容器与电感器保持不变，只是改变了电阻器。该电路的固有角频率

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$$

为 10^6 秒$^{-1}$，相当于每秒 $10^6/2\pi$ 周的频率，即 159 千周/秒。



(a)



(b)

图 8.3 (a) 开关在 $t=0$ 时合上，电容器放电。(b) 示出了四种情况，其中之一 $R=200$ 欧姆，是临界阻尼的情形。

开始将电路中的电容器充电到一定的电位差，譬如说 1 伏特，在 $t=0$ 时合上开关。即在 $t=0$ 时 $V=1$ 是一个初始条件。而且，因为电感器不允许电流不连续地上升，故在 $t=0$ 时 $I=0$。所以另一个初始条件是在 $t=0$ 时，$dV/dt=0$。注意，这四个衰减曲线都是在同样情形下开始的。在大衰减情形（$R=600$ 欧姆），衰减曲线的大部分看起来像是 RC 电路的简单指数衰减曲线。只是在开始的地方，曲线是半圆形的，所以它开始时的斜率为零，从而显出电感 L 的存在。

8.2 交变电流

我们刚才讨论的共振电路不包含能量源，因而注定只是

瞬时活动，振荡迟早必然要消逝．在交流电路中，我们将涉及一种稳定态，电流和电压作正弦振荡而振幅不变．某种振荡电动势在驱动着这个系统．

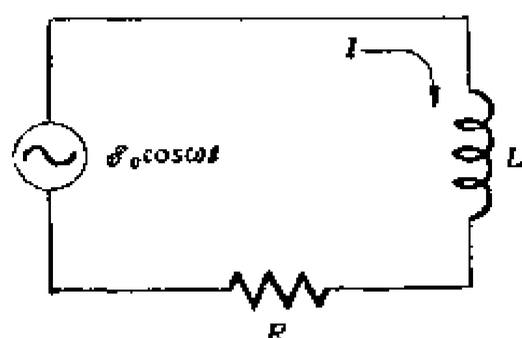


图 8.4　在交变电动势推动下具有电感的电路．

把$\mathscr{E}=\mathscr{E}_0\cos\omega t$ 的电动势加到包含电感与电阻的电路上．采用某种发动机或马达使图 7.13中的线圈轴以恒定的角速度ω转动，就可以产生$\mathscr{E}$．在图 8.4 中，表示电动势已经连接到电路中了．我们可略去发电机的内阻，或将其内阻包括于R中．设该电路中各元件电势降之和等于电动势$\mathscr{E}$，这和我们引出式(7.61)时的作法完全一样．支配电流的方程为

$$L\frac{dI}{dt}+RI=\mathscr{E}_0\cos\omega t. \tag{18}$$

这时也可能有某种瞬时状态，这要由初始条件来决定，即决定于发电机何时并如何被接通的．但我们只对稳定态感兴趣，这时电流按驱动电动势的频率振荡，其振幅与位相必满足式(18)．为了证明这是可能的，我们考虑下式表示的电流

$$I=I_0\cos(\omega t+\varphi). \tag{19}$$

为了确定常数I_0和φ，将上式代入式(18)

$$-LI_0\omega\sin(\omega t+\varphi)-RI_0\cos(\omega t+\varphi)=\mathscr{E}_0\cos\omega t. \tag{20}$$

$\cos\omega t$ 与 $\sin\omega t$ 这两个函数可以分离

$$-LI_0\omega(\sin\omega t\cos\varphi+\cos\omega t\sin\varphi)$$
$$+RI_0(\cos\omega t\cos\varphi-\sin\omega t\sin\varphi)=\mathscr{E}_0\cos\omega t. \tag{21}$$

令$\cos\omega t$ 与 $\sin\omega t$ 的系数分别为零，

$$-LI_0\omega\cos\varphi-RI_0\sin\varphi=0 \tag{22}$$

给出

$$\tan\varphi = -\frac{\omega L}{R}. \tag{23}$$

由 $$-LI_0\omega\sin\varphi + RI_0\cos\varphi - \mathscr{E}_0 = 0 \tag{24}$$

给出

$$I_0 = \frac{\mathscr{E}_0}{R\cos\varphi - \omega L\sin\varphi} = \frac{\mathscr{E}_0}{R(\cos\varphi + \sin\varphi\tan\varphi)}$$

$$= \frac{\mathscr{E}_0\cos\varphi}{R}, \tag{25}$$

或者由于

$$\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}, \qquad [由式(23)] \tag{26}$$

得

$$I_0 = \frac{\mathscr{E}_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}. \tag{27}$$

在图 8.5 中，将$\mathscr{E}$和 I 的振荡画在同一个图上. 由于 φ 角为负，故电流达到极大值的时间比电动势稍迟一点. 于是人们说“在感性电路中电流落后于电压”量 ωL 具有电阻的量纲，可以用欧姆来表示，称为感抗。

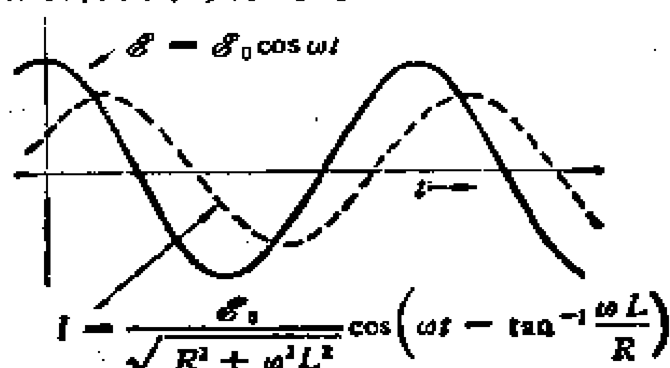


图 8.5 在相同的时间坐标标度下，把图 8.4 电路中的电流 I 和电动势$\mathscr{E}$画在一起. 注意其位相差.

如果以电容器 C 代替电感器 L，如图 8.6 所示，则电路服从下列方程式

$$-\frac{Q}{C} + RI = \mathscr{E}_0\cos\omega t. \tag{28}$$

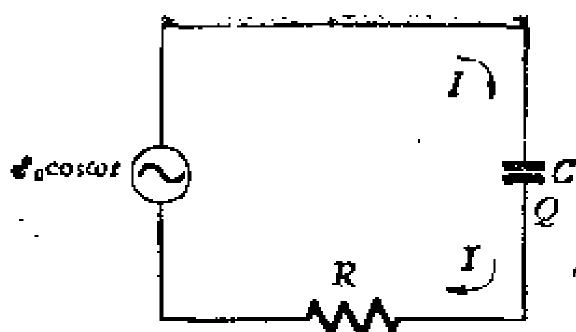


图 8.6 包含电阻器和电容器的电路的交变电动势。

考虑稳定态的解

$$I = I_0\cos(\omega t + \varphi) \tag{29}$$

由于 $I = -dQ/dt$，故有

$$Q = -\int I\,dt = \frac{I_0}{\omega}\sin(\omega t + \varphi). \tag{30}$$

注意，用积分的办法由 I 得到 Q 时，没有加积分常数的问题，因为我们知道，对稳定态，Q 必定在零点两边对称地振荡。

代回式(28)可得

$$-\frac{I_0}{\omega C}\sin(\omega t + \varphi) + RI_0\cos(\omega t + \varphi) = \mathscr{E}_0\cos\omega t. \tag{31}$$

和前面一样，令 $\cos\omega t$ 和 $\sin\omega t$ 的系数分别为零，我们就可得到关于 φ 和 I_0 的条件．在这情形下，其结果为

$$\tan\varphi = \frac{1}{R\omega C}, \tag{32}$$

和

$$I_0 = \frac{\mathscr{E}_0}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}}. \tag{33}$$

注意，现在相角是正的．即所谓在容性电路中，电流"超前于电压"．在图 8.7 的曲线中，这句话的意思是明显的．

从数学上讲，函数

$$I = \frac{\mathscr{E}_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2L^2}}\cos\left(\omega t - \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}\right) \tag{34}$$

是微分方程(18)的特解．在这个解上，可以加上一个余函数，

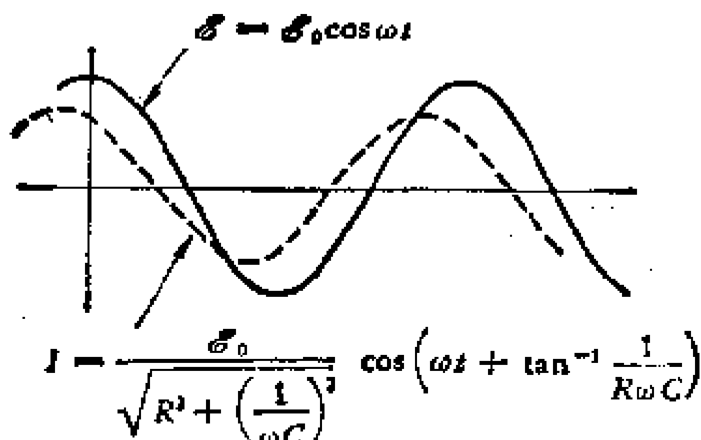


图 8.7 RC 电路中的电流．试比较此处的相移和图 8.5 中感性电路的相移．

即加上齐次微分方程

$$L\frac{dI}{dt}+RI=0 \tag{35}$$

的任意解．上式正是方程(7.65)，其解已经在 7.9 节中求出过，为一指数衰减函数：

$$I\sim e^{-(R/L)t}. \tag{36}$$

它的物理意义是：由某些初始条件决定的瞬态是由式(36)形式的 $I(t)$ 的衰减分量来表示的．在经过 $t\gg L/R$ 的一段时间之后，它会消失掉，只余下由特解式(34)所表示的以驱动频率振荡的稳定正弦振荡．

RL 电路和 RC 电路所得结果的相似性提醒我们去研究把电感器与电容器串联起来的情形．假若设法使 $I=I_0\cos(\omega t+\varphi)$ 的交变电流流过一个电感、电容的串联电路（如图 8.8 所示）．电感器两端的电压 V_L 为

$$V_L=L\frac{dI}{dt}=-I_0\omega L\sin(\omega t+\varphi). \tag{37}$$

电容器两端的电压 V_C，其符号与 V_L 的一致，为

$$V_C=-\frac{Q}{C}=\frac{1}{C}\int I\,dt=\frac{I_0}{\omega C}\sin(\omega t+\varphi). \tag{38}$$

于是此串联电路两端的电压为

$$V = V_L + V_C = -\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) I_0 \sin(\omega t + \varphi). \tag{39}$$

对于给定的 ω，此组合显然与一个单一的电感或电容元件相当；到底与那一种相当，取决于量

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

是正的还是负的．例如，假若

$$\omega L > \frac{1}{\omega C},$$

此组合与一电感器 L' 相当，L' 符合于

$$\omega L' = \omega L - \frac{1}{\omega C}. \tag{40}$$

图 8.8 串联的电容器和电感器相当于一个单一的无功元件，它或者相当于一电感器，或者相当于一电容器，这取决于 $\omega^2 LC$ 比 1 大还是小．

相当只是指在特定频率的稳定振荡下，其电流与电压之间的关系是相同的．这就允许我们对被该频率驱动的任何电路用 L' 去代替 L 和 C．

这个结论可以应用于图 8.9 中简单的 RLC 电路．我们只须回到式(23)和(27)，那是在电动势 $\mathscr{E}_0 \cos \omega t$ 驱动下 RL 电路的解，并用 $\omega L - 1/\omega C$ 去代替 ωL 即得：

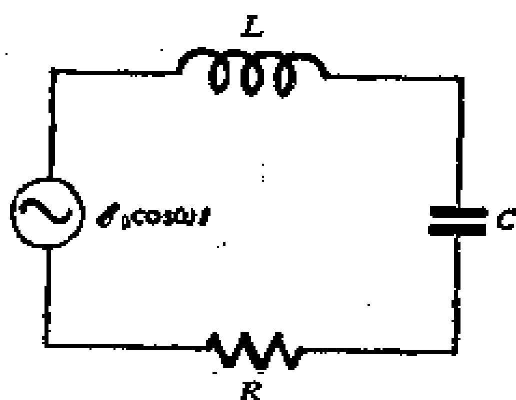


图 8.9 正弦电动势驱动的 RLC 电路．

$$I = \frac{\mathscr{E}_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \cos(\omega t + \varphi), \tag{41}$$

$$\tan \varphi = \frac{1}{R\omega C} - \frac{\omega L}{R}. \tag{42}$$

对于固定的电动势振幅$\mathscr{E}_0$和给定的电路元件 L, C, R, 当驱动频率ω符合于

$$\omega L-\frac{1}{\omega C}=0 \tag{43}$$

时,我们得到最大的电流. 这就等于说, $\omega=1/\sqrt{LC}=\omega_0$是无阻尼 LC 电路的共振频率. 在这种情形下,式(41)简化为

$$I=\frac{\mathscr{E}_0\cos\omega t}{R}, \tag{44}$$

这正是当电路仅含电阻器时所应流过的电流.

作为例子, 考虑把图 8.3(a) 的电路和一个交变电动势为$\mathscr{E}=\mathscr{E}_0\cos\omega t$的源或发电机连接起来. 驱动频率$\omega$可能与共振频率$\omega_0=1/\sqrt{LC}$不同. 对于给定的电容 (0.01 微法) 和电感 (100 微亨), ω_0 为 10^6 弧度/秒 (或 $10^6/2\pi$ 周/秒). 图 8.10 对三种不同R值画出了振荡电流的振幅与驱动频率ω的函数关系. 对每种情形都假设电动势的振幅$\mathscr{E}_0$为 100 伏. 注意, 在最小电阻值的情形, $\omega=\omega_0$处的共振峰最高最尖. 阻值和上面的电路相同, 把它作为无驱动电动势的阻尼振荡器使用时,其性质如图 8.3(b) 顶部的图形所示.

由式(14), $\omega_0 L/R$ 定义为电路的Q值[1], 此时电路的Q值为$\frac{(10^6\times10^{-4})}{20}$, 即等于 5. 一般说来,电路的$Q$值越高,作为驱动频率$\omega$的函数的共振峰就越高越窄.为了精确起见,试考虑在$\omega_0$邻域的频率, $\omega=\omega_0+\Delta\omega$, 计算到 $\Delta\omega/\omega_0$的一次项,则对式(41)分母中的表达式 $\omega L-1/\omega C$ 可作这样的近似:

---

1) 式(14)中的ω是自由衰减阻尼振荡的频率,实际上对于中度或轻度的阻尼,它与ω_0相同. 在Q值的定义中我们这里用的是ω_0. 现在的讨论中, ω是我们可以选用于此电路的任意频率.

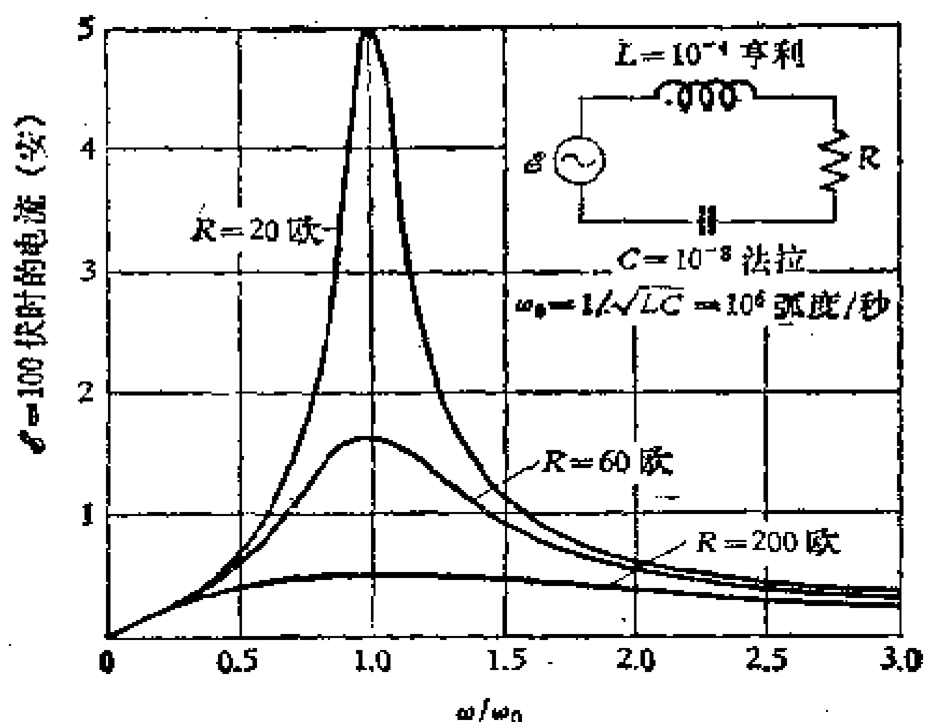


图 8.10 将振幅为 100 伏特的电动势加到 RLC 串联电路上．电路元件与图 8.3 的阻尼电路的例子相同．对于三种不同的电阻值，用式（41）计算出电流振幅并把它作为 ω/ω_0 的函数画出．

$$\omega L-\frac{1}{\omega C}=\omega_0L\left(1+\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)-\frac{1}{\omega_0C(1+\Delta\omega/\omega_0)}\tag{45}$$

由于 ω_0 为 $1/\sqrt{LC}$，上式变为

$$\omega_0L\left[1+\frac{\Delta\omega}{\omega_0}-\frac{1}{1+\Delta\omega/\omega_0}\right]\approx\omega_0L\left(2\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right).\tag{46}$$

在恰好共振时，式(41)平方根号内的量正好为 R^2．当 ω 不是共振频率而满足 $|\omega L-1/\omega C|=R$ 时，或近似地，当

$$\frac{2\Delta\omega}{\omega_0}=\frac{R}{\omega_0L}=\frac{1}{Q}\tag{47}$$

时，平方根号内的量将加倍． 这就意味着当 $\Delta\omega/\omega_0=1/2Q$ 时，电流振幅将下降到峰值的 $1/\sqrt{2}$ 倍．这就是“半功率”点．之所以这么称呼，在 8.5 节中将会讲到，因为能量或功率与振幅的平方成正比．人们常常用两个半功率点间的全宽度来表示共振峰的宽度． 显然这恰好是 $1/Q$ 乘共振频率． 具有比

这个 Q 值高得多的电路是很普通的．无线电接收机可以选择特定的电台并能和别的电台分辨开就是靠 Q 值达几百的电路．Q 值达 10^4 甚至 10^5 的微波共振电路也很容易做．

代表振荡电流和电动势间相对位相的角度 φ 随频率的变化方式表示在图 8.11 中．在频率非常低时，电容器是电流流动的主要障碍物，φ 为正．共振时 $\varphi=0$．Q 值越高，频率经过 ω_0 而增大时，φ 由正到负的变化越急剧．

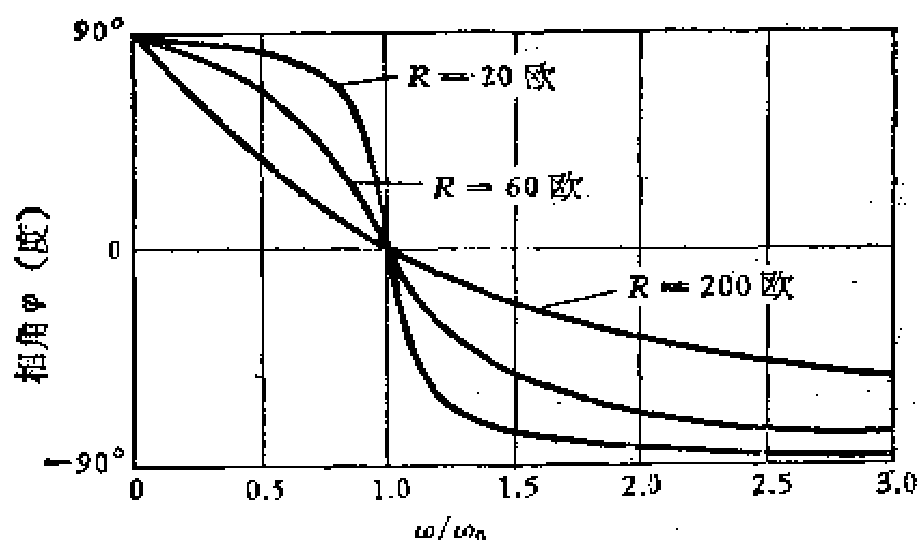


图 8.11　图 8.10 的电路中相角随频率的变化．

8.3　交流网络

交流网络是电阻器、电容器和电感器的任意组合，其中有固定频率为 ω 的稳定振荡的电流在流动．一个或多个这种频率的电动势驱动着电流振荡．图 8.12 是一个这种网络的图．交变电动势源以符号—⊖—表示．在网络的一个支路，譬如包含电感器 L_2 的支路，电流作为时间函数表示为

$$I_2=I_{02}\cos(\omega t+\varphi_2). \tag{48}$$

由于整个网络的频率是一常量，故两个数，例如上式中的振幅 I_{02} 和位相常数 φ_2，就足以决定一个特定分枝内各时刻的电流．同样，支路两端的电压也以某一确定的振幅和位相振荡

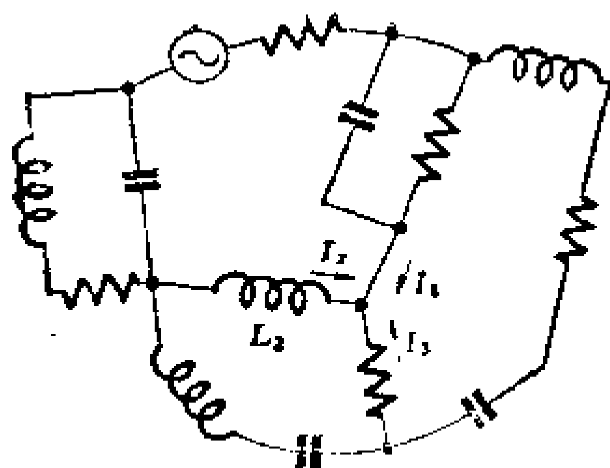


图 8.12 交流网络

$$V_2 = V_{02}\cos(\omega t + \theta_2). \tag{49}$$

如果我们已经确定了网络一切支路上的电流和电压，我们就算完全分析了这个网络. 当然，建立并解出相应的全部微分方程也能求出它们. 如果我们关心网络的瞬变性质，我们就非这样做不可. 然而对于稳态，我们可以采用一个非常简单而巧妙的方法. 它基于下面两个想法:

(i) 交变电流或电压可以用复数表示;

(ii) 在给定频率下，电路中任一支路或元件的特性可以用支路上电压和电流间的关系来表征.

第一个想法利用一个著名的数学恒等式:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{50}$$

$i^2 = -1$. 为了实现这种想法，我们采用如下的规定以表示电流电压:

交变电流 $I_0\cos(\omega t + \varphi)$ 用复数 $I_0e^{i\varphi}$ 表示，此数之实部为 $I_0\cos\varphi$，虚部为 $I_0\sin\varphi$.

反过来，若复数 $x + iy$ 表示电流 I，则乘积 $(x+iy)e^{i\omega t}$ 的实部给出了表现为时间函数的电流[1].

---

1) 这与常用的表示方法不大相同. 常用的方法是以复数 $I = I_0e^{i(\omega t+\varphi)}$ 表示电流，其实部即电流 $I_0\cos(\omega t + \varphi)$. ——译者注

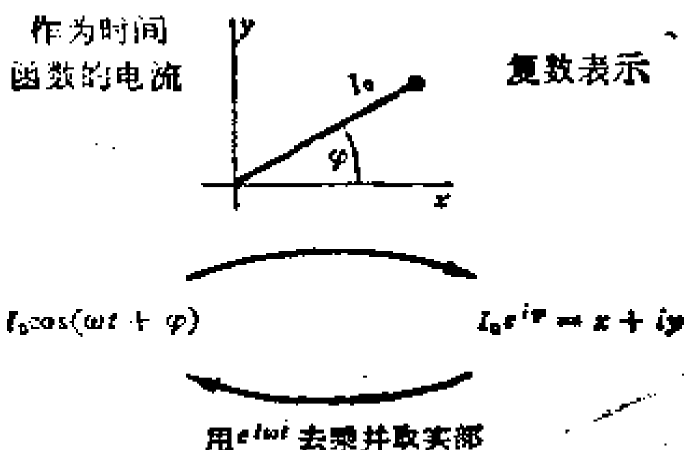


图 8.13 以复数表示交流电的法则.

图 8.13 就是用来提醒这两种方式的对应的. 由于复数 $z=x+iy$ 可以用二维平面上的图来表示，很容易把位相常数看作是角 $\tan^{-1}y/x$，振幅 I_0 看作是模 $\sqrt{x^2+y^2}$.

上面所讲的一切之所以有用，是基于以下事实：*二电流之和的复数表示是其复数表示之和*. 考虑图 8.12 中在导线联结点会合的两个电流 I_1 和 I_2 之和. 在任一时刻 t，此电流之和为：

$$
\begin{aligned}
I_1+I_2&=I_{01}\cos(\omega t+\varphi_1)+I_{02}\cos(\omega t+\varphi_2)\\
&=(I_{01}\cos\varphi_1+I_{02}\cos\varphi_2)\cos\omega t-(I_{01}\sin\varphi_1\\
&\qquad+I_{02}\sin\varphi_2)\sin\omega t. \qquad (51)
\end{aligned}
$$

另一方面，根据前述法则，代表 I_1、I_2 之复数的和为

$$
\begin{aligned}
I_{01}e^{i\varphi_1}+I_{02}e^{i\varphi_2}&=(I_{01}\cos\varphi_1+I_{02}\cos\varphi_2)\\
&\quad+i(I_{01}\sin\varphi_1+I_{02}\sin\varphi_2). \qquad (52)
\end{aligned}
$$

若用 $(\cos\omega t+i\sin\omega t)$ 乘式 (52) 的右边，并取其乘积的实部就会正好得到式 (51) 右边的式子.

这意味着时间的周期函数自身的加、减可以由代表它们的复数的加、减来代替. 或者用另一种方式来叙述：在加法上交流电流的代数学和复数的代数学一样. 这种对应不能扩大到乘法上去，复数 $I_{01}I_{02}e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$ 并不代表式 (51) 中的两个

电流函数的乘积.

然而，在分析网络时，所需进行的只是电流和电压的加法. 例如在图 8.12 I_1 与 I_2 汇合的结点上，物理要求是每瞬时进入该结点的净电流应为零. 故条件

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \tag{53}$$

必须成立，这里 I_1、I_2、I_3 真正是时间的周期函数. 由于有上述对应，式(53)可以用三个复数之和为零这个简单的代数语言来表示. 电压也能同样地处理. 就每一瞬时论，网络中任一迴路的电压降之和必等于该时刻迴路中的电动势. 关于周期变化的电压函数的这个条件，同样也可以用一些代表各振荡函数的复数 $V_1(t)$、$V_2(t)$ 等的和这种说法来代替.

8.4 导纳与阻抗

流过电路元件的电流与元件两端电压之间的关系可以用代表电流和电压的复数之间的关系来表示. 试看图 8.4 中的电感-电阻串联电路. 振荡电压以 $\mathscr{E}_0$，电流以 $I_0e^{i\varphi}$ 表示，这里 $I_0 = \mathscr{E}_0/\sqrt{R^2 + \omega^2L^2}$, $\tan\varphi = -\omega L/R$. 位相差 φ 和电流振幅与电压振幅之比表征电路在此频率下的性质. 我们定义一个复数 Y 如下

$$Y = \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{R^2 + \omega^2L^2}}，其中\ \varphi = \tan^{-1}\left(-\frac{\omega L}{R}\right), \tag{54}$$

则关系

$$I = YV \tag{55}$$

成立，这里 V 是个复数，它代表 R, L 串联电路的端电压，I 是代表电流的复数. Y 称为导纳. 此关系也可以用 Y 的倒数 Z 表示出来，Z 称为阻抗

$$V = \left(\frac{1}{Y}\right)I = ZI. \tag{56}$$

在这里我们确实用到了两个复数的乘积，但代表交变电流或电压的只是其中的一个复数．另一个复数是阻抗或导纳[1]．

阻抗以欧姆来度量．实际上，如果电路元件仅由电阻构成，则阻抗是实数并且就等于 R，故式(56)与直流电路的欧姆定律，$V = RI$，类似．

无阻电感器的导纳为虚数 $Y = -i/\omega L$．这可由令式(54)中的 R 为零看出．因子 $-i$ 表明电流振荡在位相上落后于振荡电压 $\pi/2$．在复数图上，若电压以 V 代表[图 8.14(b)]，电流可以用 I 代表，其位置示于该图．对于电容器，$Y = i\omega C$，这可以由图 8.7 所示的电流看出．在这种情形下，V 与 I 的关系可由图 8.14(c) 示出．每个插图都表明 V 与 I 的相对符号应该如何确定．除非前后统一地来确定符号，否则"超

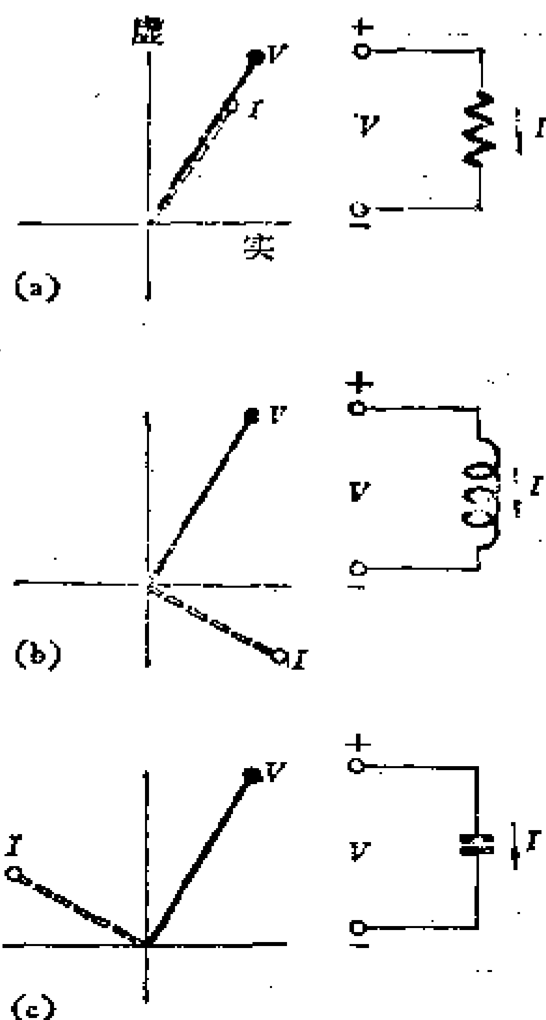


图 8.14　V 和 I 为复数，代表电路元件的端电压和通过它的电流．振荡电流与振荡电压间的相对位相在此处以"矢量"间的夹角来表示．

(a) 在电阻器上，电流与电压同相；
(b) 在电感器上，电流落后于电压；
(c) 在电容器上，电流超前于电压．

---

1) 这样，此处的代数学包括两类复数，一些例如代表阻抗，一些例如代表电流．两个"阻抗数"之积就像两个"电流数"之积一样，并不代表任何东西．

前"和"滞后"的说法是没有意义的. 注意，我们总是把电流的正向定义得使作用在电阻上的正向电压产生正向电流［图 8.14 (a)］.

三种基本电路元件的性质概括如下

符　　号	导纳, Y	阻抗, $Z=\frac{1}{Y}$
R 电阻符号	$\frac{1}{R}$	R
L 电感符号	$\frac{-i}{\omega L}$	$i\omega L$
C 电容符号	$i\omega C$	$\frac{-i}{\omega C}$
	$I=YV$	$V=ZI$

我们可以用这些元件构成任何电路. 当这些元件或元件的组合并联时，用导纳方便，因为这时是导纳相加. 图 8.15 中具有导纳 Y_1, Y_2 的两个"方块"并联，于是有

$$I=I_1+I_2=Y_1V+Y_2V=(Y_1+Y_2)V. \tag{57}$$

这表示等价的单个方块具有导纳 $Y=Y_1+Y_2$. 由图 8.16 可明显地看出，对于串联电路各元件，是阻抗相加. 这听起来好象是在讲直流网络！事实上，我们现在已经把交流网络的问题化为直流网络的问题了，唯一的区别是：所涉及的数是复数.

作为例子，我们看一下图 8.17 中的"并联 RLC 电路"，这三个支路的合成导纳是

$$Y=\frac{1}{R}+i\omega C-\frac{i}{\omega L}. \tag{58}$$

电压仅仅是 $\mathscr{E}_0$，因此复电流为

$$I=YV=\mathscr{E}_0\left[\frac{1}{R}+i\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)\right]. \tag{59}$$

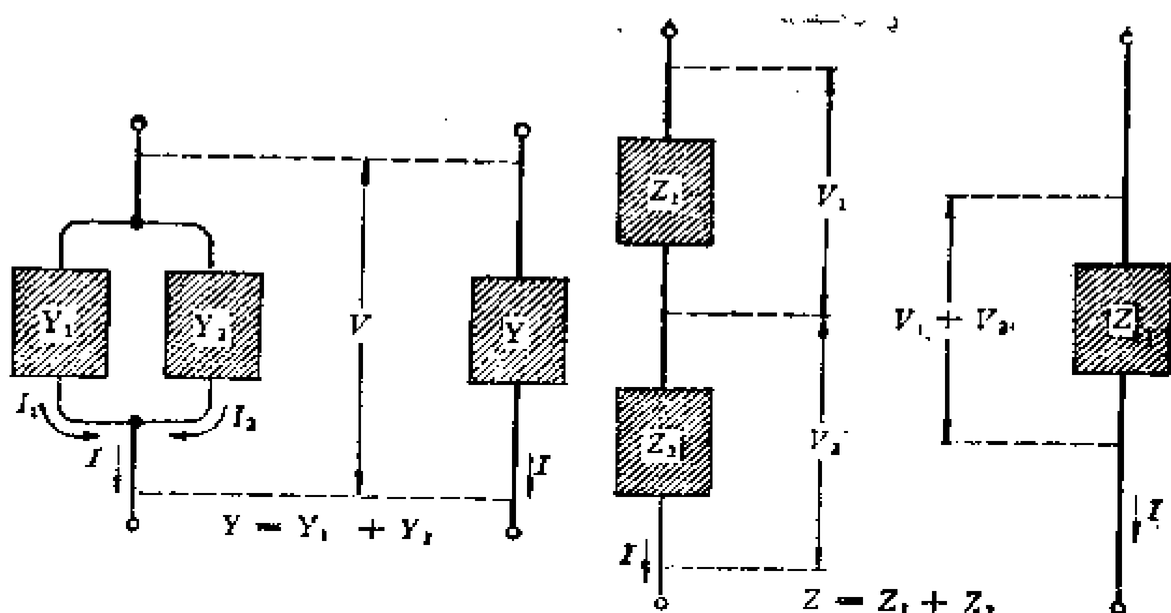


图 8.15 并联电路中导纳的合成。　图 8.16 串联电路中阻抗的合成。

此振荡电流的振幅是复数 I 之模，为 $\mathscr{E}_0[(1/R)^2 + (\omega C - 1/\omega L)^2]^{1/2}$，相角为 $\tan^{-1}(R\omega C - R/\omega L)$。

这种方法只能用来处理线性电路元件，这种元件中电流正比于电压．换句话说，电路必须是用线性微分方程描述的．对于非线性元件，我们甚至不能定义其阻抗．非线性电路元件是非常重要非常有趣的器件．读者在实验室中已经学过一些了，你能够看到为什么不容易对它们作这一类的分析．

以上这些论述全都是对频率不变的连续振荡而言的．电路的瞬时行为是不同的问题．然而，对于线性电路，刚才提出的方法甚至对暂态也有些用处．原因是可以用许多个频率的稳定振动的叠加来表示一个非稳定行为，而对其中每一频率所产生的效应则可按其单独存在时的情形去计算．这一点只能留到第 III 卷

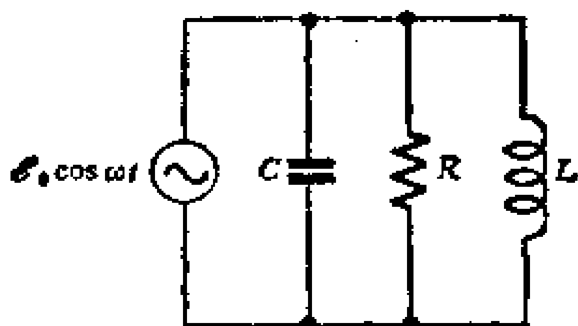


图 8.17 "并联"谐振电路．三元件之复数导纳相加，如式(58)所示．

再去详细讲.

8.5 交流电路中的功率和能量

若电阻 R 两端的电压为 $V_0\cos\omega t$, 则电流为 $I=(V_0/R)\cos\omega t$.瞬时功率,即在电阻器上能量的瞬时消耗率,为

$$P=RI^2=\frac{V_0^2}{R}\cos^2\omega t. \tag{60}$$

由于对许多个周期 $\cos^2\omega t$ 的平均值为 1/2, 故在电路中消耗的平均功率为

$$\bar{P}=\frac{1}{2}\frac{V_0^2}{R}. \tag{61}$$

习惯上交流电路中的电流和电压不用振幅而用 $1/\sqrt{2}$ 乘振幅来表示, 常称为"平均平方根值", 或简称"均方根"值. 这里计及了式(61)中的因子 1/2,所以

$$\bar{P}=\frac{V_{均方根}^2}{R}. \tag{62}$$

例如, 通常家庭用电的线电压是 120 伏[1], 相应于振幅 $120\sqrt{2}$ 伏. 故室内电插座两端的电势差(若电压正常)为

$$V(t)=170\cos 377t, \tag{63}$$

V 以伏特为单位, t 以秒为单位. 当电流振幅为 1.414 安时, 交流安培计的读数标定为 1 安.

一般说来, 传输给电路元件的能量的瞬时速率为 VI、即瞬时电压与瞬时电流的乘积,要适当地注意符号. 考虑图 8.4 中简单 LR 电路里电流流动的情形. 图 8.18 中我们又画了电流和电压的曲线图,并加上了正比于 VI 之积的曲线. VI 为正表示能量由电动势源或发电机传输给 LR 串联电路. 注

1)这是指美国,我国是 220 伏. ——译者注

意，VI 在周期的某些部分是负的，在这些期间内，一些能量又回到发电机中．这可以用贮存在电感器的磁场中的能量振荡来解释．贮存的能量，$\frac{1}{2}LI^2$，在每一整周中通过其极大值两次．

平均功率 $\bar{P}$ 相当于水平虚线．为了计算它的值，让我们看看 $V=\mathscr{E}_0\cos\omega t$ 与 $I=I_0\cos(\omega t+\varphi)$ 的乘积 VI：

$$VI=\mathscr{E}_0I_0\cos\omega t\cos(\omega t+\varphi)$$
$$=\mathscr{E}_0I_0(\cos^2\omega t\cos\varphi-\cos\omega t\sin\omega t\sin\varphi). \quad (64)$$

正比于 $\cos\omega t\sin\omega t$ 之项的时间平均值为零，若将它写成

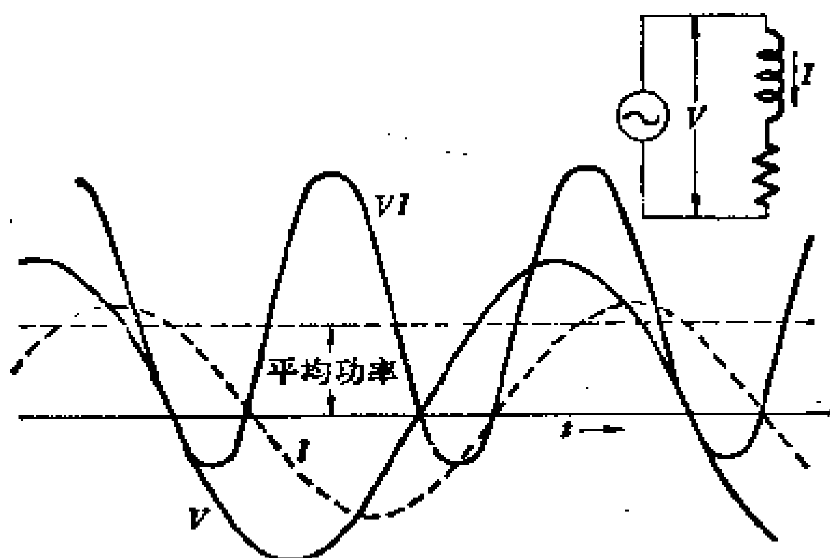


图 8.18　瞬时功率 VI 是能量由左边的电动势源传输给右边电路元件的速率．它的时间平均值用水平虚线表示．

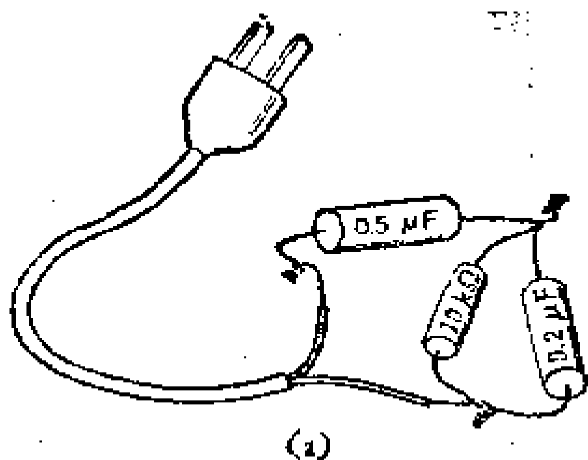
$\frac{1}{2}\sin 2\omega t$，这点就很明显；而 $\cos^2\omega t$ 之平均值为 1/2．故对时间平均值有

$$\bar{P}=\overline{VI}=\frac{1}{2}\mathscr{E}_0I_0\cos\varphi. \quad (65)$$

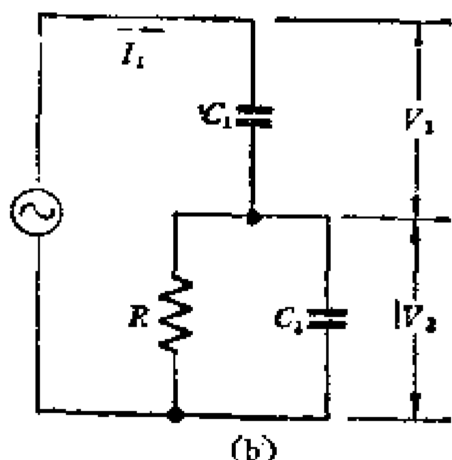
若电流与电压均以均方根值表示并各以伏和安为单位，则

$$\underset{(瓦)}{\bar{P}}=\underset{(伏)}{V_{均方根}}\underset{(安)}{I_{均方根}}\cos\varphi. \quad (66)$$

这个电路中，全部能量都消耗在电阻 R 上．当然，任何实际电



(a)



(b)

图 8.19　实际网络 (a) 准备与一电动势源连接，(b) 为其电路图.

感器都有些电阻. 为了分析电路的方便，我们把它归并到电阻 R 中去. 热当然是在电阻的实际位置上释放的.

为了练习在 8.4 节中提出的方法，我们分析一下图 8.19 (a) 中的电路. 一个 10,000 欧，1 瓦的电阻器与两个电容为 0.2 和 0.5 微法 (μF) 的电容器相联结. 假设把这个电路插到 120 伏 60 周的插座，问：这个 1 瓦的电阻器会烧坏吗？在探寻 R 上的平均功率损耗是否超过 1 瓦的额定值时，我们先要计算一些预计会在这个电路中测得的电流和电压. 现把在这电路上进行计算的一个方法概括如下：

(i) C_2 的导纳 $= i\omega C_2 = (377)(2 \times 10^{-7})i$

$$= 0.754 \times 10^{-4} i \text{ 欧}^{-1}.$$

(ii) 电阻器的导纳 $= \dfrac{1}{R} = 10^{-4}$ 欧$^{-1}$.

(iii) [R 与 C 并联电路图] 的导纳 $= 10^{-4}(1 + 0.754i)$欧$^{-1}$.

(iv) [R 与 C 并联电路图] 的阻抗 $= \dfrac{1}{10^{-4}(1 + 0.754i)}$

$$= \frac{10^4(1 - 0.754i)}{1^2 + 0.754^2}$$

$$= (6360 - 4800i)\text{欧}.$$

(v) C_1 的阻抗 $= -\frac{i}{\omega C} = -\frac{i}{(377)(5 \times 10^{-7})}$

$$= -5300i \text{ 欧}.$$

(vi) 全电路的阻抗 $= (6360 - 10,100i)$ 欧.

(vii) $I_1 = \frac{120}{6360 - 10,100i} = \frac{120(6360 + 10,100i)}{(6360)^2 + (10,100)^2}$

$$= (5.37 + 8.53i) \times 10^{-3} \text{ 安}.$$

由于我们所用的 120 伏是均方根电压，所以得到的是均方根电流. 即复数 I_1 之模 $[(5.37)^2 + (8.53)^2]^{1/2} \times 10^{-3}$ 安，或 10.0 毫安 (mA)，这是以安为单位的均方根电流. 串接到这个线路中的交流毫安计的读数将为 10mA. 此电流相对于线电压的相角为 $\varphi = -\tan^{-1}(0.853/0.537)$ 或-1.01 弧度. 于是,给予整个电路的平均功率为

(viii) $\bar{P} = (120 \text{ 伏})(0.010 \text{ 安})\cos 1.01 = 0.64$ 瓦.

此电路中，电阻器是唯一的耗功元件，故 $\bar{P}$ 必定是在它上消耗的平均功率. 为了检验,我们可以求出电阻器上的电压 V_2:

(ix) $V_1 = I_1\left(\frac{-i}{\omega C}\right) = (5.37 + 8.53i)(-5300i)10^{-3}$

$$= (4.52 - 28.4i) \text{ 伏}.$$

(x) $V_2 = 120 - V_1 = (74.8 + 28.4i)$ 伏

R 上的电流 I_2 自然与 V_2 同相,故 R 上的平均功率为

$$\bar{P} = \frac{V_2^2}{R} = \frac{(74.8)^2 + (28.4)^2}{10^4} = 0.64 \text{ 瓦} \qquad (67)$$

故验证无误.

可见未超过电阻器的额定值，因而此电阻器可用. 实际上电阻器是否过热不仅取决于消耗在它上面的平均功率，而且也依赖于电阻器是否容易散热. 电阻的功耗额定值只供粗略参考.

习　　题

8.1　120 伏 60 瓦的灯泡应串接多少亨的电感才能跨接到 240 伏，60 周的线路正常工作?（首先确定所需之感抗.可以略去电感器的电阻和电灯泡的电感.）

[R、L 串联]

8.2　2000 欧电阻器与 1 微法电容器串联于 120 伏(均方根值)，60 周的线路.

(a) 阻抗多大?

(b) 电流的均方根值多大?

(c) 电路的功率耗损多大?

(d) 交流伏特计并联在电阻上时的读数多大? 并联在电容器上时的读数是多大?

(e) 一阴极射线管的水平极板跨接在电阻两端，垂直极板跨接于电容两端. 试画出预计会在荧光屏上看到的图式.

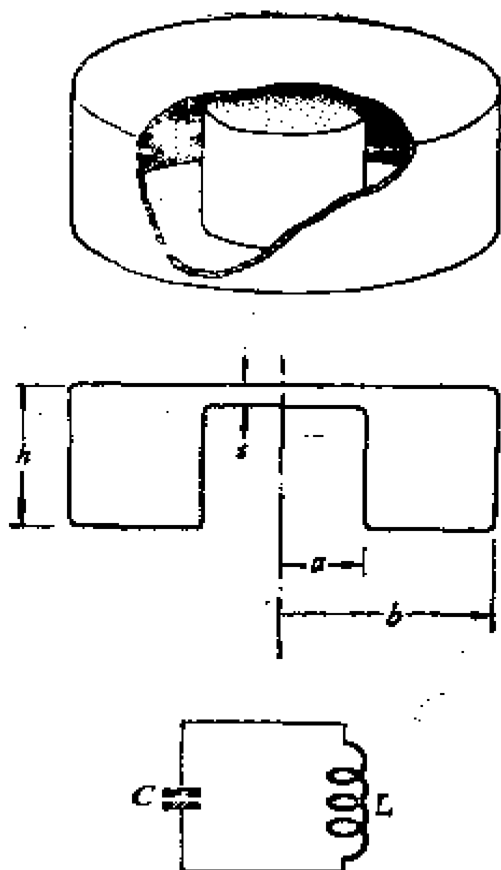
[R、C 串联]

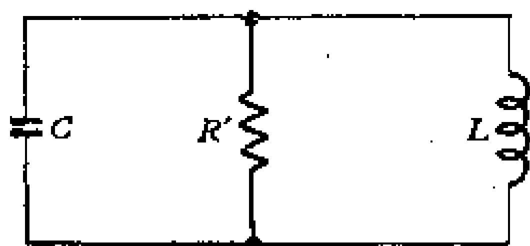
8.3　1000 欧电阻器，500 微微法的电容器和 2 毫亨的电感器并联在一起. 当频率为 10 千周/秒时，此并联电路的阻抗多大? 频率为 10 兆周/秒时阻抗多大? 在什么频率下阻抗之绝对值最大?

[R、L、C 并联]

8.4 图中的共振电路里，功耗元件是与 LC 组合并联(而

不是串联)的电阻器 R'. 试建立适用于此电路的类似式(2)的方程.同样也找出它的与 RLC 串联电路相似的解的形式. 若 RLC 串联电路与$R'LC$ 并联电路之 L, C 及 Q 相同,则 R' 与 R 之关系须如何?





习题 8.4

习题 8.7

8.5 设图 8.1 中的电流由式(12)给出. 计算 $t=0$ 时电路贮存的能量. 然后计算四分之一周期后, 即 $t=\pi/2\omega$ 时, 电路中贮存的能量. 试证明此差值等于在这时间间隔中消耗在电阻器 R 上的能量. 对于这个问题,我们假设阻尼很小,即 $\alpha/\omega \ll 1$ 并忽略正比于 α^2 之量.

8.6 图 8.3(a) 的电路, 对于 $R=600$ 欧的过阻尼情形确定 β_1, β_2 之值. 再确定式(16)中的常数 B 与 A 之比.

8.7 形如图中所示的共振腔是许多微波振荡器的基本组成部分. 它可以认为是一个简单的"LC"电路. 电感就是围成一个圈的圆环的电感; 此电感器直接与平行板电容器相联. 求出此电路共振频率的表达式,并图示电场与磁场的分布情形.

第九章　物质中的电场

9.1 电　介　质

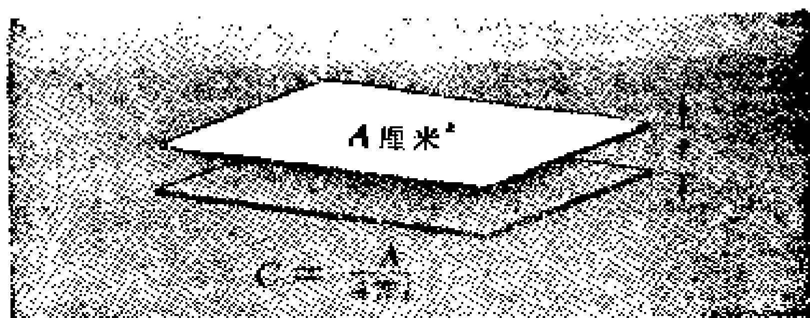
我们在第三章里所讨论的电容器是由两个导体组成的，这两个导体彼此绝缘，在它们中间没有其他东西．由两个导体组成的系统的特性用特定的电容 C 来表征，这个电容 C 是描述在电容器上的电荷 Q 的大小(正电荷 Q 在一个板上，相等的负电荷在另一个板上)和两个导体之间的电势差 V_{12} 的关系的一个常数

$$C=\frac{Q}{V_{12}}. \tag{1}$$

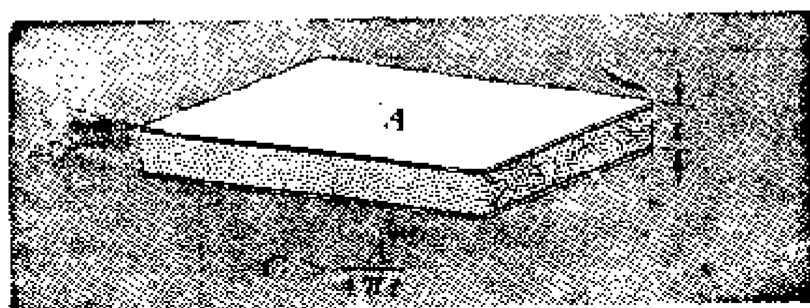
对于平行板电容器，如果两平板的面积各为 A 厘米^2，它们之间的距离为 t，则其电容用下式表示

$$C=\frac{A}{4\pi t}. \tag{2}$$

像这样的电容器能够在某些电气仪器里找到．它们叫做**真空电容器**，由封装在高真空瓶中的平板组成．它们主要应用在有极高的并迅速变化的电势的地方．然而，更常见的电容器，板极间填充了一些不导电的固态或液态物质．在实验室工作中所用的电容器大多数是这类的；在任一电视接收机中，都有几十个这种电容器．对于放在媒质中的导体，式(2)与实验不符合．假设我们在图 9.1(a) 所示的两板之间的空间填充上一块塑料，如图 9.1(b) 所示．用这个新的电容器作实验，我们仍然看到在电荷和电势差之间存在着简单的比例关系，所以我们仍能用式(1)**定义**它的电容．但是我们发现 C 显著地比



(a) 由导电平板作成的电容器.



(b) 上述导体板间放一块绝缘体.

图 9.1

式(2)所预计的大.

不仅在叫做电容器的这种特殊器件中而且几乎在我们周围世界的各处,电场和磁场都存在于有物质的地方,而不是存在于真空之中——即使不是在稠密的物质中至少也是在一种气体中,即空气中. 所有这些都提醒我们,除去第四章我们讨论到电传导的问题外, 实际上我们曾研究过的电磁场都是在空的空间中的, 只有一些点电荷或平滑分布的电荷在空间中. 我们现在须设法了解电场及磁场和大块物质的相互作用.

我们有两条不同的途径. 用大尺度的,即宏观的观点,我们可以看出像图9.1(b)中的塑料块那样的一块均匀物质的存在是怎样影响外面空间的电场的,我们可以测量那里的电场. 我们要找出能恰当地描述在任何导体和绝缘体系统中的这种效应的简单定律. 我们将会发现, 均匀物质的宏观的电学行为确实可以相当简单地、完善地被描述出来. 例如, 为了正

确地给出任何填充了某种材料的电容器的电容，只需在式(2)的右边插入一个反映该特殊材料特性的常数因子 κ. κ 叫做那个物质的*介电常数*，而且当我们讨论该物质在电场中的性质时，我们通常称这物质为*电介质*。一些普通物质的介电常数列于表9.1中。

表9.1 各个物质的介电常数

物 质	状 态	介电常数
空 气	气态，0℃，1大气压	1.00059
氯化氢，HCl	气态，0℃，1大气压	1.0046
水，H_2O	气态，110℃，1大气压	1.0126
	液态，20℃	80
苯，C_6H_6	液态，20℃	2.28
氨，NH_3	液态，−34℃	22
变压器油	液态，20℃	2.24
氯化钠，NaCl	晶体，20℃	6.12
硫磺，S	固态，20℃	4.0
石英，SiO_2	晶体，20℃(⊥光轴)	4.34
	晶体，20℃(∥光轴)	4.27
聚乙烯	固态，20℃	2.25—2.3
氯丁橡胶	固态，20℃	4.1
瓷	固态，20℃	6.0—8.0
石 蜡	固态，20℃	2.1—2.5
派勒克斯(Pyrex)玻璃7070	固态，20℃	4.00

只要把某特定材料的介电常数测出来（或许是通过测量一个填充该材料的电容器的电容而测出的），我们就能不仅预言双板电容器的特性，而且能预言由任意形状的该电介质块和导体所组成的任何静电系统的特性。即给定了某系统的各导体上的电荷或电势，我们就能预言在电介质外面的真空中的一切电场。

使我们能够这样做的理论已由十九世纪的物理学工作者

完全建立起来了. 由于缺乏对物质的原子结构的全面了解,他们不得不在不同程度上采取宏观的描述. 从这个观点来看,电介质的内部是无定形的广阔的非常均匀的"数学上的胶状物". 它和真空在电学性质上唯一区别是它的介电常数不等于一.

如果我们只研究在电场中物质的宏观描述,我们将会发现难于回答某些相当显而易见的问题——或者说,很难把这些问题以适当方式提出来,使其答案能有意义. 例如,当图9.1 (b) 中的板极上有一些电荷的时候,在塑料块里面的电场强度是多大?电场强度是由作用在检验电荷上的力来确定的. 我们怎么能够不干扰任何东西,而把一个检验电荷放在非常稠密的固体里并测量作用在它上面的力呢? 如果我们真的测量出这个力来了,这个力又意味着什么呢? 你可能想到钻一个洞把检验电荷放在洞里,而洞里有足够的空间使检验电荷能来回移动. 这样你就能够测量出这个电荷上的作用力来,像测量自由质点上的作用力一样. 但是你所测量的不是电介质中的电场而是在电介质中的一个空腔里的电场,这完全是两回事.

幸运的是我们可以采用另一种研究方法,它是从微观的,即原子水平上引导出来的. 我们知道物质是由原子和分子构成的,而它们又是由带电的基本粒子组成的. 我们知道关于这些原子的大小和结构的一些情况,我们还知道一些关于它们在晶体、液体和气体中的排列情况. 我们不把电介质描写成无结构的,没有空虚空间的胶状物,而是把它描写为处于真空中的分子的集体. 如果我们能够知道当一个分子整个都在电场中时,这一个分子内的电荷的行为如何,我们就能够知道相距一定距离的两个这样的分子在真空中的行为. 只须计算一个分子产生的电场对另一分子的影响即可. 这是个在真空

中的问题．现在我们应该作的是把这推广到一立方厘米左右的真空中有大约 10^{20} 个分子占据的情形，而这就是实际电介质的情形．我们希望能做到这一点而不至于引起 10^{20} 个独立问题．

如果贯彻这个方案，我们会在两个方面得到好处．最后我们将能对于物质内部的电场和磁场作一些有意义的说明，能回答出像上面提出的那样的问题．更重要的是我们将了解到物质中的宏观的电磁现象是怎样从原子结构的性质产生出来的，并因而揭露作为原子结构的基础的性质．我们将分别地研究电效应和磁效应．我们从电介质开始．因为我们的第一个目的是描述由一个原子或分子产生的电场，所以对于在任何一个小电荷系统外面的静电场，先作一些一般性的研究是有帮助的．

9.2 电荷分布的矩

一个原子或分子是由占据也许是几个立方埃（$10^{-24}cm^3$）的空间小体积的若干电荷组成的．我们关心的是这个体积以外的电场，它是由这个相当复杂的电荷分布产生的．我们将特别地讨论远离场源处的电场，这里远离指的是和场源本身的大小相比，离得很远．电荷结构的哪些主要特性决定远处的电场呢？为了回答这个问题让我们考察一下某一任意电荷分布，并且想一想我们如何着手计算在这电荷分布以外的一点的电场．图 9.2 表示在坐标原点附近的某种电荷分布．它可能是由几个正的原子核和许多电子组成的一个分子．在任何场合，我们都假设它是由一个给定的电荷密度函数 $\rho(x,y,z)$ 来描述的．在电子所在的地方 ρ 是负的，在原子核所在的地方 ρ 是正的．为了求远处的电场，可先从计算这样的电荷分布的电势开始．例如，我们在 z 轴上取某点 A．(因为我们并

不假设电荷分布有任何特殊对称性，z 轴一点也不特殊）令 r 是从原点到 A 点的距离.

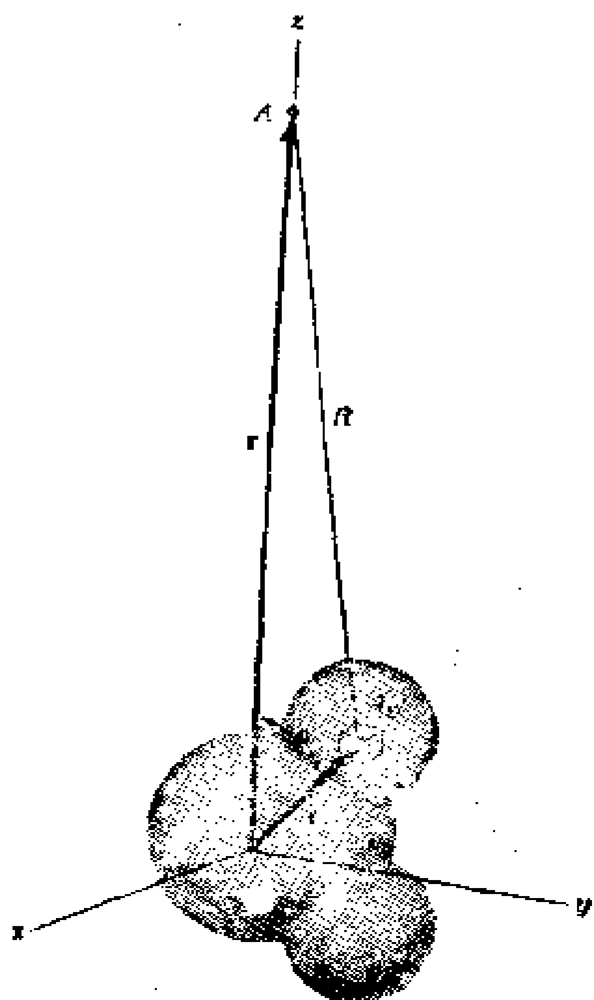


图 9.2 计算一个分子的电荷分布在某一点 A 的电势.

A 点的电势用 φ_A 表示，按照通常的方法，把电荷分布的所有部分的贡献相加，得出

$$\varphi_A=\int\frac{\rho(x',y',z')dv'}{R}. \tag{3}$$

在积分中，dv' 是电荷分布中的一个体积元，$\rho(x',y',z')$ 是该处的电荷密度，分母中的 R 是从 A 到这个特定的电荷元的距离. 自然，对 x'，y'，z' 坐标进行积分，包括含有电荷的全部区域. 我们能用 r 和从原点到电荷元的距离 r' 表示 R. 令 θ 表示 $\mathbf{r}'$ 和 A 所在的轴之间的夹角，应用余弦定律可得

$$R=[r^2+r'^2-2rr'\cos\theta]^{1/2}. \tag{4}$$

用此式代替 R，则上述积分成为

$$\varphi_A=\int\rho dv'[r^2+r'^2-2rr'\cos\theta]^{-1/2} \tag{4a}$$

现在我们要利用这样一个事实，即像 A 那样远的一个点，对于电荷分布的各部分来说，r' 总是比 r 小得多. 这就提示我们应当把方程 (4) 中的平方根展开成 r'/r 的幂级数. 写

$$[r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta]^{-1/2} = \frac{1}{r}\left[1 + \left(\frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r'}{r}\cos\theta\right)\right]^{-1/2}, \tag{5}$$

并且应用展开式 $(1+\delta)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}\delta + \frac{3}{8}\delta^2 \cdots$，将含有 r'/r 的相同幂次的项集合起来以后，我们得到

$$[r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta]^{-1/2}$$
$$= \frac{1}{r}\left[1 + \frac{r'}{r}\cos\theta + \left(\frac{r'}{r}\right)^2(3\cos^2\theta - 1) + \left(\begin{matrix}\text{更高幂}\\\text{次项}\end{matrix}\right)\right]. \tag{6}$$

在积分中 r 是一个常数，所以我们可以把它搬到积分号外面，并把在 A 点的电势的表示式写为

$$\varphi_A = \underbrace{\frac{1}{r}\int \rho dv'}_{K_0} + \underbrace{\frac{1}{r^2}\int r'\cos\theta\rho dv'}_{K_1}$$
$$+ \underbrace{\frac{1}{r^3}\int r'^2(3\cos^2\theta - 1)\rho dv'}_{K_2} + \cdots. \tag{7}$$

上面的每个积分 K_0，K_1，K_2 等的值都只决定于电荷分布的结构。所以对在 z 轴上的所有各点的电势，可以写为 $1/r$ 的幂级数，其系数为常数：

$$\varphi_A = \frac{K_0}{r} + \frac{K_1}{r^2} + \frac{K_2}{r^3} + \cdots. \tag{8}$$

为了完全解出这个问题，我们还必须求出在其他各点的电势，以便用 $-\text{grad}\varphi$ 计算电场。然而，现在我们已经谈得够多，足以阐明本质问题了：在离场源很远地方的电势的性质主要决定于这个级数中的第一个系数不为零的项。

让我们更细致地考察一下这些系数。系数 K_0 是 $\int\rho dv'$，它只不过是电荷分布中的全部电量。如果像在一个中性分子里那样，电荷分布中有电量相同的正电荷和负电荷，K_0 将等

于零. 对于一个单电离的分子, K_0 将等于 e. 若 K_0 不等零，则无论 K_1, K_2 等是多么大，在距原点足够远的地方，K_0/r 项将能代表整个级数. 超出这个距离，这个电荷分布的电势将趋近于在原点的一个点电荷的电势，电场也是这样. 这是不足为奇的.

假设我们有一个中性分子，因而 K_0 是零. 于是我们就要关心第二项，它的系数是 $K_1 = \int r'\cos\theta\rho dv'$. 因为 $r'\cos\theta$ 就是 z'，这一项是正电荷和负电荷在 A 的方向的相对位移. 在图 9.3 中把正电荷密度和负电荷密度分开画出的，K_1 是一个非零的值. 实际上，图中所画的各个分布，K_1 的值几乎相同.

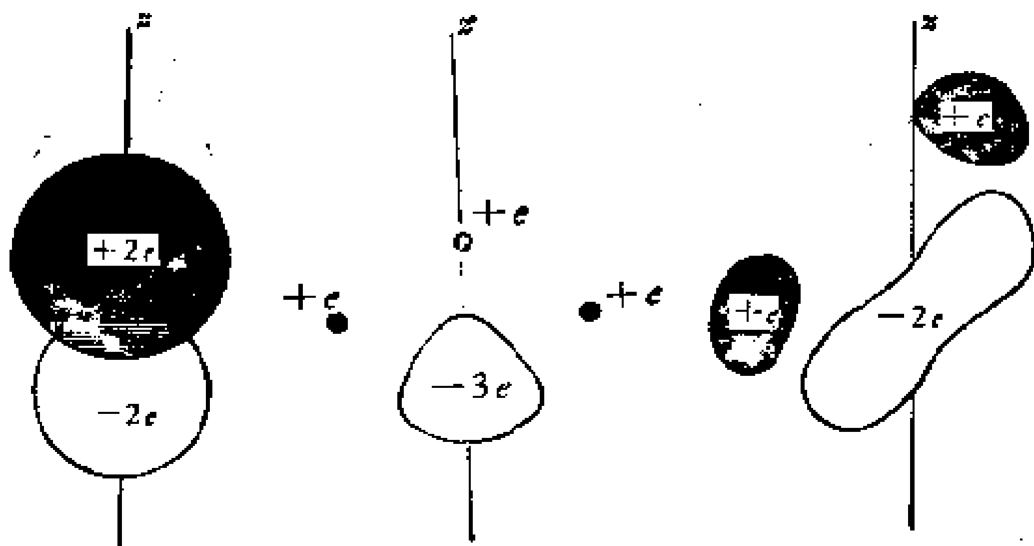


图 9.3　具有 $K_0 = 0$, $K_1 \neq 0$ 的一些电荷分布. 即每个分子的净电荷是零，但是偶极矩不是零.

值得注意的是，如果分布是中性的，则 K_1 的值和原点的位置无关. 这就是说，如果我们用 $(z' + z'_0)$ 代替 z'，这样作实际上是移动了原点，积分的值并不改变：$\int(z' + z'_0)\rho dv' = \int z'\rho dv' + z'_0\int\rho dv'$，对于中性的分布最后一个积分总是为零的.

显然如果 $K_0 = 0$ 而 $K_1 \neq 0$，则沿 z 轴的电势将渐近地（距离越大近似越好）按 $1/r^2$ 变化. 于是我们预期电场强度渐近地按 $1/r^3$ 变化，这和点电荷的电场按 $1/r^2$ 变化不同. 当

然，我们讨论的只是 z 轴上的电势。对情况有了一般理解之后，我们再回来研究电场的准确形式问题。

如果 K_0 和 K_1 都等于零，而 K_2 不等于零，在远处的电势将按 $1/r^3$ 变化，电场强度将按距离的四次方减弱。图 9.4 表示一种电荷分布，此种分布的 K_0 和 K_1 都是零(不管 z 轴选在什么方向，K_0，K_1 都将是零)而 K_2 不是零。

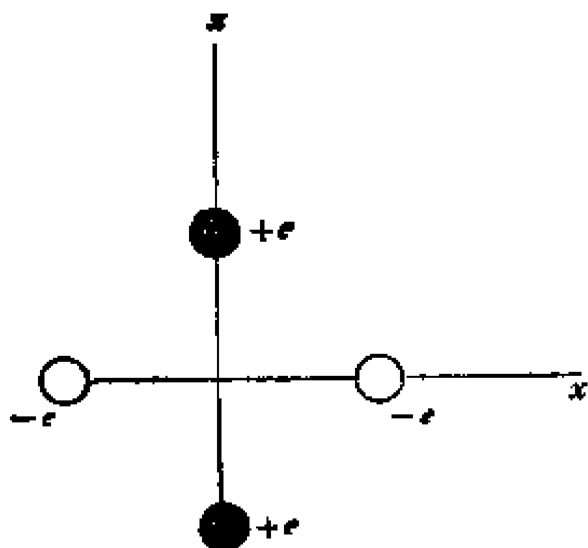


图 9.4 对于这种电荷分布，$K_0 = K_1 = 0$ 但 $K_2 \neq 0$。它是一个具有非零的四极矩的分布。

量 K_0，K_1，$K_2 \cdots$ 和所谓的电荷分布的**矩**有关系。应用这一术语，我们把 K_0(它仅是净电荷)叫做**单极矩**或**单极强度**。K_1 是这个分布的**偶极矩**的一个分量。偶极矩的量纲是电荷乘位移；它是一个矢量，我们的 K_1 是它的 z 分量。第三个常数 K_2 和电荷分布的**四极矩**有关系，下一个和**八极矩**有关系等等[1]。

采用这种矩的谱系来描述电荷分布的好处是：从电荷分布的各种性状中，它正好挑选出了那些决定远处电场的特殊性状。如果我们只关心在电荷分布的近邻的电场，这将是一个无益的练习。对于我们了解在电介质中会发生什么现象这一主要任务来说只有分子组合体的单极强度(净电荷)和偶极

1) 可以证明，如果将场源完全分解成各种多极子，就唯一地确定了电荷分布。换句话说，如果我们知道所有的多极子强度我们就能“在原则上”推导出 $\rho(x', y', z')$ 来。但这不是很有用的。顺便指出，四极矩和更高的矩不是矢量而是更复杂的实体。

强度起重要作用。我们可以忽视一切其他的矩。如果分子组合体是中性的，我们只须考虑它们的偶极矩。

9.3 偶极子的电势和电场

偶极子对于在距原点为 r 的 A 点的电势的贡献是 $(1/r^2)\int r'\cos\theta\rho dv'$。$r'\cos\theta$ 正好是 $\mathbf{r}'$ 在向 A 的方向上的投影，可以写作 $\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'$。这样我们无须参考任何坐标轴就可以把电势写成

$$\varphi_A=\frac{1}{r^2}\int\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'\rho dv'=\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\cdot\int\mathbf{r}'\rho dv', \qquad (9)$$

这式可以用来给出任意点的电势。在式(9)的右边的积分是电荷分布的偶极矩。它显然是一个矢量，具有电荷乘距离的量纲。我们用 $\mathbf{p}$ 表示偶极矩矢量

$$\mathbf{p}=\int\mathbf{r}'\rho dv'. \qquad (10)$$

利用偶极矩 $\mathbf{p}$ 我们能将式(9)再写成

$$\varphi(r)=\frac{\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{p}}{r^2}. \qquad (11)$$

电场是电势的负梯度。为了知道偶极子场是什么样子，在原点放一个偶极子 $\mathbf{p}$，使其指向 z 方向[图(9.5)]。在这样安排下，

$$\varphi=\frac{p\cos\theta}{r^2}. \qquad (12)$$

电势和电场自然是围绕 z 轴对称的。现在我们在 xz 平面中进行计算，这里 $\cos\theta=z/(x^2+z^2)^{1/2}$。在这个平面中

$$\varphi=\frac{pz}{(x^2+z^2)^{3/2}}. \qquad (13)$$

可以容易地得出电场强度沿 x，z 轴的分量为

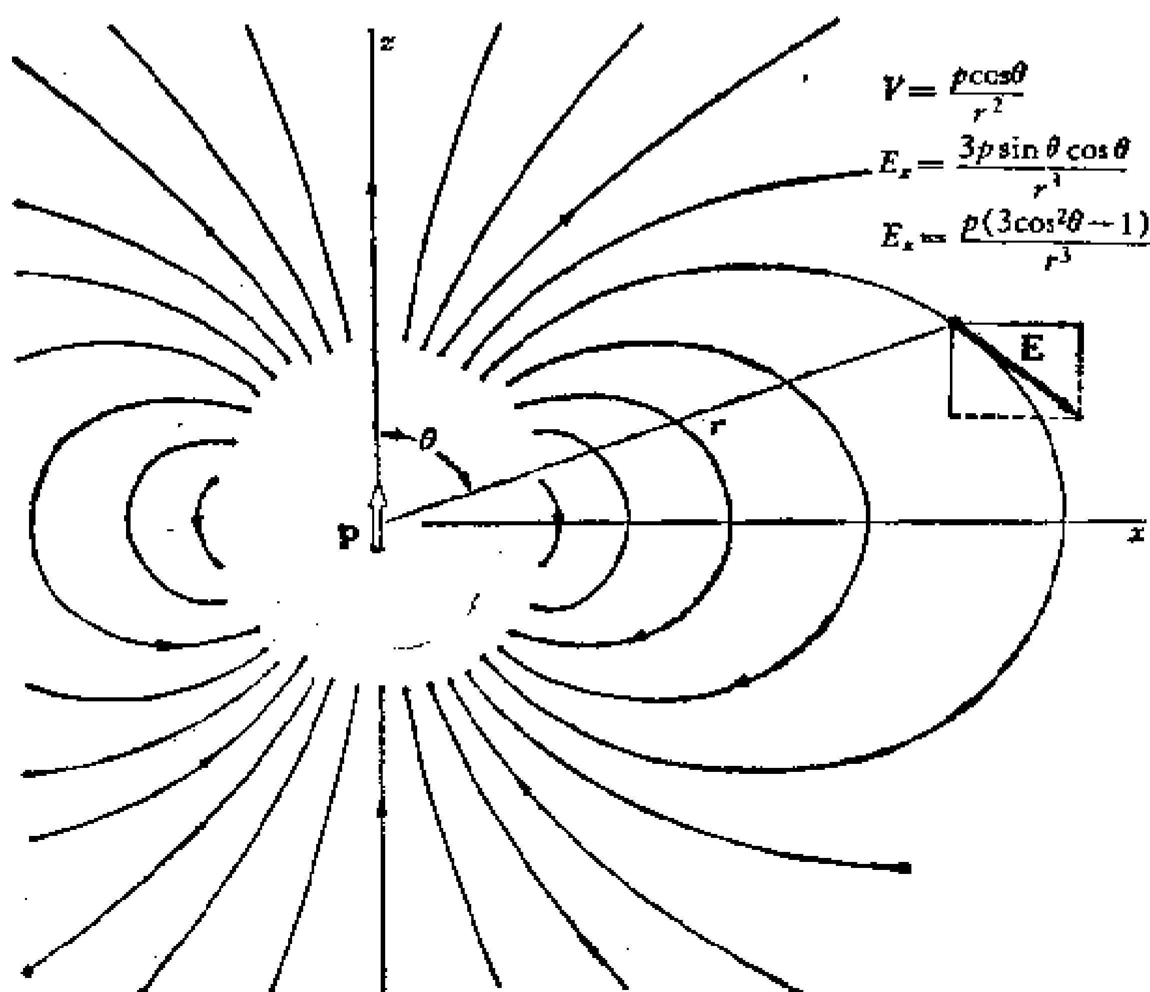


图 9.5　一个偶极子的电场，用一些电力线表示出来.

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{3pxz}{(x^2+z^2)^{5/2}} = \frac{3p\sin\theta\cos\theta}{r^3}$$

$$E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = p\left[\frac{3z^2}{(x^2+z^2)^{5/2}} - \frac{1}{(x^2+z^2)^{3/2}}\right]$$

$$= p\frac{(3\cos^2\theta - 1)}{r^3}. \tag{14}$$

从偶极子沿任何方向向外我们发现电场强度按 $1/r^3$ 减少，正如我们曾预料到的. 沿着 z 轴的电场和偶极矩 $\mathbf{p}$ 平行，其值为 $2p/r^3$. 在赤道平面上，电场的方向是 $\mathbf{p}$ 的逆平行方向，其值为 $-\mathbf{p}/r^3$.

这个电场可能使我们想起以前曾经遇到过的一个电场.

我们还记得在导体平面上方的一个点电荷和它的“镜象电荷”。大概具有偶极矩的最简单的电荷分布是相距 s 远的两个点电荷，$+q$ 和 $-q$。对于点电荷系统，式(10)用求和的形式。这一对点电荷的偶极矩正好是 qs，并且矢量的方向是从负电荷指向正电荷的。在图 9.6 中我们画出了这一对电荷的电场，主要是为了强调在电荷附近的电场不是一个偶极子场。这一电荷分布有许多个多极矩，实际上有无穷多个；所以只有在距离 $r \gg s$ 的“远处场”才能视为一个偶极子场。

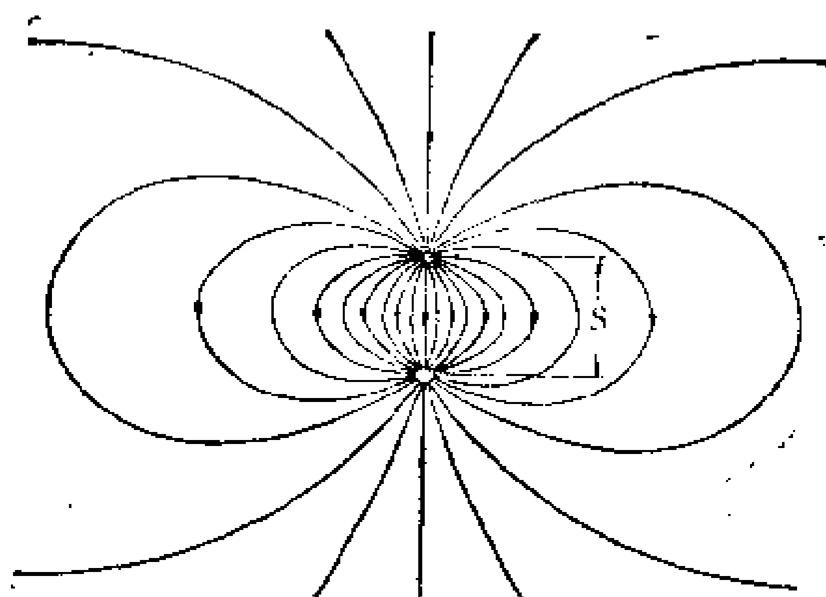


图 9.6　一对电量相等符号相反的点电荷的电场，对于在比间距 s 大得多的远距离处，近似于一个偶极子的电场。

为了产生一个一直到原点还准确的，完全的偶极子场，我们必须使 s 缩小到零，同时使 q 无限增加，以便保持 $p = qs$ 为一定值。这种高度奇特的抽象不是很有意义的。我们知道分子电荷分布的近处场是复杂的，所以在任何情形下我们都不能容易地描画出近区域的电场。幸运地是我们不需要这样做。

9.4 偶极子在外电场中所受的力矩和力

假设两个电荷 q 和 $-q$ 机械地连结在一起，使它们之间的距离 s 固定不变．可以想像电荷是被固定在一条长度为 s 的不导电的短棒的两端．我们把这个物体叫做偶极子．它的偶极矩 p 就是 qs．让我们把这个偶极子放在一个外电场中，即放在一个由另外一些场源产生的电场中．现在我们不考虑偶极子本身的电场．首先考虑一个均匀的，如图 9.7 (a) 中的电场．偶极子的正端受一向右的拉力 Eq，负端受一向左的拉力 Eq．作用在这个位置上的偶极子上的净力和转矩都是零．象图 9.7 (b) 中的偶极子，和电场方向成角度 θ，显然受到一个转矩的作用．通常转矩 $\mathbf{N}$ 是 $\mathbf{r}\times\mathbf{F}$，这里 $\mathbf{F}$ 是作用在距原点 $\mathbf{r}$ 处的力．（卷 I，第 6 章）．取偶极子的中心为原点，故 $r=s/2$，我们有

$$\mathbf{N}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}_{+}+(-\mathbf{r})\times\mathbf{F}_{-}. \tag{15}$$

$\mathbf{N}$ 是一个和图面垂直的矢量，它的大小是

$$N=\frac{s}{2}Eq\sin\theta+\frac{s}{2}Eq\sin\theta=sqE\sin\theta=pE\sin\theta. \tag{16}$$

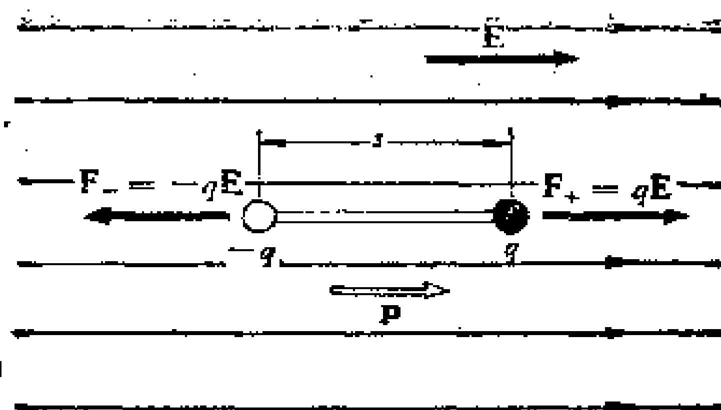
这可简单地写成

$$\mathbf{N}=\mathbf{p}\times\mathbf{E}. \tag{17}$$

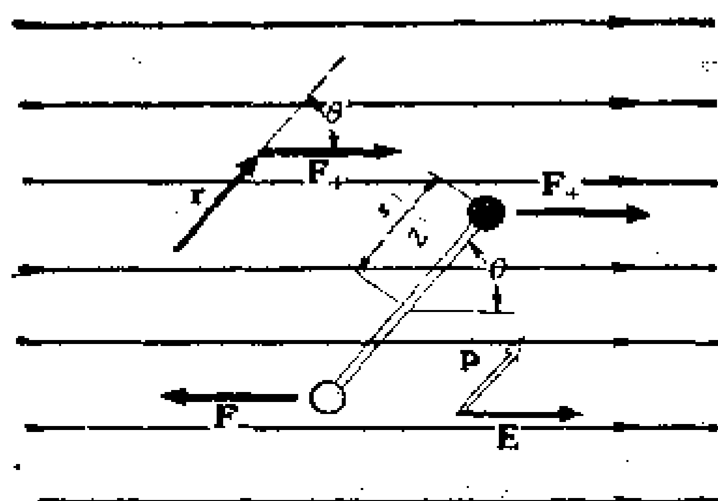
偶极子在图 9.7 (a) 中的方位时，能量最低．把它转动到任何其他位置都必须对它作功．我们现在计算一下，将偶极子从和电场平行的位置转到某角度 θ_0 所需要的功，如图 9.7(c) 所示．转过无穷小的角度 $d\theta$ 所需的功是 $Nd\theta$．因此，所作的总功是

$$\int_0^{\theta_0}Nd\theta=\int_0^{\theta_0}pE\sin\theta d\theta=pE(1-\cos\theta_0). \tag{18}$$

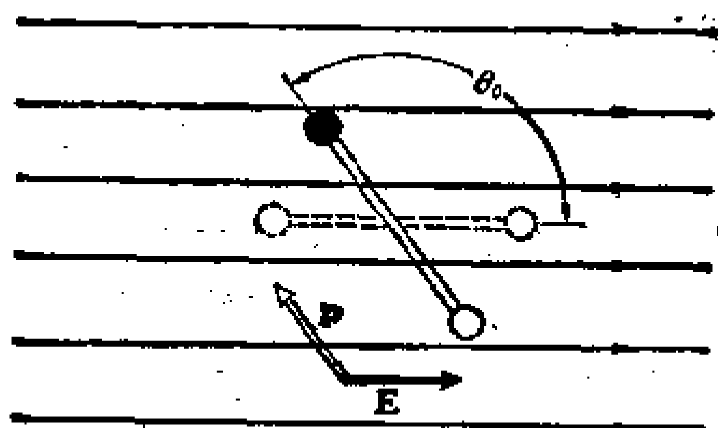
将偶极子反转，把它倒个头，这相当于 $\theta_0=\pi$，所需的功等于



(a) 在均匀电场中的一个偶极子.



(b) 作用在偶极子上的转矩是 $\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$;
N是指向书面的一个矢量.



(c) 将偶极子的方位从和电场平行的方向转到图中所表示的方向，所作的功是 $pE(1 - \cos\theta_0)$。

图 9.7

$2pE$.

偶极子在任何均匀电场中所受的净力，不论其取向如何，显然为零．在不均匀的电场中，作用在偶极子的两端上的力一般不正好是大小相等，方向相反的，而是有一净力作用在偶极子上．偶极子在一个点电荷 Q 的电场中便是一个简单的例子．如果偶极子的方向是径向的，象在图 9.8(a) 中的那样，其正端靠近正电荷 Q，则净力是向外的，它的大小是

$$F=(q)\frac{Q}{r^2}+(-q)\frac{Q}{(r+s)^2}. \tag{19}$$

在 $s \ll r$ 的情形下，我们只须计算到 s/r 的第一阶，方法如下：

$$F=\frac{qQ}{r^2}\left[1-\frac{1}{\left(1+\frac{s}{r}\right)^2}\right] \approx \frac{qQ}{r^2}\left[1-\frac{1}{1+\frac{2s}{r}}\right]$$

$$\approx \frac{2sqQ}{r^3}. \tag{20}$$

用偶极矩 p 表示，则可简单地写为

$$F=\frac{2pQ}{r^3}. \tag{21}$$

偶极子和电场垂直时，如图 9.8 (b) 所示，也受一个作用力．现在作用在两端的力虽然大小相等，但方向不是恰好相反的．

我们不难求出偶极子在不均匀电场中所受的力的普遍公式．这力从本质上说，决定于电场强度的各分量的梯度．概括地说，作用在偶极矩为 $\mathbf{p}$ 的偶极子上的力的 x 分量是

$$F_x=\mathbf{p}\cdot \operatorname{grad} E_x. \tag{22}$$

对于 F_y 和 F_z 也有相应的公式．

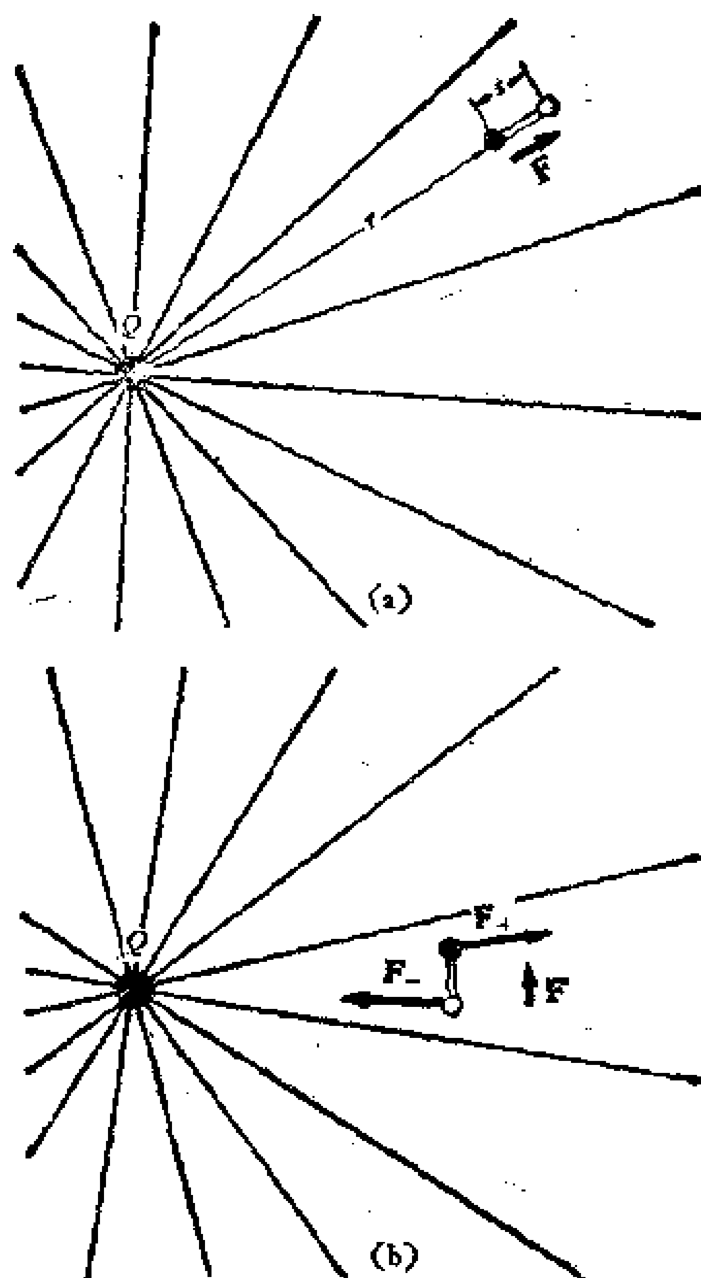


图 9.8　在不均匀的电场中，作用在偶极子上的力．(a) 在这个位置上的偶极子所受的净力是径向地向外的．(b) 在这个位置上的偶极子所受的净力是向上的．

9.5　原子的和分子的偶极子；感生偶极矩

在描述一个原子或分子中的电荷分布时，我们不得不用经典的术语来描述量子力学的系统．并且把在某种意义上，有连续运动的质点的结构当作静态结构来处理．本教程的后

期，在卷 IV 中，将会看到量子力学是怎样来描述的，远没有否定我们现在所要描写的图象，而且还再一次证明它的正确性。

考虑最简单的原子，氢原子．它是由一个原子核和一个电子组成的．如果想像带负电的电子像行星绕太阳一样地绕着正原子核旋转——象最初的玻尔原子模型中所描述的那样——你将断定这个原子在任何时刻都有一电偶极矩．这个偶极矩矢量 $\mathbf{p}$ 的方向和电子到质子的矢径平行，它的大小是 e 乘上电子和质子间的距离．当电子绕它的轨道运行时，这个矢量的方向是在连续地迅速地改变着．诚然，对于圆形轨道来说，$\mathbf{p}$ 的时间平均值是零，但是我们应当预料到周期性变化的偶极矩分量将产生迅速振荡的电场和电磁辐射．常态的氢原子没有这样的辐射是早期量子物理不能解释的矛盾之一．现代量子力学告诉我们，最好认为处于最低能态的氢原子(宇宙中的大多数氢原子的常态)是球形对称的结构，其电子的电荷，按时间平均来说，是分布在围绕原子核的电子云里．没有什么在旋转或振动．如果我们能拍一个快照，曝光时间短于 10^{-16} 秒，我们就可能辨认出在离原子核某一距离处有一个电子．但是对于在比这长得多的时间过程中，实际上有一围绕原子核的均匀的负电荷分布，并且分布密度在各方向上不断减小．在这个分布中的全部电荷正好是一个电子的电荷 $-e$．大约有一半电荷在半径为 0.5 埃(0.5×10^{-8} 厘米)的球中．密度向外按指数律减小；半径只为 2.2 埃的球中就包含这个电荷的百分之九十九．

对于其他原子和分子最好采用相似的图象．我们可以将分子中的原子核当作点电荷看待；对于我们现在的研究目的来说它们的尺寸是小得无须考虑的．分子的全部电子结构可以看作是密度平滑变化的负电荷云．云的形状以及其中的电

荷密度的变化，对于不同的分子来说自然是不同的. 但是在云的边缘，密度总是按指数律减少的，所以谈到分子的电荷分布的大小和形状是有一定意义的.

图 9.9 表示常态氢原子中的电荷分布. 它是通过球形对称的电荷云的一个横截面，分布密度由浓淡程度表示. 显然这样的电荷分布的偶极矩是零.不管有多少电子，任何原子在最低能态都是这样，因为所有在这样能态下的原子的电子分布都是球形对称的. 对于任何电离了的原子，也是这样的，虽然是一个离子，必然有一个“单极矩”，也就是说有一净电荷.

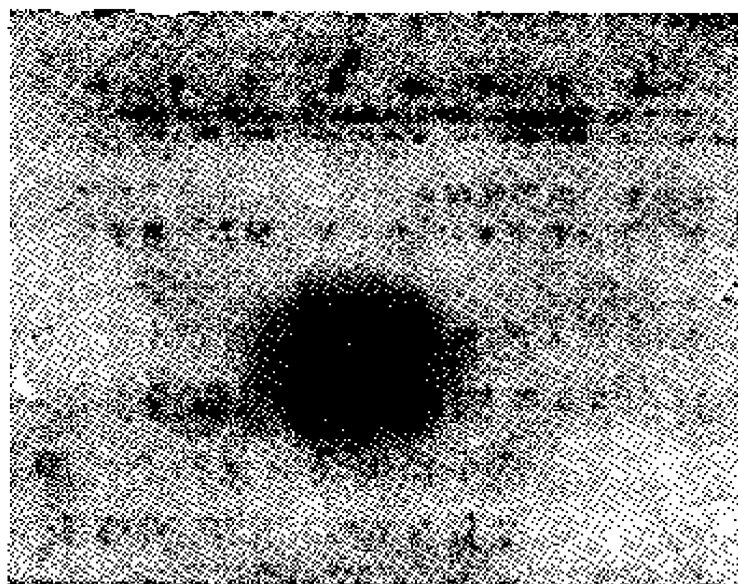


图 9.9 在常态下的氢原子中，按时间平均的电荷分布. 浓淡程度表示电子的(负的)电荷密度.

到目前为止，我们还没讲到有重要意义的内容. 但是现在让我们将氢原子放在一个由某外源提供的电场中，如图 9.10 所示. 电场使原子畸变，将负电荷向下拉，将正原子核向上推. 因为正电荷的“重心”和负电荷的“重心”不再重合，所以畸变后的原子有一个电偶极矩.

我们可以用一个简易的氢原子模型来估计一下预期的畸变量的数量级. 假设在没有电场的情形下，负电荷 e 以均匀

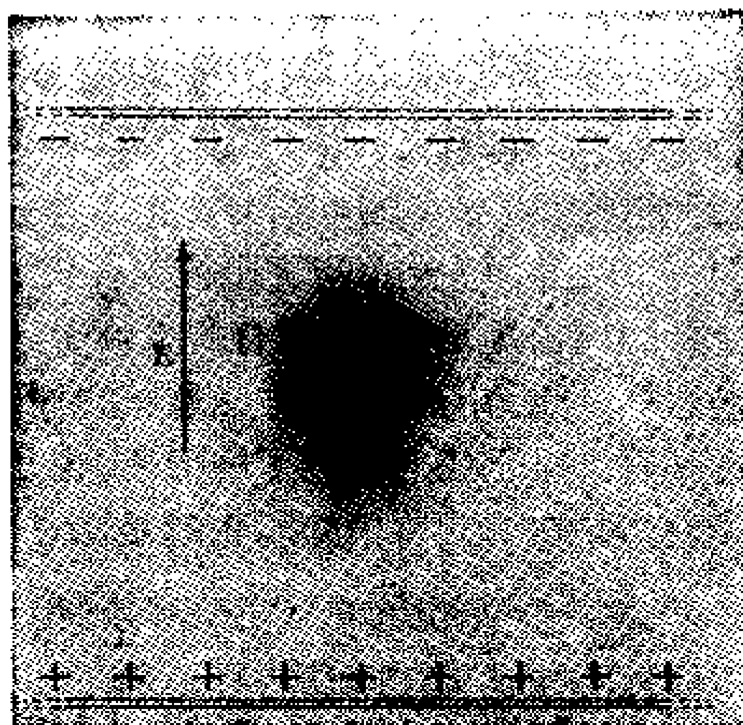


图 9.10　在一电场中负电荷被拉向一方，正原子核被拉向另一方。当达到平衡时，原子发生轻微地畸变。

的密度分布在半径为 a 的整个球中，在球外的密度为零。图 9.11 粗略地代替图 9.9 中的真实分布。假设当加一电场 $\mathbf{E}$ 时，这个负电荷球保持它的原来形状和密度只是相对于原子核有一位移，在原子核和球心的距离为 b 处停止（图9.12）。在平衡时，电场 $\mathbf{E}$ 作用在原子核上的向上的 eE 达因的力必定为负电荷云作用在原子核上的向下的引力所平衡，负电荷云将原子核向它的中心拉。为了求这一向下力的大小，使我们想起在球形电荷分布里，在距中心 b 厘米处的一点的电场只是由半径为 b 的球内的电荷产生的。在这情形，因为 e 是在半径为 a 的球中的电量，在半径为 b 的球中的电量是 $(b/a)^3e$。在原子核

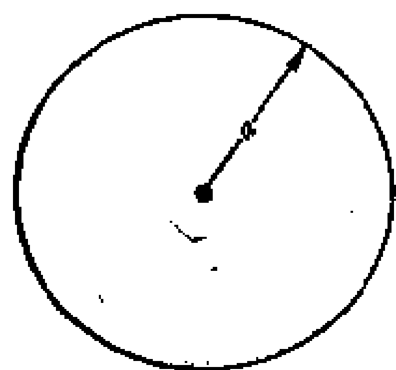


图 9.11　一个粗略的原子模型。负电荷以均匀的密度充满以原子核为中心，a 为半径的球。

的位置，由电子云产生的电场是$(1/b^2)e(b/a)^3$或eb/a^3. 令这个电场强度等于外加的电场强度 E，就得出平衡条件

$$E=\frac{eb}{a^3},\ \text{从而}\ b=\frac{a^3E}{e}. \tag{23}$$

这里，取整数，我们令 a 为 1 埃，即 10^{-8} 厘米. 我们曾提出过，一个半径这样大的球能包含实际分布中的大部分电荷. 我们试用 100 静伏/厘米的 E. 它等于 30,000 伏/厘米，对于实验室中常用的电场来说，这是一个很强的电场. 按照这些假设，式(23)给出 b 值为 2×10^{-13} 厘米. 畸变是很小的. 位移大约是原子半径的 10^{-5}，不比原子核的半径大多少. 由此引起的电偶极矩是 eb. 所以在这个模型中偶极矩和外加电场之间的关系是

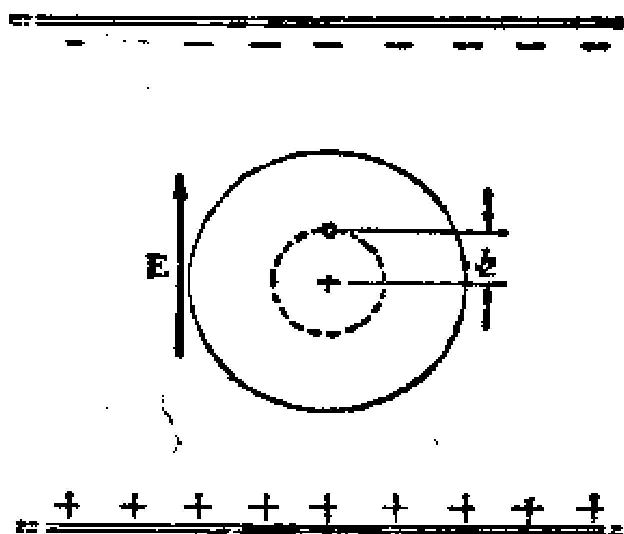


图 9.12 在外加电场中的平衡状态，原子核和负电荷球的中心相距 b.

$$p=eb=a^3E. \tag{24}$$

偶极矩矢量的方向是向上的，就是说，和电场在同一方向.

请注意，偶极矩和外加电场简单地成正比. 我们可以预期在真实的原子中这也是正确的，至少对于小的畸变是这样，并且我们的计算有力地提示，任何实验室中常用的电场仅能极轻微地干扰原子. 任何原子都可以用这种方式极化. 我们说，偶极矩是由电场 $\mathbf{E}$ 感生的. 我们发见，在一切情形下，$\mathbf{p}$ 都是和 $\mathbf{E}$ 成正比的

$$\mathbf{p}=\alpha\mathbf{E}, \tag{25}$$

常数 α 表示原子的一种性质，叫做原子的极化率.

对于我们的氢原子模型来说，极化率 α 等于 a^3. 要注意，α 具有体积的量纲. 精确的量子力学计算预言，氢原子极化率，$\alpha=(9/2)a_0^3$，其中 a_0 是“玻尔半径”，0.52×10^{-8} 厘米，它是常态氢原子结构中的特征距离. 现将用实验方法测出的几种原子的电极化率列于表 9.2 中. 表中给出的元素是按照

表 9.2 原子极化率，单位是 10^{-24} 厘米^3

元素	H	He	Li	Be	C	Ne	Na	A	K
$\alpha=$	0.66	0.21	12	9.3	1.5	0.4	27	1.6	34

电子数递增的次序排列的. 要注意 α 的变化很大. 如果你熟悉元素的周期表，你可以在这里看出某些有系统的东西. 周期表第一行的氢和碱金属，锂、钠、钾的 α 值大，并且从氢到钾，这些值随原子序数的增加而逐渐地增加. 惰性气体的原子极化率小得多，但是在这一族里从氦到氖再到氩，原子极化率的值也是增加的. 显然碱金属的原子，作为一族，是容易被电场变形的，而惰性气体原子的电子结构则刚硬得多. 正是碱金属原子结构中的束缚得很松的外部电子，即“价”电子，是碱金属原子的易于极化的原因.

分子受电场作用时，也产生感生偶极矩. 在图 9.13 中的甲烷分子是由四个氢原子和一个碳原子构成的，四个氢原子排列在四面体的四个角上，碳原子在四面体的中心. 由实验确定，它的电极化率是

$$2.6\times10^{-24}\ 厘米^3.$$

把这个值与一个碳原子及四个孤立的氢原子的极化率的总和相比较是有意义的. 从表 9.2 中的数据可得 $\alpha_C+4\alpha_H=4.1\times10^{-24}$ 厘米^3. 显然原子结合成分子要少许改变电子的结构. 化学家早就应用测量原子和分子的极化率的方法作为研究分子结构的线索.

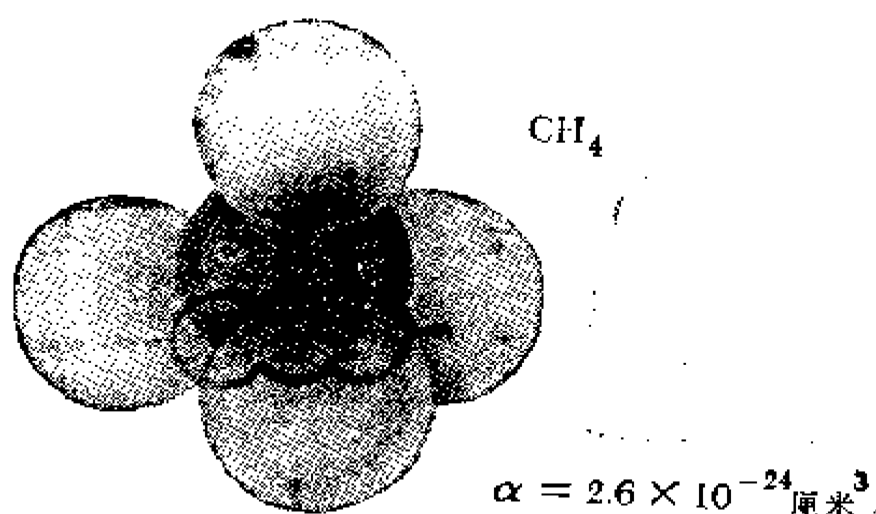


图 9.13　由四个氢原子和一个碳原子构成的甲烷分子.

9.6　极化率张量

分子必然不如原子那样地对称．这样引起了感生的偶极矩和感生它的电场不相平行的可能性． 考虑二氧化碳分子．它是一个线形的“雪茄烟状的”分子，它的组成原子的排列如图 9.14 (a) 所示．如果这个电子结构对纵向和横向形变的抵抗是同样刚硬的，那将是令人惊异的．一般地说，我们可以预料到，和分子轴平行的外加电场所引起的感生偶极矩和由与分子轴垂直的同一强度的外加电场所引起的偶极矩的大小是不同的．确实，对于和轴平行的外加电场，测出的 CO_2 分子的极化率是 4.05×10^{-24} 厘米^3，而对于横向电场，测出的极化率比这个值的一半还小一点．这个分子有两个极化率．我们可以用 $\alpha_\parallel$ 和 $\alpha_\perp$ 表示它们．如果我们施加某一其它方向的电场象图 9.14 (b) 中的那样，会发生什么情况呢？这很容易估计，因为我们讨论的是线性[1] 现象(效果和原因成正比)，所以可以应用叠加原理． 我们可将电场 **E** 分解成和分子轴平行的及

1) 我们也正在讨论一个线形的分子(原子排列成一条直线)！当然，线性的和线形的有完全不同的意义．在英文中“线性的”和线形的是同一个词“Linear”.

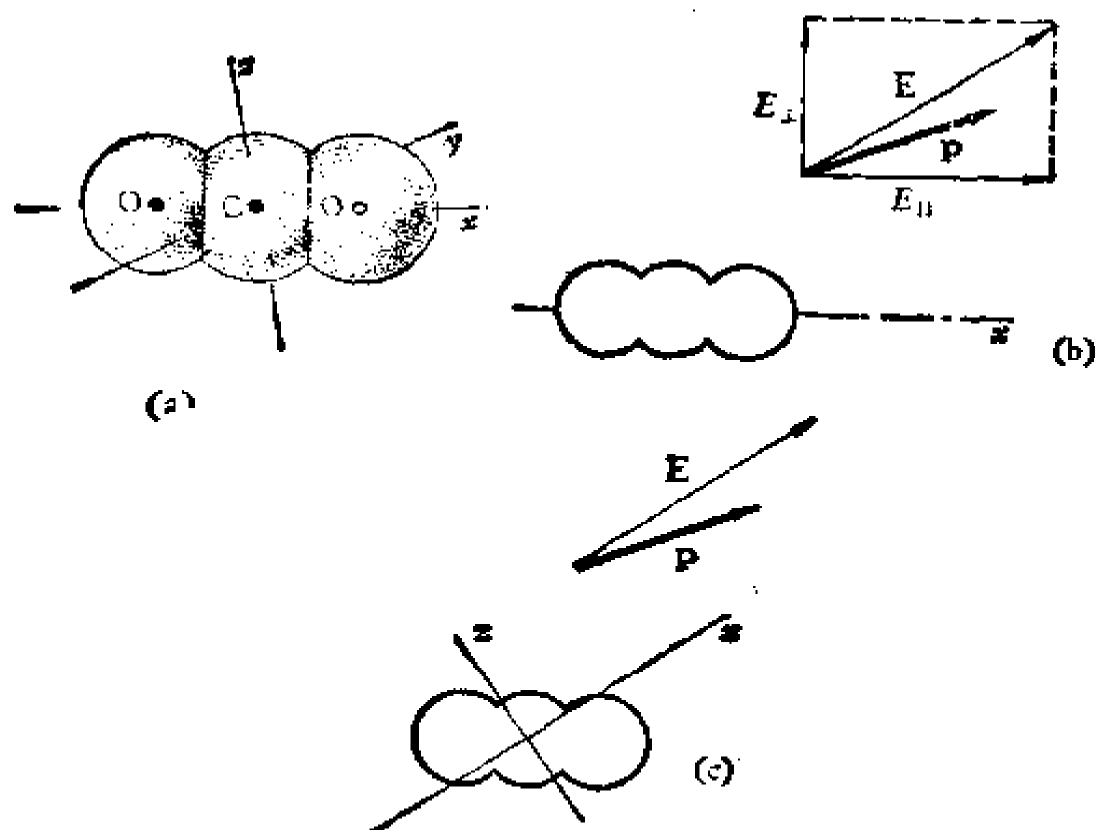


图 9.14 (a) 二氧化碳分子沿着和它的长轴平行的方向比沿着和长轴垂直的方向容易极化. (b)这就是,外加电场的分量 $E_\parallel$ 的效应比 $E_\perp$ 的效应大. (c)因此,感生的极化 **p** 不和外电场 **E** 平行.

和分子轴垂直的分量. $E_\parallel = E\cos\theta$, $E_\perp = E\sin\theta$. 可以设想这些分量分别地起作用,然后再将所引起的偶极矩矢量合起来. $E_\parallel$ 感生一个沿着分子轴的矩,它的大小是

$$p_\parallel = \alpha_\parallel E_\parallel = \alpha_\parallel E\cos\theta.$$

$E_\perp$ 引起一个和轴垂直的矩,

$$p_\perp = \alpha_\perp E\sin\theta.$$

这些合成起来就是原来电场 **E** 所引起的偶极矩 **p**. 如果

$$\alpha_\parallel \neq \alpha_\perp,$$

则偶极矩矢量 **p** 不平行于 **E**. **p** 的方向更接近于容易极化的方向. (对于这种性质你能想出一个力学上的模拟么?)

这个例子说明,分子的极化率不是一个简单的数值标量,

而是一组系数，它们表示一个矢量的各分量对另一个矢量的各分量的线性相关，在这个例子里是 $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{E}$ 的分量的线性关系．这样的一组系数叫做一个张量．这种最一般的关系式含有九个系数，并且可写成下列形式

$$
\begin{aligned}
p_x &= \alpha_{xx}E_x + \alpha_{xy}E_y + \alpha_{xz}E_z,\\
p_y &= \alpha_{yx}E_x + \alpha_{yy}E_y + \alpha_{yz}E_z,\\
p_z &= \alpha_{zx}E_x + \alpha_{zy}E_y + \alpha_{zz}E_z,
\end{aligned}
\tag{26}
$$

这样定义的九个 α 组成通常所说的极化率张量．

在 CO_2 分子的例子里，如果我们使 x 轴沿着分子轴，这些系数就变成： $\alpha_{xx} = \alpha_{\parallel}$；$\alpha_{yy} = \alpha_{zz} = \alpha_{\perp}$；其他六个系数是零．如果我们的坐标轴选取其他方向，比如说和分子轴成 30° 角，则如图 9.14 (c) 所示，在 x 方向的电场 $\mathbf{E}$ 所引起的偶极矩 $\mathbf{p}$ 有一在 z 方向的分量．所以 α_{zx} 将不是零．（将 $\mathbf{E}$ 分解成同分子轴平行的和垂直的分量，求出由这些分量感生的极化，然后再求合成的偶极矩的 z 分量；这样就能求出 α_{zx} 的值．）所以极化率张量的各元素与坐标轴的取向有关．在转动坐标轴时，它们的变换必须保持矢量 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{p}$ 之间的关系不变．这个关系只能决定于 $\mathbf{E}$ 相对于分子的物理轴的方向，而与我们怎样选取 x，y，z 轴无关．我们在此将不给出张量系数的变换法则．这些法则和矢量的分量的变换法则相似．如果你想从少量的计算就知道这种变换是如何进行的，你可以对二维的情形进行计算，如问题 9.23 所提示的．

在极化率张量 α 的九个系数中只有六个是独立的．能够证明 $\alpha_{xy} = \alpha_{yx}$，$\alpha_{xz} = \alpha_{zx}$，$\alpha_{yz} = \alpha_{zy}$．这就是说这九个数的方阵对于"右上到左下"方的对角线来说总是对称的．这个张量的对称性表示一个最值得注意的物理事实，应该深入地想一想．它的意义是在 x 方向施加一电场 $\mathbf{E}$ 所引起的极化的 z 分量总是正好等于在 z 方向施加同样强度的电场所引起的极

化的 x 分量. 如果你认为这是明显的或平常的，请仔细考虑一下这个事实：甚至对于，像图 9.15 中那样，没有任何对称性的分子这也是正确的. 这是"互易"定理的一种，和我们在 7.7 节中所证明的互感的相等性类似，它不是只由几何对称性，而是由更普遍的性质引起的. 如果你想知道怎样证明，问题 9.22 将予以说明.

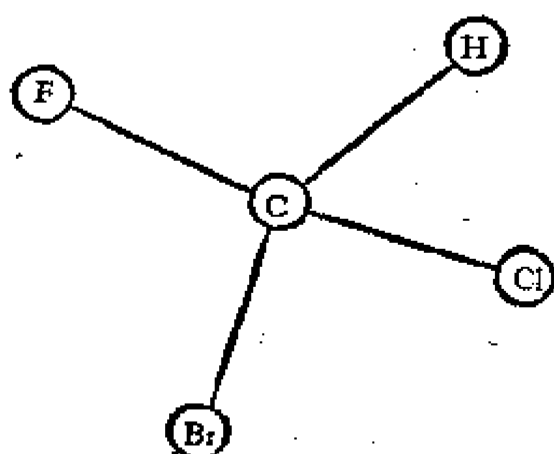


图 9.15 任何对称性都没有的分子，溴氯氟甲烷. 这是甲烷的三个氢被三个不同的卤素所代替了. 键长和四面体的棱都有些不同.

α 的对称性的一个重要推论是：我们总是能够相对于分子结构，把坐标轴定在这样的方向上，使得该对角线以外的系数 α_{xy}，等都等于零. 在这样的坐标系中，分子的极化率能够完全由 α_{xx}，α_{yy}，α_{zz} 等三个数值来描述. 并且这一结论甚至对于本身全然没有对称性的分子也是正确的. 在我们对于电介质的有限的研究中，将不应用这些事实. 这些对于研究分子的光学性质极为重要，并且现在或许化学工作者甚至比物理学工作者更为熟悉. 我们讲出这段关于极化率张量的离题的话的主要目的是用这个容易想象的例子，使大家知道张量的特性.

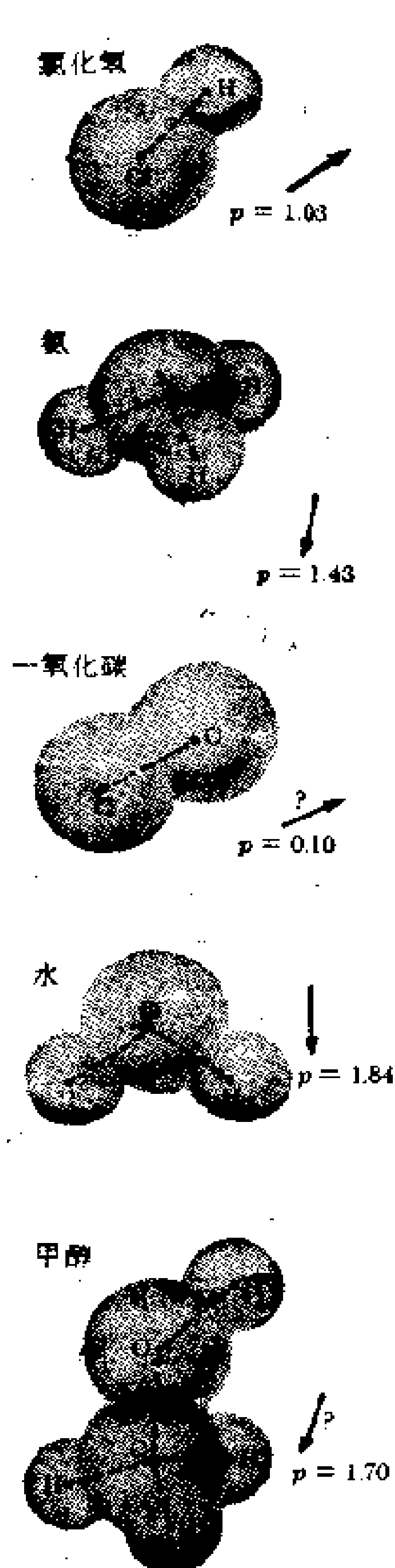
9.7 永久偶极矩

有些分子的结构，甚至在没有电场的情形下，也有电偶极矩. 它们在常态下，就已经是不对称的了. 图 9.15 中所画的分子就是一个例子. 任何由不同的原子构成的双原子分子，例如氯化氢 HCl，是比较简单的例子. 在这个分子的轴上没有任何一点，分子相对于它是纵向对称的；分子的两端在物理

上是不同的．如果正电荷的“重心”和负电荷的“重心”碰巧重合在分子轴的同一点上，那纯粹是偶然的事情．当 HCl 分子由原来球形的 H 原子和 Cl 原子形成 HCl 的时候，H 原子上的电子，部分地转移到 Cl 的结构上去，使得氢原子核部分地暴露出来．所以在分子的氢端有一些过剩的正电荷，而在氯端则有相应的过剩的负电荷．引起的电偶极矩的大小是 1.03×10^{-18} 静电电量单位·厘米，等于把一个电子移动约五分之一埃所产生的偶极矩的值．与此相对比，用表 9.2 中所列的极化率，在 30 千伏/厘米的电场中，氢原子得到一个小于 10^{-22} 静电电量单位·厘米的感生偶极矩．永久偶极矩一般都比任何能由普通的实验室中所用的电场感生的偶极矩大得多[1]．因此具有“内在的”偶极矩的有极分子和无极分子之间的差别是很明显的．

我们在 9.5 节开头的时候说过，氢原子在任何时刻都有一个偶极矩．但是因为由于电子的快速运动，这一偶极矩按时间的平均是零，所以那时我们没有管它．现在我们似乎在讨论分子偶极矩好象一个分子是一个垒球棒那样的静止物体，可以在空闲的时候，检察它的两端，看一看哪一端大些！分子比电子运动得慢，但是按平常的标准来看，它们的运动是快的．那末为什么我们能够认为它们有“永久”电偶极矩呢？如果你察觉到这个矛盾，那你应该受到称赞．不用量子力学不能给出完全的答案来，但是所谓快、慢的差别实质上涉及到运动的时间尺度．一个分子和它的环境相互作用所需的时间通常比分子的固有运动把偶极矩平均掉所需的时间短．所以分子实际上就好像有我们所说的偶极矩似的．在一个分子及其

1）这是有充足理由的．在原子和分子内部的电场自然是 $e/(10^{-8}\text{厘米})^2$ 的数量级，这大约是 10^9 伏/厘米！我们在实验室中不能把这样一个电场加在物质上，因为这样的电场会把物质撕碎．



邻近分子的范围内，一个极短的时间也可以看作是“永久的”.

图9.16中画出了一些普通的有极分子，并给出了每个分子的永久偶极矩的方向和大小．因为水分子是中间弯曲的，两个 O-H 轴所成的角度约为 105°，所以水分子有一电偶极矩．这是一个具有最广泛影响的奇异结构．水之所以有作为溶剂的性质，水分子的偶极矩起着很大的作用，并且对在水溶液中所发生的化学反应起决定性的作用．难以想像，如果 H_2O 分子和 CO_2 分子一样，它的各部分排成一条直线，那么世界将会是什么样子；可能我们就不会要在这里观察它．我们赶快补说一下，H_2O 分子的形状并不是大自然的毫无根据的幻想．量子力学清楚地揭示了为什么由一个有八个电子的原子和两个有一个电子的原子组成的分子必须是弯曲的.

作为电介质，有极物质的性质和由无极分子所组成的材料的性质是显著不同的．水的介电常数大约是 80，甲醇的是 33，而一个典型的

图 9.16　一些熟知的有极分子．“永久”偶极矩 p 的观测值以 10^{-18} 静电单位·厘米为单位.

无极液体的介电常数大约为 2. 外加电场对无极物质中的每个分子中感生一个微弱的偶极矩. 在有极物质中，偶极子已经大量存在，但是，在没有电场的情形下，它们的指向是杂乱无章的，所以它们没有宏观的效应. 外加电场仅是在某种程度上把它们排列起来. 然而，无论由那种过程产生的极化，宏观效应都是由单位体积内的净极化量决定的.

9.8 极化物质引起的电场

假设我们在没有任何东西的空间，集合大量的分子构成一块物质. 同时假设各个分子都沿同一方向极化. 我们暂时不需要涉及到分子的性质以及保持它们极化的方法. 我们只关心在这种状态下，它们所产生的电场；以后我们还可以引进附近的其他电源的场. 如果愿意的话，我们可以想象这些是整齐排列的并且是被固定住的具有永久偶极矩的分子. 我们需要规定的是每立方厘米内偶极子的数目 N 和每个偶极子的矩 $\mathbf{p}$. 我们假设 N 是如此之大，以致在任何宏观上很小的体积 dv 内都含有极大量的偶极子. 这样的体积中所包含的全部偶极矩强度是 $\mathbf{p}N dv$. 在距这个体元的距离远大于它的大小的任意一点，由这些特殊偶极子产生的电场实际上和具有强度 $\mathbf{P}N dv$ 的单独一个偶极矩所产生的电场相同. 我们把 $\mathbf{p}N$ 称为极化密度并且用 $\mathbf{P}$ 表示它，它是一个具有量纲为电荷·厘米/厘米^3 即电荷/厘米^2 的矢量. 在计算远处的电场时，我们就用 $\mathbf{p}dv$ 作为任一小体元 dv 的偶极矩. 顺便说一下，我们讨论的物质只是由中性的分子组成的；在这系统中或在任一分子上都没有净电荷，所以我们只须考虑偶极矩作为远处场的场源.

图 9.17 中所示的是由这种极化材料构成的细长柱体，即圆柱体. 它的横截面是 da，它的垂直高度是从 z_1 到 z_2. 圆

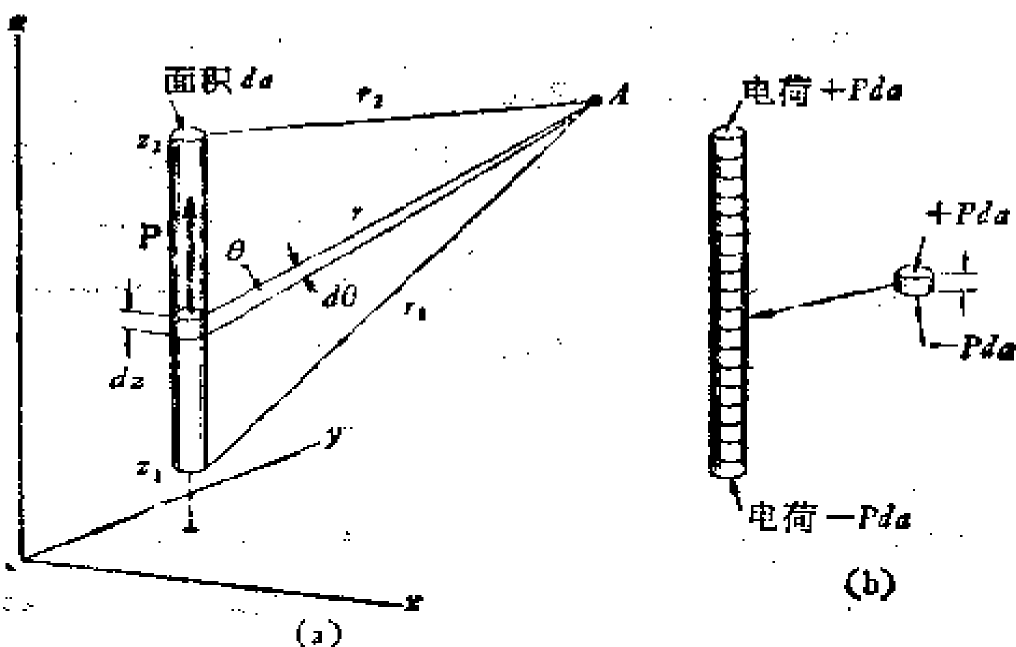


图 9.17 极化材料构成的圆柱体 (a) 在外部任意一点 A 产生的电场和在圆柱体两端的两个电荷所产生的电场 (b) 相同.

柱中的极化密度 $\mathbf{P}$ 是均匀的并且指向正 z 的方向. 现在我们要计算在这个极化圆柱体的外部某点的电势. 高度为 dz 的体元具有偶极矩 $\mathbf{P}dv=\mathbf{P}da\,dz$. 参考以前关于偶极子的电势的公式, 式 (12), 就能够写出这个偶极矩对 A 点的电势的贡献为

$$d\varphi_A=\frac{Pda\,dz\cos\theta}{r^2}. \tag{27}$$

整个圆柱所产生的电势是

$$\varphi_A=Pda\int_{z_1}^{z_2}\frac{dz\cos\theta}{r^2}. \tag{28}$$

这实际上比它的外观简单: $dz\cos\theta$ 正好是 dr, 所以被积函数是一个全微分, $-d(1/r)$. 积分的结果是

$$\varphi_A=Pda\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right). \tag{29}$$

式 (29) 正好和两个点电荷所产生的电势的表达式相同; 这两个电荷中的一个是电量为 Pda 的正电荷, 位于圆柱的顶

端，和 A 的距离是 r_2，另外一个是同样大小的负电荷，位于圆柱的底端．由柱形均匀极化物质所组成的场源，至少对在它外部各处的电场而论，和两个聚集电荷是等效的．

我们能够不用任何数学而用另外一个方法来严格地证明上述结论．考虑圆柱体中高度为 dz 的一小段，它所包含的偶极矩的量是 $Pdadz$． 我们现在把它模拟成或代之以具有同样大小和形状的未极化的绝缘体，在绝缘体的顶端附着上 $+Pda$ 的电荷，在底端附着上 $-Pda$ 的电荷． 现在这小块物体和原来的圆柱体上的那一小段有相同的偶极矩，所以它对远处的任何点 A 的电场的贡献也相同．（在我们的替代物体的内部，或者离它很近的地方的电场和原来的电场可能不同——我们不关心这些．）现在我们做一整套这样的小块，并把它们堆积起来模拟原来那个极化的圆柱体．它们在 A 点给出的电场一定和整个圆柱体所给出的电场相同，因为每一块给出的贡献和原来的圆柱体中与它相对应的部分所给出的贡献相同［图 9.17 (b)］． 现在看一看，我们得到了什么结果！在各块相结合的地方，每一块的顶上的正电荷和在它的上边的一块的底部的负电荷相重合，净电荷为零． 余下来没有被抵消掉的电荷只是在最底下的一块的底端上的负电荷 $-Pda$ 和在最上头一块的顶端上的正电荷 $+Pda$．从像 A 那样远的一点来看，它们都像点电荷． 和以前一样，我们断定这样的两个电荷在 A 点产生的电场和极化材料所构成的整个圆柱体所产生的电场完全相同．

我们不用进一步的计算，就能够将这方法推广到沿着和平行表面相垂直的方向均匀极化的任意大小的平板或直柱体［图 9.18 (a)］． 可以把平板简单地再细分为细柱；在外部的电势是各细柱的贡献的总和．而每个细柱又能为它两端的电荷所代替．在每一个细柱的端面积 da 上的电荷是 Pda，它们

合起来组成一层均匀的表面电荷，其面密度 $\sigma = P$ 静电单位/(厘米)^2. 我们由此断定，在均匀极化的平板或柱体的外部各处的电势完全和放在平板的顶面和底面的位置上分别具有恒定的面电荷密度 $\sigma = +P$ 和 $\sigma = -P$ 的两层面电荷所产生的电势相同[图 9.18 (b)].

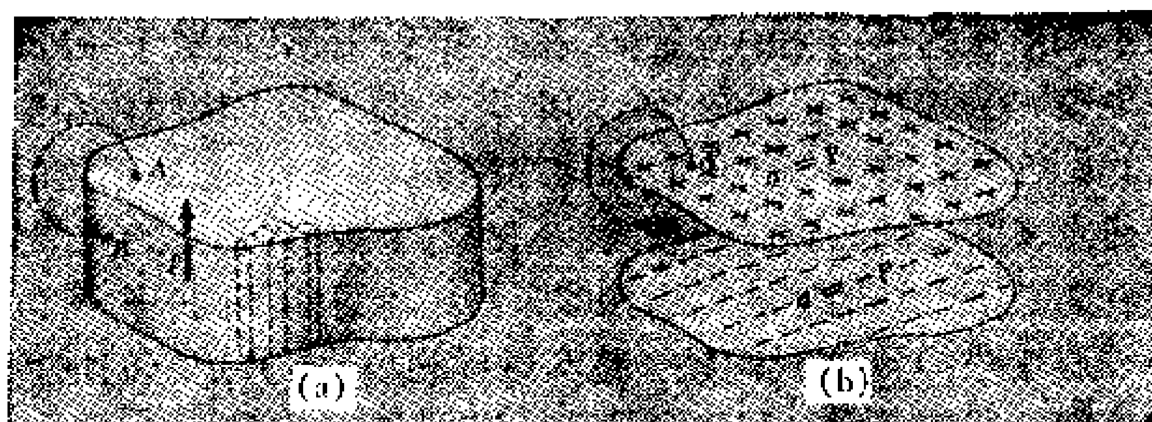


图 9.18 一块极化材料 (a)，就外部的电场而论，相当于两个电荷层 (b).

我们还没有准备好去谈关于平板内部电场的任何问题. 然而，我们确实知道在平板的表面，上面，下面或侧面上所有点的电势. 任何两个象 A 和 B 这样的点可以用完全经过外部电场的路线连起来，所以线积分 $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ 是完全由外部电场决定的. 它必然和图 9.18 (b) 中沿路线 $A'B'$ 的积分相同. 照字面上讲，在电介质表面上的一点可能是在很强的分子电场的范围以内，这是我们还未考虑过的分子的"近处电场". 让我们规定电介质的边界是离开最外面的原子核足够远的表面—— 10 或 20 埃可以算是足够的距离了——以致在这个边界以外的任意一点，各单独原子的"近处电场"对于从 A 到 B 的全部线积分的贡献可以忽略不计.

记住上述概念，让我们研究一块相当薄的，由极化材料作成的宽平板，它的厚度是 t，其横截面如图 9.19 (a) 所示. 图 9.19 (b) 也是用横截面图表示的等效电荷层. 对于两个电荷

层所构成的系统，我们既知道电荷层外部空间的电场，也知道在两电荷层中间的电场. 在两层中间，并且离边缘相当远的地方的电场强度必然正好是 $4\pi\sigma$，方向向下，所以在点 A' 和 B' 之间的电势差是 $4\pi\sigma t$ 静伏. 在极化平板上的对应点 A 和 B 之间也必然存在着相同的电势差，因为两个系统的外部电场是完全相同的.

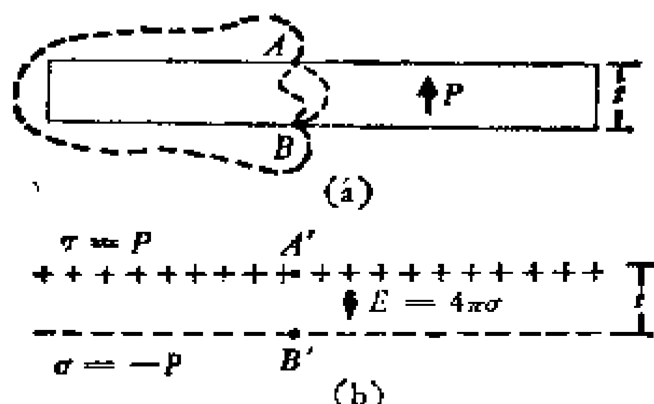


图 9.19 (a) 沿内部的或外部的任何路线，从 A 到 B 的 $\mathbf{E}$ 的线积分都必然相等，因为内部的"微观的"即"原子的"电场也是保守场($\mathrm{curl}\,\mathbf{E}=0$)，等效电荷层 (b) 有相同的外部电场.

内部的电场也相同么？肯定不同，因为平板中充满了带正电的原子核和电子，具有每厘米几百万伏特的电场，各处电场的方向不同. 但是有一件事是相同的：电场的线积分，沿任何内部的路线从 A 计算到 B，必定恰好是 $\varphi_B-\varphi_A$，正如我们所知，它和 $\varphi_{B'}-\varphi_{A'}$ 是相同的，它等于 $4\pi\sigma t$，或 $4\pi Pt$. 必定是这样的，因为原子电荷的存在，不管它们的分布如何，并不能破坏电场的保守性质，这个保守性质用 $\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$ 与路线无关，或 $\mathrm{curl}\,\mathbf{E}=0$，来表述.

我们知道在图 9.19 (b) 中，上下两层的电势差，除去靠近边缘部分之外，几乎是恒量，因为内部的电场实际上是均匀的. 所以在我们的极化平板的中心区域，顶面和底面之间的电势差必然也是恒量. 在这个区域中，从平板顶面上的

任意一点 A 经过任意路线到底面上的任意一点 B 的线积分 $\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$ 一定总是给出相同的值 $4\pi Pt$. 图 9.20 是平板的中心区域的"放大图"，其中的极化分子画得和 H_2O 分子的形象差不多，都指向同一方向. 我们不想描述分子之间的和分子内部的强电场. (可以从表 9.1 和式 (14) 看出，在距离水分子 10 埃的地方，它的电场可达每厘米几十万伏特.) 必须设想在每个分子的附近，有相当复杂的电场结构. 在 $\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$ 中的 $\mathbf{E}$ 是指空间一点的*总电场*，无论是在分子的内部还是在分子的外部；它包括刚才提到的这些复杂的强电场. 我们已经得到重要结论：对于任何通过这些混乱的电荷和电场的路线，不论是躲开或穿过分子，其路线积分都必有相同的值，就是我们在图9.19 (b) 的系统中，对十分均匀的，强度是 $4\pi P$ 的电场所得出的值.

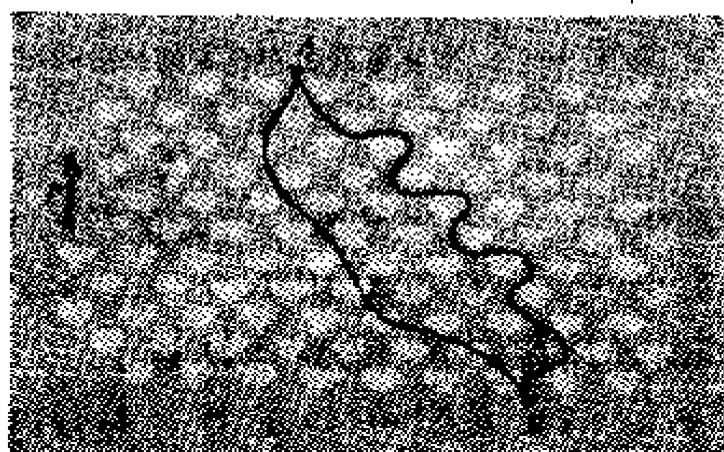


图 9.20 沿从 A 到 B 的任何路径，真实的微观电场的线积分都是相同的.

这就告诉我们，在极化的平板中，电场强度的空间平均值必定是 $-4\pi\mathbf{P}$. 我们用 $\langle\mathbf{E}\rangle_V$ 表示电场 $\mathbf{E}$ 在体积 V 内的空间平均值，它的确切表达式是

$$\langle\mathbf{E}\rangle_V = \frac{1}{V}\int_V \mathbf{E}\,dv. \tag{30}$$

在V中分割成的多个相等的小dv里，一个正确选取电场值的方法是沿着一束紧密排列着的平行线所组成"纤维束"中的每条线测量电场．我们刚才已经看到，沿着任一(或是说所有)这样的路线，$\mathbf{E}$的线积分和在一个强度为$-4\pi\mathbf{P}$的固定电场中的线积分一样．这是证明结论$\langle\mathbf{E}\rangle=-4\pi\mathbf{P}$的理由．

这平均电场是个宏观量．我们用来取平均值的体积应该大得足够包含很多很多的分子，否则，平均值在相邻体积中将会发生涨落现象．式(30)定义的平均电场$\langle\mathbf{E}\rangle$才真正是我们所能讨论的电介质内部的唯一的宏观电场．在物质的宏观性质的描述上，它是对"在电介质材料内的电场是什么？"这一问题的唯一的满意答案．

式(30)中右方的被积函数中的$\mathbf{E}$可以叫做微观场．如果我们派遣一个人去测量路线积分所需要的电场值，他将去测量真空中的电场．当然，是在有电荷存在的条件下的电场．他需要极小的仪器，因为他可能被要求去测量恰好在某一分子的一端内的一特定点的电场．我们能说：沿着绕过一个分子的西南角然后穿过它的邻近分子的某一路线取$\mathbf{E}$的线积分吗？是的，可以这样说．根据电磁定律在比原子尺寸小得多的距离尺度内也是有效的这个有力的证据，就可以说明以上说法是合理的．我们甚至能够安排一个测量沿着完全限定在原子尺度范围以内的一条路线上的微观电场的平均值的实验．我们要做的只是发射一个高能带电粒子，例如一个α粒子，穿过这个物质．从它的动量的改变量就可以推断出在它所经过的全路线中作用在它上面的平均电场．

让我们来做一个关于极化材料的数值计算的题目．设想有一圆盘，半径为1厘米，厚度为0.3厘米，如图9.21(a)所示．设圆盘中的分子密度是3×10^{22}分子/厘米^3．假设它们全是有极分子，每个分子的偶极矩是1.8×10^{-18}静电单位·厘

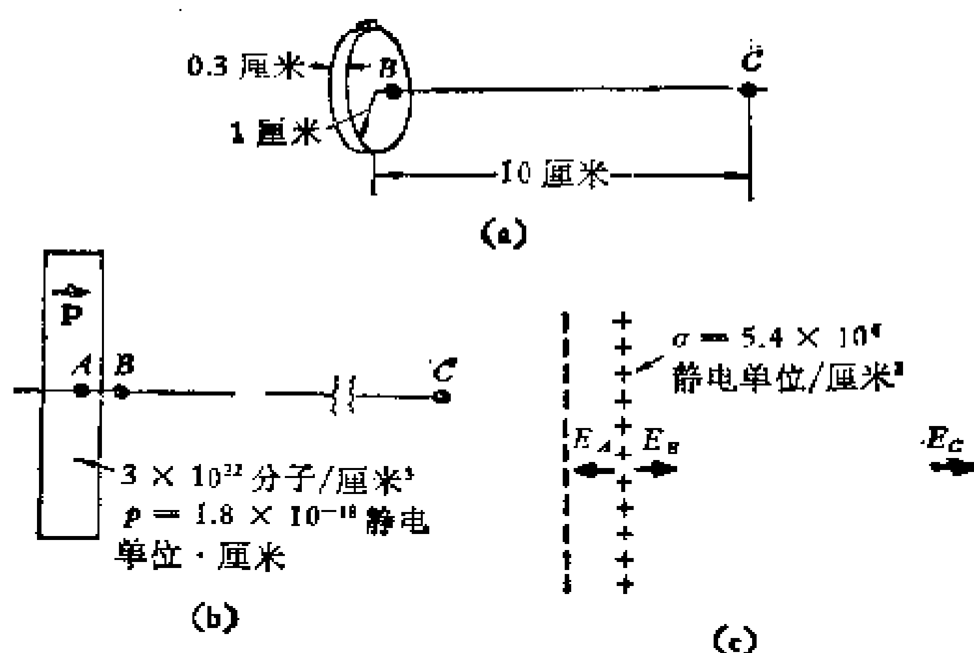


图 9.21 (a)由有极分子组成的圆盘，分子的偶极矩的方向都和轴平行，(b)圆盘的横截面，(c)等效的两个电荷层的横截面.

米．最后假设(这是一个相当牵强的假设)它们全部排列好，象图 9.20 中的分子那样，它们的偶极矩指着同一方向，和圆盘的轴平行．我们将讨论在圆盘内部的一点 A 处的和刚好在圆盘外面的一点 B 处的，以及在距离圆盘 10 厘米远的轴上的一点 C 处的电场．极化强度 $\mathbf{P}$ 的值是

$$\begin{aligned} P = Np &= (3\times10^{22}\ \text{厘米}^{-3}) \\ &\quad \times (1.8\times10^{-18}\ \text{静电单位}\cdot\text{厘米}) \\ &= 5.4\times10^{4}\ \text{静电单位/厘米}^2, \end{aligned} \tag{31}$$

其等效电荷层画于图 9.21 (c) 中．如果这些电荷层扩展到无穷远处，则在它们之间的 A 点的电场将简单地是 $4\pi\sigma$ 即 6.8×10^5 静伏/厘米．在这种情形下，这是一个相当好的近似，因为两电荷层间的距离和它们的直径相比是相对地小的．实际上，电场比这个值稍小一些．刚好在圆盘外面的 B 点处的电场，对于无限大的电荷层来说是零；但在这个实际情形中，有

一相当小的场值，指向右方．在正电荷层的地方，E 在正片上的不连续变化恰好是 $4\pi\sigma$ 或 $4\pi P$． 如果需要准确地计算 A 或 B 处的电场，我们可以用在第二章中求出的带有面电荷的圆盘的电场的公式，将放在适当位置的两个圆盘的电场叠加起来． 要估计在像 C 那样远的一点的电场，我们只需知道物体的总偶极矩． 从 C 来看，许多单个偶极子是怎样分布的并不重要．圆盘的作用像一个单个偶极子，其强度 $p_{总}=$ 体积 $\times P=0.942$ 厘米$^3\times 5.4\times 10^4$ 静电单位/厘米$^2=5.1\times 10^4$ 静电单位·厘米．这样的偶极子在轴上 10 厘米远的一点的电场是

$$E_C=\frac{2p_{总}}{r^3}=\frac{10.2\times 10^4\text{静电单位·厘米}}{(10\text{厘米})^3}$$

$$=102\text{静伏/厘米}. \qquad (32)$$

9.9 填充了电介质的电容器

我们已经长时间地回避了讨论填充上电介质的电容器．现在我们可以把对电介质本身的一些了解用来处理这个问题了． 首先考虑在真空中的两个导体板，上边的板上带有电荷 $-Q$，下边的板上带有电荷 $+Q$． 图 9.22(a) 正好是这一章开始处的图 9.1(a) 的横截面．两板中间的电场 $\mathbf{E}_0$ 等于 $4\pi Q/A$，并且指向上方． 两板的电位差 φ_{12} 等于 $4\pi Qt/A$． 空间无电介质的电容器的电容 C_0 由下列熟悉的公式给出

$$C_0=\frac{Q}{\varphi_{12}}=\frac{A}{4\pi t}. \qquad (33)$$

现在在两极中间放入电介质．电场将使电介质中的原子或分子极化．在现阶段我们不能预言各个分子的感生偶极矩的大小，因为在这种情形下作用在分子上的电场不只是电场 $\mathbf{E}_0$ 而且还包括其他分子所贡献的电场． 无论如何，对于各向同性

的电介质来说，极化方向和 $\mathbf{E}_0$ 平行． 不管极化密度多大，我们用 $\mathbf{P}$ 表示它．

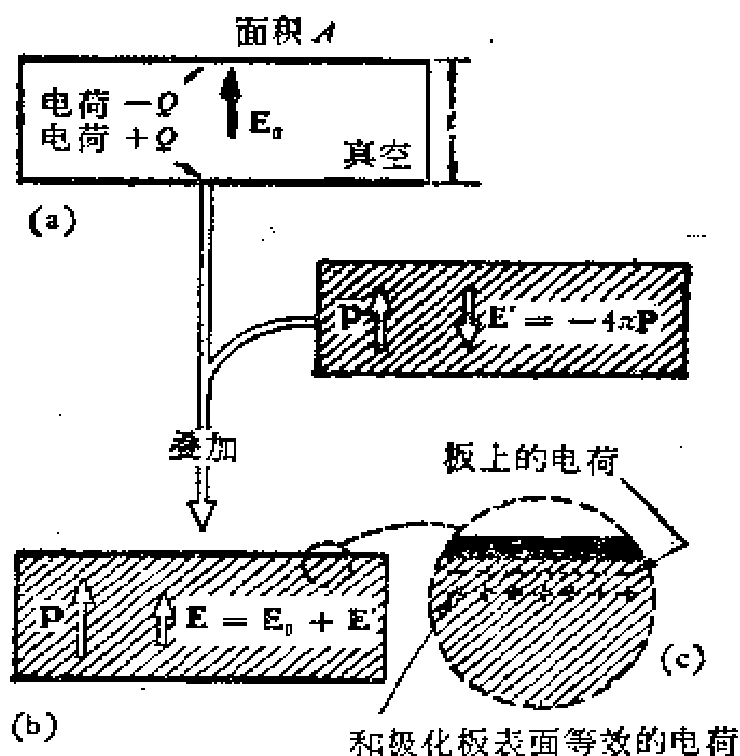


图 9.22 填充电介质的电容器 (c) 能被分解为一个带电的真空电容器 (a) 和一块极化材料 (b)．

画在图 9.22 (c) 中的系统是由两个真正的电荷层加上一块极化材料组成的．它是我们已经分析过的两个电荷分布的**叠加**，就是图 9.22 (a)的分布以及重新画在图 9.22 (b)中的图 9.19 (a) 的分布．电场是这两个电荷分布的电场的和，即面电荷密度为 $\sigma = Q/A$ 的两个真正电荷层的电场 $\mathbf{E}_0$ 加上和极化板等效的密度为 $\sigma' = P$ 的两个电荷层的电场 $\mathbf{E}'$．要注意，因为 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{E}_0$ 是同一方向，所以 $\mathbf{E}'$ 和 $\mathbf{E}_0$ 方向相反；等效正电荷层挨着带负电荷的导体板．其原因当然是由于在导体板上的负电荷拉电介质原子的正电部分，推电介质原子的负电部分，而使电介质中的原子极化，这就将正电荷拉近这个导体板．所以在电容器的内部，电场 $\mathbf{E}$ 是

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}' = \mathbf{E}_0 - 4\pi\mathbf{P}, \tag{34}$$

两板的电势差变为

$$\varphi_{12} = (E_0 - 4\pi P)t, \tag{35}$$

在电容器上的电荷仍和以前相同．如果两个导体板用导线连接上，电荷Q就将消失掉，同时电介质回到原来未极化的状态．因为和具有相同电荷的真空电容器相比较，电势差按因数$(E_0 - 4\pi P)/E_0$减少，所以电容$C = Q/\varphi_{12}$，应按这个因数的倒数增加

$$C = C_0 \frac{E_0}{E_0 - 4\pi P}. \tag{36}$$

最好用现在电容器中的电场（宏观的即平均的电场）$\mathbf{E}$来表示此式．因为由式(34)，$E_0 = E + 4\pi P$，我们有

$$C = C_0 \frac{E + 4\pi P}{E} = C_0\left(1 + 4\pi \frac{P}{E}\right) \tag{37}$$

P和E的比值是电介质材料的一个内在性质．这个比值叫做材料的**电极化率**，通常用符号χ_e表示．这个比值是没有量纲的．式(37)的括弧中的总量叫做这个材料的**介电常数**，用ϵ表示．

$$P = \chi_e E, \qquad \epsilon = 1 + 4\pi\chi_e, \tag{38}$$

这些只是定义；而式(34)和(37)是有物理意义的．

严格地说，用电介质材料填充电容器以增加电容时，只有当填满两板间的空间同时还填满它的周围空间时，电容才准确地增加ϵ倍．在上面的例子里，我们不言而喻地假设了两板之间的距离t和板的长宽相比是如此之小，以致包括在导体板的外表面上边缘附近的少量电荷在内的“边缘效应”[参看图3.11(b)]可以忽略不计．我们能对于完全浸泡在均匀的各向同性电介质（例如一大桶油）中的一组任意形状或任意排列的导体，作一普遍的陈述．无论各导体上带有多少电荷Q_1，Q_2等等，在介电媒质中各处的宏观电场$\mathbf{E}_{媒}$正好是具有同样

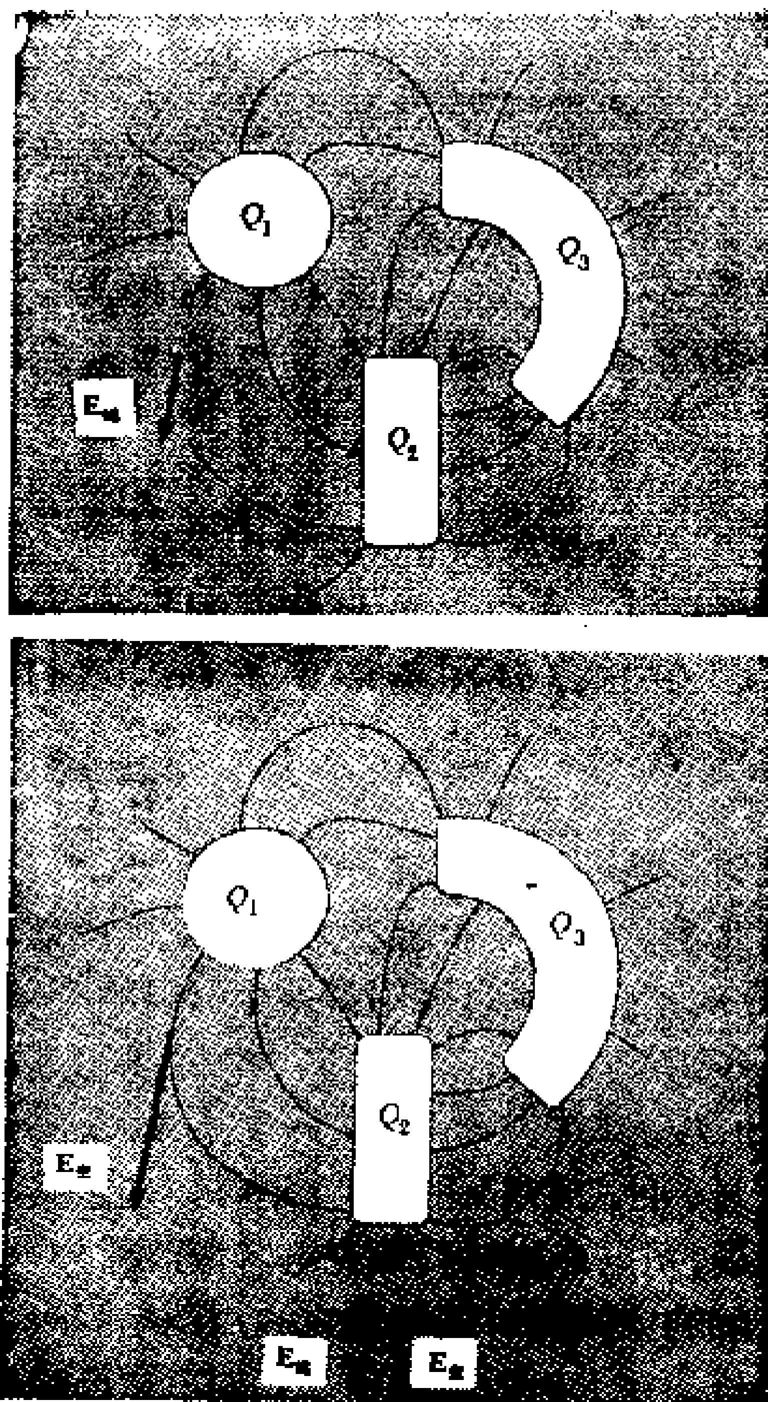


图 9.23　在导体上带有相同的电荷，因电介质的存在将全部电场强度(因而所有的电势差)减少到原值的 $1/\varepsilon$. 如果我们使系统放电，电荷 Q_1, Q_2 和 Q_3 是真正从导体流出的电荷.

电荷的相同导体在真空中时那里应有的电场 $\mathbf{E}_{真}$ 的 $1/\varepsilon$（图9.23）. 自然，所有电势差将按相同的因数 $1/\varepsilon$ 减少。

我们还有两个性质完全不同的问题尚未解决：

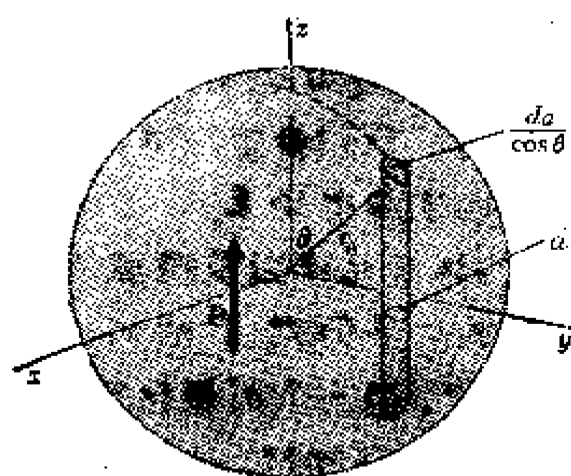
(i) 我们需要知道绝缘体和导体组成的任意系统的行为，假定有关材料的介电常数是已知的．这就是说，不论导体上电势和电荷所表示的边界条件如何，我们希望能够计算在电介质以外的电场以及电介质内部的宏观电场 $\mathbf{E}$.

(ii) 由极化率 χ_e 表示的材料的体极化率以及组成电介质的原子或分子的极化率之间的量的关系仍然是相当神秘的．为了找出这个关系我们必须确定，当一个可极化的原子附近的空间平均电场，即宏观的电场，如已知时，这个原子实际上受到什么电场的作用．一个固定原子所感受的电场并不是空间的平均电场而是另外一个可以叫做局部电场的电场．就是这个局部电场，$\mathbf{E}_{局部}$，实际上感应出来原子的偶极矩．这个问题要求对电介质的内部用另外一种"微观"形象来说明．

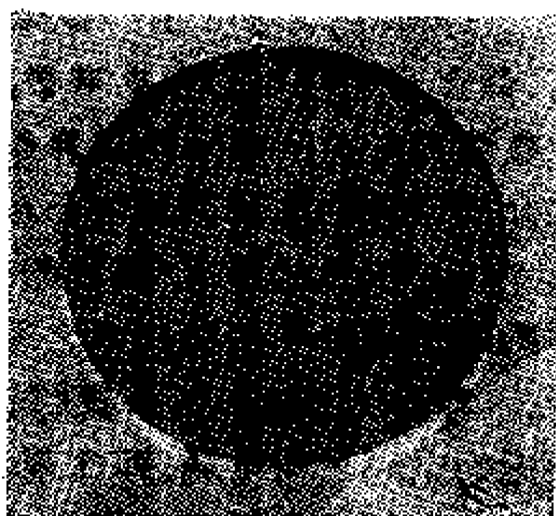
我们首先讨论问题 (i).

9.10 极化球的电场

在图 9.24 (a) 里的固体球是均匀极化的，就好像它是从图 9.18 (a) 中的一块物质中切割出来的一样．在球体内外的电场应当是什么样子？这是一个有启发性的问题，并且所得结果在其他方面也是有用的．和通常一样，令 $\mathbf{P}$ 表示极化密度，在球内各处它的大小和方向是一样的．和在图 9.18 (a)中的厚块一样，这极化材料可以被划分成和 $\mathbf{P}$ 平行的若干细柱体，每一柱体可为在它顶面上和底面上的大小等于($P\times$ 柱的横截面积）的电荷所代替．所以我们所求的电场就是以面密度 $\sigma=P\cos\theta$ 分布在球体表面上的电荷分布所产生的电场．这里出现的因子 $\cos\theta$ 可以由图上明显地看出来，是因为一个横截面积为 da 的圆柱体在球面上截出的表面面积为 $da/\cos\theta$. 图 9.24 (b) 是通过这个等效表面电荷壳的一个横截面，在图中电荷密度由上边的黑半圆（正电荷密度）和由下边



(a)将极化圆球分割成极化棒，再用圆球表面上的小片电荷代替每根棒.



(b) 体电荷密度相同的一个正电荷圆球和一个负电荷圆球稍稍位移一下，相当于圆球表面上的电荷分布。

图 9.24

的白半圆(负电荷密度)的深浅不同来表示。

如果你还没有想出来，这个图可以提醒你，把极化密度 **P** 看作是由一个均匀充满体密度为 ρ 的正电荷的球相对于一个密度为 $-\rho$ 的带负电荷的球作轻微的向上移动而产生的. 这将使未被补偿的正电荷在上部伸出，负电荷露在底部，在整个边界上的电量的变化准确地和 $\cos\theta$ 成正比. 在内部，正电荷和负电荷密度仍然是重叠着的，它们正好相互抵消. 用这个观点，我们找到了一个很容易的方法去计算表面电荷球壳以外的电场. 据我们所知，任意球形电荷分布在球外产生的电场和全部电荷集中在球心所产生的电场相同. 所以中心分开一个小位移 s 的两个总电荷分别为 $+Q$ 和 $-Q$ 的圆球相叠加所产生的在球外的电场和两个相距 s 厘米的点电荷 $+Q$ 和 $-Q$ 所产生的电场相同. 这恰好是一个具有偶极矩 $p_0=Qs$ 的偶极子.

极化物质的微观描述导致相同的结论. 在图 9.25(a) 中，真正提供极化密度 **P** 的所有的分子偶极子每个都被粗略地表

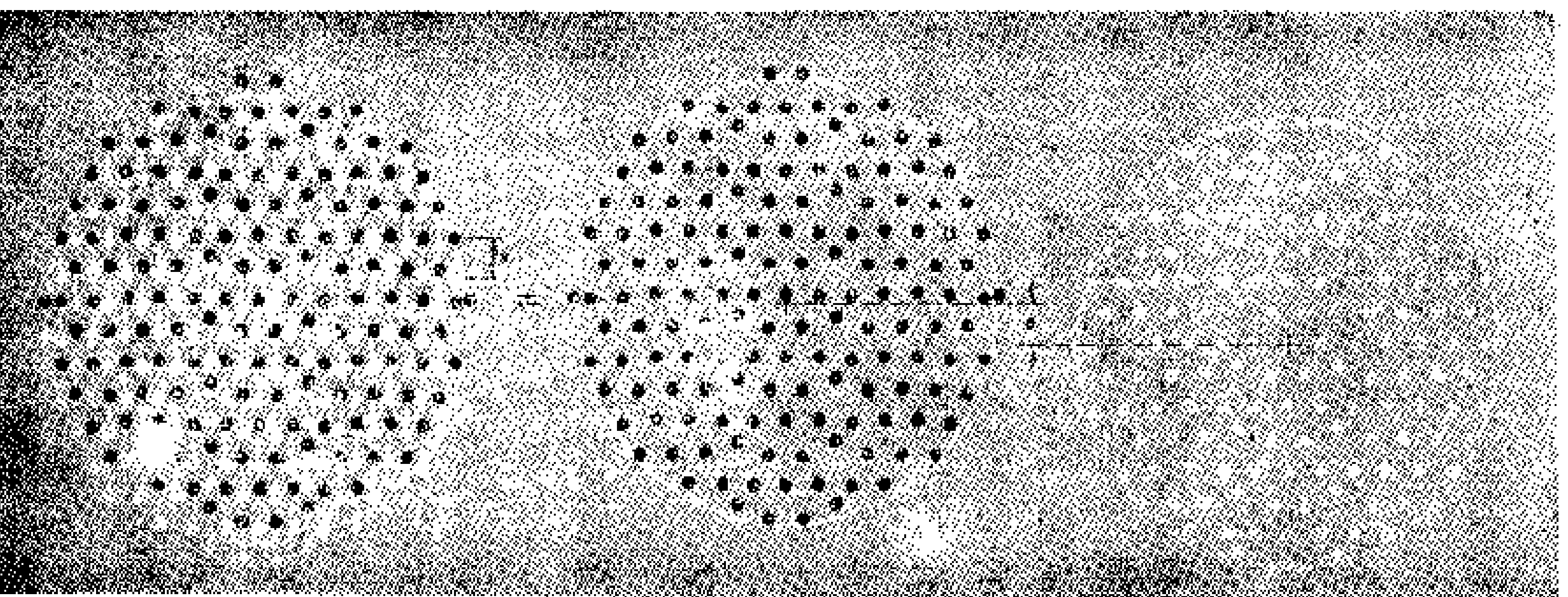


图 9.25　由排成一个方向的分子偶极子组成的圆球(a)和互相重叠但位置稍微不同的正电荷球(b)和负电荷球(c)等效。

示为是由一对相距为 s 的电荷 q 和 $-q$ 构成的，其偶极矩为 $p=qs$. 如果每立方厘米有 N 个这样的偶极子,则 $P=Np=Nqs$, 在圆球中的偶极子的总数是 $(4\pi/3)r_0^3N$. 分开来考虑，总量为 $Q=(4\pi/3)r_0^3Nq$ 的正电荷分布在一个圆球中[图 9.25 (b)]，负电荷占据一个相似的圆球，但其中心稍有不同[图 9.25 (c)]. 如果我们仅关心在电荷分布外面相当远处的电场,显然每个电荷分布可用放在它中心的一个点电荷来代替. "在外面相当远"的意思是说离表面足够远以致实际电荷分布的颗粒状态不发生影响，当然这是当我们谈到宏观电场时常常不得不忽略不计的问题. 所以为了现在的目的，由重叠起来的，电荷密度均匀的圆球所构成的图象和用在真空中的真实的偶极子的观点所作的描述是等效的[1],并且指明在电荷分布外面的电场和在中心的单个偶极子的电场相同. 这个偶极子的偶极矩 p_0 等于球内的总极化强度

$$p_0=Qs=\frac{4\pi}{3}r_0^3Nqs=\frac{4\pi}{3}r_0^3P. \tag{39}$$

Q 和 s 两个量拆开时是没意义的，从而现在可以在讨论中不再用它们,而直接用 p_0.

极化球外边的电场就是中心偶极子 p_0 的电场，不仅在离圆球远的地方如此；宏观地说,直到圆球的表面，它也是纯粹偶极子的电场. 为了画出表示外部场线的图 9.26，我们只须从图 9.5 中画出一个圆形面积即可.

圆球内部的电场则是另一回事. 让我们讨论一下电势 $\varphi(x,y,z)$. 因为我们知道圆球外边的电场，所以我们可以

---

1) 这可能已经是足够清楚的了,但是我们仍对这一情形作了详细讨论,为的是解除这样的怀疑：即和我们已知的真实物质内部如此不同的"光滑电荷球"的模型有可能把我们引入迷途.

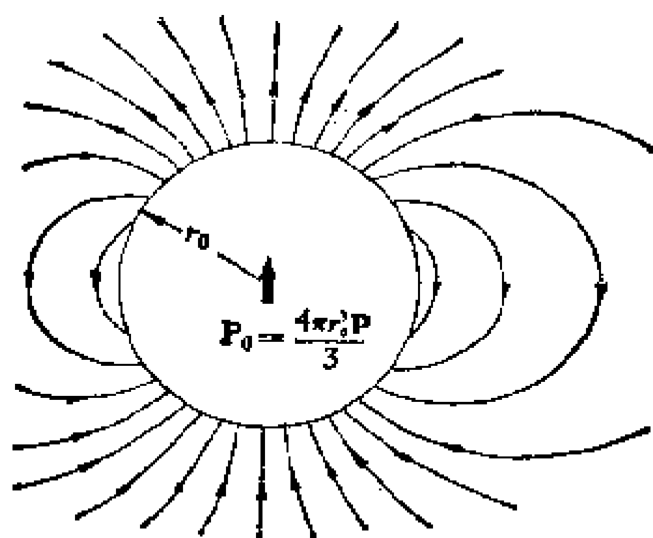


图 9.26 在均匀极化的圆球的外边的电场和在球心的偶极子的电场完全相同.

知道在圆球边界上各点的电势.它恰好是偶极子电势 $p_0\cos\theta/r^2$, 在半径为 r_0 的圆球边界上这个值成为

$$\varphi = p_0\frac{\cos\theta}{r_0^2} = \frac{4\pi}{3}Pr_0\cos\theta. \tag{40}$$

因为 $r_0\cos\theta = z$, 我们可以看出在圆球上一点的电势只和它的 Z 坐标有关

$$\varphi = \frac{4\pi}{3}Pz. \tag{41}$$

计算内部电场的问题已简缩为下列问题: 方程(41)给出了在区域边界上每一点的电势, 在区域以内 φ 必须满足拉普拉斯方程. 按照第三章中证明过的唯一性定理, 这就足够确定区域内部各处的电势 φ. 如果我们能找到一个解, 它一定是所要求的解. 现在函数 Cz 满足拉普拉斯方程, 其中 C 是任意常数, 所以实际上式(41)给出了圆球内部的电势的解. 它是 $-z$ 方向的均匀电场的电势.

$$E_z = \frac{\partial\varphi_{内}}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{4\pi Pz}{3}\right] = -\frac{4\pi P}{3}. \tag{42}$$

因为 z 轴的唯一特点是它与 **P** 的方向相同，我们可将所得的结果写成更普遍的形式

$$E_{内} = -\frac{4\pi \mathbf{P}}{3}, \tag{43}$$

这是极化材料内部的宏观电场 **E**.

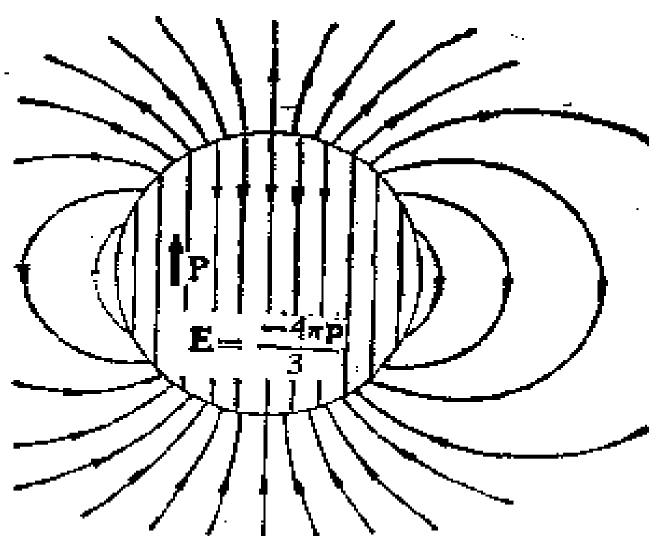


图 9.27　在均匀极化的电介质圆球以内及以外的电场。

图 9.27 表示球内的电场和球外的电场. 在圆球的顶点，向上指的球外电场的强度，根据偶极子的电场的方程 (14) 得出

$$E_z = \frac{2p_3}{r^3} = \frac{2(4\pi r_0^3 P/3)}{r_0^3} = \frac{8\pi P}{3}, \text{（球外）} \tag{44}$$

这刚好是向下指的内部电场强度的二倍.

这个例子表明了在极化媒质表面的电场分量的性质的普遍规则. 在极化媒质的边界上的 **E** 是不连续的，这和在真空中的带有面电荷密度 $\sigma = P_n$ 的表面上的情形完全一样. 符号 P_n 表示 **P** 在表面的外法线方向的分量. 可见 **E** 的法线方向的分量一定突然改变一个量 $4\pi P_n$，而平行于边界的分量则是连续的，就是说，在边界的两边有相同的值. 确实，在圆球

的北极，E_z 的净改变是 $8\pi P/3-(-4\pi P/3)$；即 $4\pi P$. 参看表示偶极子电场的方程(14)，可以验证，在圆球上各处，**E** 的平行于表面的分量从内部到外部是连续的.

这些结论都和圆球的极化是怎样产生的无关. 只要假定任一圆球是均匀极化的，图 9.27 就表示它的电场. 在这电场上可以叠加上来自其他场源的任何电场，这样就可以表示很多可能的系统. 这不影响在极化媒质边界处 **E** 的不连续性. 所以刚才陈述的规律在任何系统中都适用，**E** 的不连续性仅决定于现有的极化情况.

9.11 在均匀电场中的电介质球

作为一个例子，我们把用介电常数为 ϵ 的电介质材料作的圆球放在像真空电容器的平行板间的电场那样的均匀电场 $\mathbf{E}_0$ 中(图 9.28). 令这个场的场源，板上的电荷，离球很远，以便当放入圆球时电荷不发生移动. 所以不管在圆球附近电场是什么样子，在远处的电场实际上仍然保持为 $\mathbf{E}_0$. 我们所说的把一个圆球放入均匀电场中，就是这个意思. 在圆球附近，总电场 **E** 不再是均匀的了. 总电场是远处场源的均匀电场 $\mathbf{E}_0$ 和由极化物质本身产生的电场 $\mathbf{E}'$ 的和：

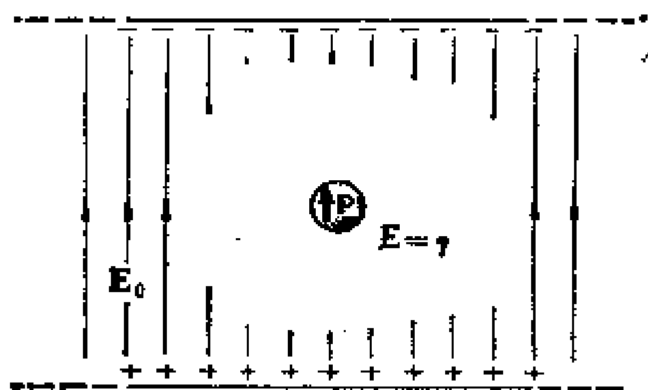


图 9.28 电场 $\mathbf{E}_0$ 的源保持固定. 电介质圆球产生极化密度 **P**. 总电场 **E** 是 $\mathbf{E}_0$ 和这个极化圆球的电场的叠加.

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0+\mathbf{E}'. \qquad (45)$$

电场 $\mathbf{E}'$ 由电介质的极化密度 **P** 决定，而极化密度又由圆球内 **E** 的值决定

$$\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \mathbf{E}. \tag{46}$$

我们还不知道总电场 $\mathbf{E}$ 是什么；我们只知道式(46)在圆球内任何一点都必须成立．如果圆球是均匀极化的，(这一假设需要在最后结果中得到证实.)则在球内各点，圆球的极化密度和它自己的电场 $\mathbf{E}'$ 的关系由式(43)给出．［在式(43)中我们曾用符号 $\mathbf{E}$ 表示这个电场；在该情形下它是唯一的电场.］

$$\mathbf{E}'_{内} = -\frac{4\pi\mathbf{P}}{3}, \tag{47}$$

现在我们有足够的方程去消去 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{E}'$，这样就能得出 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{E}_0$ 的关系．应用式(45)到式(47)我们有

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \frac{4\pi\mathbf{P}}{3} = \mathbf{E}_0 - \frac{\epsilon - 1}{3} \mathbf{E}. \tag{48}$$

解出 $\mathbf{E}$，

$$\mathbf{E} = \left(\frac{3}{2 + \epsilon}\right) \mathbf{E}_0. \tag{49}$$

因为 ϵ 大于一，因子 $3/(2 + \epsilon)$ 必小于一；故在电介质中的电场比 $\mathbf{E}_0$ 弱．极化密度是

$$\mathbf{P} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \mathbf{E} = \frac{3}{4\pi} \left(\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}\right) \mathbf{E}_0. \tag{50}$$

现在可以看出前面关于均匀极化密度的假设是与前后一致的[1]．为了计算球外的总电场 $\mathbf{E}$，我们必须用矢量方法在 $\mathbf{E}_0$

---

1) 这就是这个系统容易处理的原因．对于在均匀电场中的有限长度的电介质圆柱，这个假设不成立．均匀极化的圆柱(例如长度和直径差不多相等的圆柱)内的电场 $\mathbf{E}'$ 是不均匀的．(它是什么样子?)所以 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$ 不可能是均匀的——但是在这种情形下，$\mathbf{P} = \chi_e\mathbf{E}$ 也完全不可能是均匀的．事实上，只有椭球形的电介质(圆球是它的一个特例)才能在均匀电场中均匀极化．

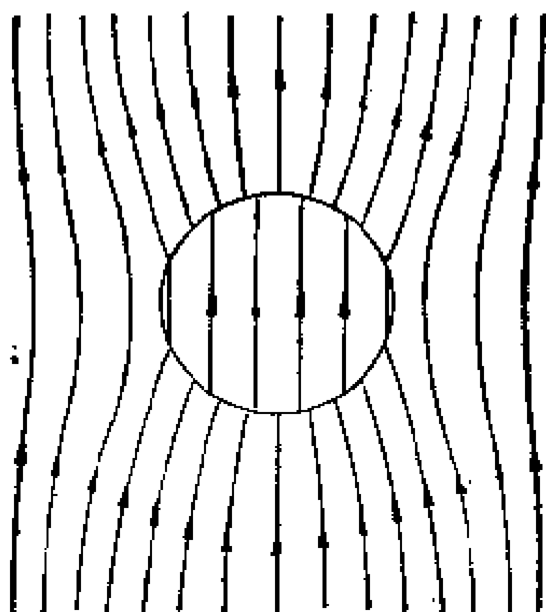


图 9.29 在电介质圆球的里面和外面的总电场 **E**。

上加上一个中心偶极子的场其偶极矩等于 **P** 和圆球体积的乘积。现将电介质圆球内、外的一些 **E** 的场线表示在图 9.29中。

9.12 电荷在电介媒质中的电场和高斯定律

假设在很大体积的均匀电介质中某处有一聚集的电荷 Q，它不是电介质的正式分子结构中的一部分。例如，想像使小金属球带电，然后投入一桶油中。如早先所讲过的在油中的电场强度仅是 Q 在真空中应产生的电场强度乘以 $1/\epsilon$，

$$E=\frac{Q}{\epsilon r^2}. \tag{51}$$

看一看这里高斯定律如何起作用，这将是很有意思的。如果我们相信方程(51)，那么在一个包围着 Q 的球面上，**E**（记住，它是宏观的，即空间平均的电场）的面积分值是 $4\pi Q/\epsilon$ 而不是 $4\pi Q$。为什么不是呢？因为 Q 不是在球内仅有的电荷。还有构成电介质的原子和分子的全部电荷。通常任何数量的油都是电中性的。但是现在油被径向极化了，这就是说，如果

Q是正电荷，则它将把油分子中的负电荷拉向它自己并把正电荷推开．虽然在每个分子中位移可能只是极其微小的，然而平均地说，我们围绕Q所作的任何圆球中包含着的油分子负电荷比油分子正电荷多．所以圆球内的净电荷（包括球心的“外来”电荷Q在内）比Q小．事实上它是Q/ε.

将“外来”电荷Q和构成电介质本身的电荷区别开常常是有用的．对于前者我们能够在某种程度上加以控制——可以把电荷加在一个物体上，或是从物体上移走，例如对于电容器的极板就可以这样作．这样的电荷通常称为*自由电荷*．作为电介质的原子或分子的组成部分的那些电荷，通常叫做“*束缚*”电荷．“*结构*”电荷可能是更好的名称．这些电荷不能自由活动，而是或多或少地受到弹性束缚的，由于它们的微小位移而对极化有所贡献．

我们可以设计出一个矢量，使它和自由电荷有某种像高斯定律那样的关系．我们方才讨论的系统，把一个点电荷Q浸入电介质中，矢量$\varepsilon\mathbf{E}$就有这个性质．即在某个封闭曲面S上取面积分，如果S包围着Q，$\int\varepsilon\mathbf{E}\cdot d\mathbf{a}$就等于$4\pi Q$，如果$S$不包围$Q$，这个面积分就等于零．按叠加原理，对于在无限大的均匀电介质中的由自由电荷密度$\rho_{自由}(x, y, z)$所表示的任意自由电荷集合体，这一关系也一定成立

$$\int_S \varepsilon\mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = 4\pi\int_V \rho_{自由}dv, \tag{52}$$

其中V是曲面S所包围的体积．有这样的一个积分关系就可得出矢量场$\varepsilon\mathbf{E}$的散度和自由电荷密度之间的“局部”关系

$$\mathrm{div}(\varepsilon\,\mathbf{E}) = 4\pi\rho_{自由}. \tag{53}$$

因为我们已经假定在整个媒质中ε是常数，式(53)并没有告诉我们什么新东西．但是它能够帮助我们把束缚电荷的作用单独分离出来．无论在什么系统内，在电场$\mathbf{E}$和总电荷密度

$\rho_{自由}$ 和 $\rho_{束缚}$ 之间的基本关系仍然有效

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi(\rho_{自由} + \rho_{束缚}). \tag{54}$$

由式(53)和式(54)得出

$$\operatorname{div} (\epsilon - 1) \mathbf{E} = -4\pi\rho_{束缚}. \tag{55}$$

根据式(38)，$(\epsilon - 1) \mathbf{E} = 4\pi \mathbf{P}$，所以式(55)可写为

$$\operatorname{div} \mathbf{P} = -\rho_{束缚}. \tag{56}$$

式(56)表明在任何邻域内束缚电荷分布的两个方面，而不说明其他问题. 所以它一定与系统内别处的各种条件无关，也与束缚电荷是怎样维持着它们的特殊排列状况无关. 在某一局部区域(单位体积)因原子核的质子超过原子中的电子所形成的任何形式的束缚电荷密度必然表现为具有一定散度的极化密度. 所以式(56)必然普遍有效，而不只是在无限的电介质里如此. 通过设想几个排列着的有极分子，给出具有正的散度值的极化密度(图 9.30)，我们便能对于式(56)所表示的恒等式有一点感性认识. 偶极子都向外指，必然在当中聚集一些负电荷. 当然，式(56)指的是在许多体积元中取的

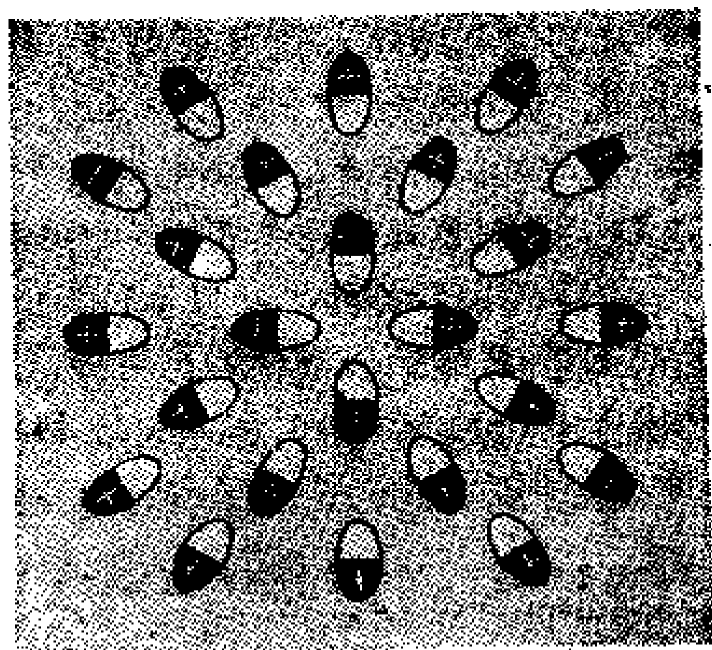


图 9.30　分子偶极子的排列使得 $\operatorname{div}\mathbf{P}>0$. 注意在中心处集中了负电荷和式(56)一致.

平均值，体积元要如此之大以致 $\mathbf{P}$ 和 $\rho_{\text{束缚}}$ 能够按平滑变化量来对待。

由式(54)和式(56)我们得到关系式

$$\operatorname{div}(\mathbf{E}+4\pi\mathbf{P})=4\pi\rho_{\text{自由}}. \tag{57}$$

这和 $\mathbf{E}$ 与 $\mathbf{P}$ 之间的关系完全无关，并不限于 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{E}$ 成正比的，我们称之为电介质的那些材料。

我们通常给 $\mathbf{E}+4\pi\mathbf{P}$ 一个特殊名称，电位移矢量，并以符号 $\mathbf{D}$ 表示它。就是说，我们用

$$\mathbf{D}=\mathbf{E}+4\pi\mathbf{P} \tag{58}$$

定义 $\mathbf{D}$。在各向同性的电介质里，$\mathbf{D}$ 简单地等于 $\epsilon\mathbf{E}$，但是关系式

$$\operatorname{div}\mathbf{D}=4\pi\rho_{\text{自由}} \tag{59}$$

在能够确定宏观量 $\mathbf{P}$, $\mathbf{E}$ 和 ρ 的任何情况下都是成立的。

式(59)的外形可能提示我们应当认为 $\mathbf{D}$ 是一个矢量场，它的源是自由电荷分布 $\rho_{\text{自由}}$，在同样的意义上总电荷分布 ρ 是 $\mathbf{E}$ 的源。但这是错误的。静电场 $\mathbf{E}$ 是由电荷分布 ρ 唯一确定的(除外加的恒电场外)，因为还另有一个普遍适用的关系，$\operatorname{curl}\mathbf{E}=0$，来补充定律 $\operatorname{div}\mathbf{E}=4\pi\rho$。一般地说，$\operatorname{curl}\mathbf{D}=0$ 是不成立的。因此，自由电荷分布不能通过式(59)充分确定 $\mathbf{D}$。还需要其他的东西，例如在各电介质表面的边界条件。对 $\mathbf{D}$ 的边界条件当然只不过是已经在9.10节的末尾讲过的对 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{P}$ 的边界条件的另一表示方式。

在研究物质中电场的方法中，引入矢量 $\mathbf{D}$ 是一个手段，总的说来，不是很有用的。我们提到了 $\mathbf{D}$ 是因为从麦克斯韦[1)]

1) 在麦克斯韦的电磁理论的论述中 $\mathbf{D}$ 的突出地位，以及他选取位移这一名称，或许由于他对"以太"这种机械模型的爱好。Whittaker 在他的名著"以太和电理论的历史"，第一卷，266页(Harper Torchbooks，纽约，1960)中指出，这一爱好或许使麦克斯韦自己在把他的理论应用于光从电介质反射的问题时陷入了错误。

开始，它在传统上受到重视，读者肯定会在别的书中遇见它的，在很多的书中它受到的重视比它应受到的为甚.

关于物质中的电场的主要结论，可以总结如下：

(i) 物质能被极化；就宏观电场而言，极化情况能由极化密度 $\mathbf{P}$，即每单位体积内的偶极矩，完全描述出来. 极化物质对于电场 $\mathbf{E}$ 的贡献和在真空中的具有密度 $\rho_{束缚} = -\mathrm{div}\,\mathbf{P}$ 的电荷分布 $\rho_{束缚}$ 的贡献相同. 具体讲，在极化物质的表面，这里 $\mathbf{P}$ 是不连续的，电荷分布简化为面密度为 $\sigma = -P_n$ 的表面电荷. 再加上可能存在的任何自由电荷分布，电场就是这些总电荷分布在真空中所产生的电场. 这就是在物质之内和物质以外的宏观电场 $\mathbf{E}$，物质之内的宏观电场应理解为是真实的微观电场的空间平均.

(ii) 如果在某一种材料里 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{E}$ 成正比，我们就把这种材料叫做电介质. 我们规定反映这种材料特性的电极化率 χ_e 和介电常数 ϵ 为：$\chi_e = \mathbf{P}/\mathbf{E}$ 和 $\epsilon = 1 + 4\pi\chi_e$. 浸没在电介质中的自由电荷所产生的电场强度是同量的电荷在真空中产生的电场强度的 $1/\epsilon$.

9.13 电极化率和原子极化率的关系

在物质中，极化密度 $\mathbf{P}$ 对宏观电场强度 $\mathbf{E}$ 的比值是电极化率 χ_e. 假设物质是由原子极化率为 α 的原子组成的. 而 $\mathbf{P}$ 仅是，在单位体积中的各个原子的偶极矩 $\mathbf{p}$ 的和. 对于一个原子，如果我们知道 α 以及作用在原子上使之极化的电场，我们就能预言该原子的感生偶极矩. 所以如果我们知道 α 以及每单位体积中的原子数目 N，我们就应该能够预言极化率 χ_e. 我们现在试图建立一个联系 χ_e 和 α 的理论.

在某原子 A 中感生的偶极矩是由作用在该原子上的一切其他场源引起的电场所决定的. 这和在此原子邻域的宏观电

场 $\mathbf{E}$ 是不相同的，因为这个电场 $\mathbf{E}$ 还包括原子 A 本身中的电荷所产生的电场. 所以我们的问题从一开始就碰到了引人兴趣的曲折问题. 为了把情况弄清楚，我们考虑一个很特殊的系统. 我们的物质是由完全相同的原子组成的，这些原子排列在简单立方晶格上，最近邻的原子间隔为 b 厘米. 每个原子的极化率是 α. 图 9.31 是一个穿过晶格的横截面图. 这个区域的宏观电场 $\mathbf{E}$ 的方向就是被极化的原子的畸变方向. 我们的问题是，引起这样畸变的电场有多么大? 可以认为每个原子占据它自己的立方匣子，并且我们假设原子比格子间隔小得很多，所以原子中的所有电荷都十分靠近它所在的匣子的中心.

我们用 $\mathbf{E}_{局}$ 表示作用在原子 A 上的电场. 这个电场的场源是系统中原子 A 以外的其他东西，包括其他原子和外面的任何其他电荷. 如果我们能用魔术拿走原子 A，同时将所有其他电荷分布冻结住，像原子 A 存在时所具有的形式，则 $\mathbf{E}_{局}$ 就是匣 A 中的电场. 在匣 A 中各处 $\mathbf{E}_{局}$ 不是完全一样的，但

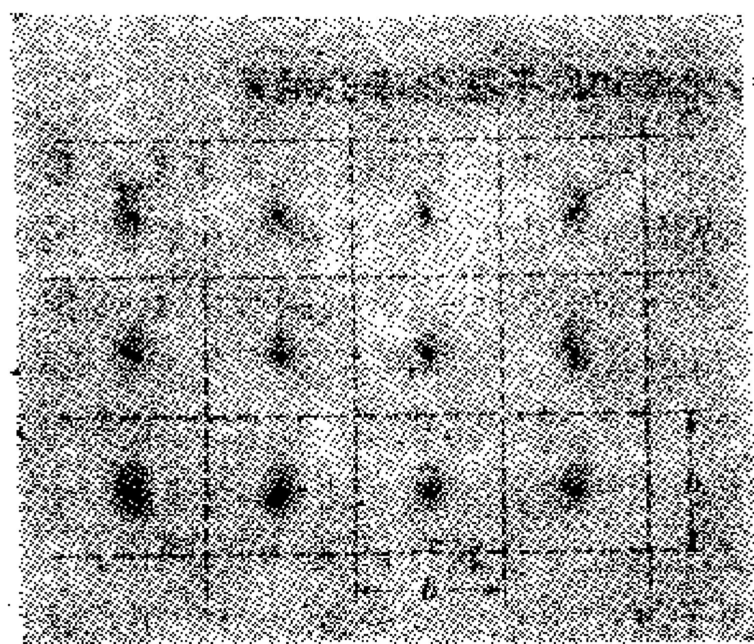


图 9.31　晶体中原子的立方型排列. 各个原子都是已被极化了的.

是我们假设它在匣中的平均值和我们所需要的值是十分接近的。 和通常一样，在匣 A 体积中的平均值我们指的是积分 $\int \mathbf{E}\,dv$ 用匣 A 的体积去除。我们用 $\langle\ \rangle_{匣}$ 表示这个平均值。

用 $\mathbf{E}_{自}$ 表示原子 A 的电场。 在每一点的微观总电场 $\mathbf{E}_{微}$ 是

$$\mathbf{E}_{微} = \mathbf{E}_{他} + \mathbf{E}_{自}. \tag{60}$$

我们知道，宏观电场 $\mathbf{E}$ 等于微观电场 $\mathbf{E}_{微}$ 的空间平均值。 在每一个匣子里 $\mathbf{E}_{微}$ 的变化当然是相同的。 而且匣子之间没有间隙，这些匣子完全填满了空间。所以任何一个匣子内 $\mathbf{E}_{微}$ 的平均值必定和包含很多匣子的较大区域内的平均值相同[1]。由此得出

$$\langle \mathbf{E}_{微} \rangle_{匣} = \mathbf{E}. \tag{61}$$

但是 $\langle \mathbf{E}_{微} \rangle_{匣} = \langle \mathbf{E}_{他} \rangle_{匣} + \langle \mathbf{E}_{自} \rangle_{匣}$。和的平均值等于平均值的和，所以我们所寻求的量 $\langle \mathbf{E}_{他} \rangle_{匣}$，由下式给出

$$\langle \mathbf{E}_{他} \rangle_{匣} = \mathbf{E} - \langle \mathbf{E}_{自} \rangle. \tag{62}$$

我们的问题现在简化为计算位于匣中的原子的电场的匣内平均值 $\langle \mathbf{E}_{自} \rangle_{匣}$。

$$\langle \mathbf{E}_{自} \rangle_{匣} = \frac{1}{b^3}\int_{匣} \mathbf{E}_{自}\, dv. \tag{63}$$

积分必须包括匣中的所有体积元，既有在原子的电荷分布以内的也有在以外的。图 9.32 提示我们电场 $\mathbf{E}_{自}$ 可能是什么样子的。这似乎使我们的工作有些困难了。 然而，我们总是能够一次一个电荷元地处理电荷分布。让我们计算由单个点电荷 q 所产生的电场 $\mathbf{E}_q$ 在匣中的平均值。

如果点电荷是在匣子的中心，如图 9.33 (a) 所示，积分

---

1) 不要不加思考地就接受这个关键性的论断。为什么匣子之间的间隙破坏了这个论断？

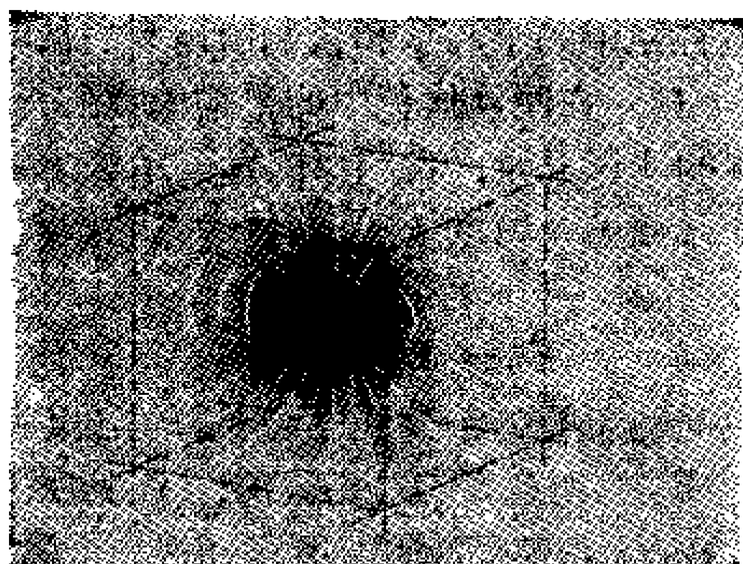


图 9.32 原子 A 和只由这个原子产生的电场 $\mathbf{E}_{自}$。

$\int_{匣}\mathbf{E}_q dv$ 将等于零. 由于对称的关系，匣中的每一体积元和另外一个其中具有相同强度但相反方向的电场的体积元相抵. 现在将电荷 q 向上移动一个小距离 z，如图 9.33 (b) 所

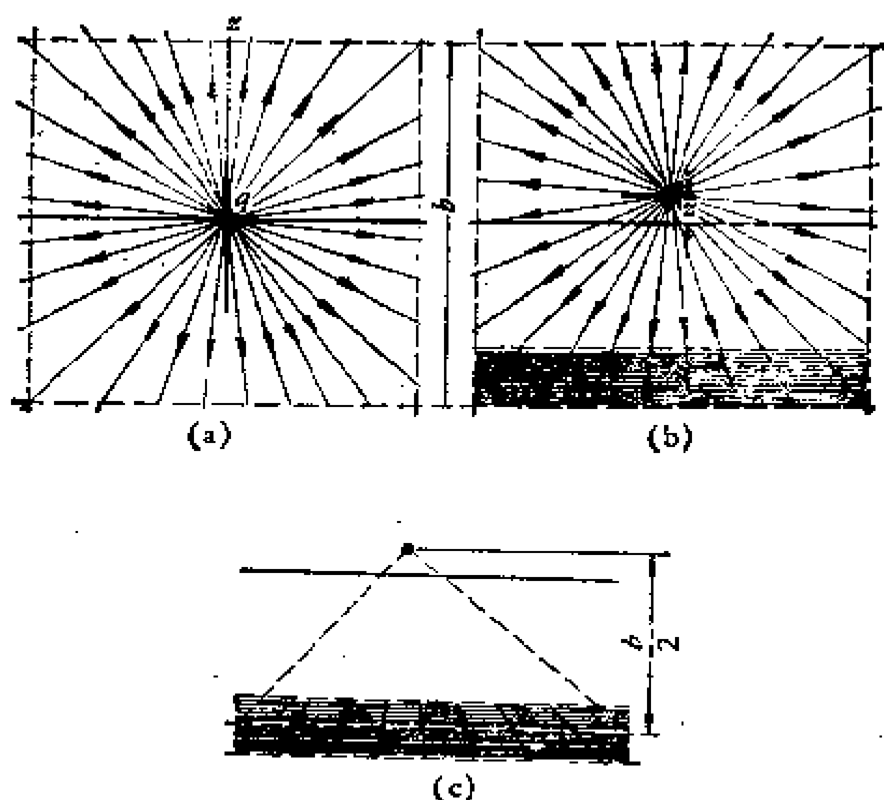


图 9.33 计算在稍微偏离匣子中心处的一个点电荷 q 的电场的"匣内平均"值.

示．在匣子底部有一厚度为 $2z$ 的薄层不能被顶部的对应层所平衡．只是这一层对 $\int_{匣}\mathbf{E}_q dv$ 有贡献．显然，我们只需计算 E_{qz} 的平均值；E_{qx} 和 E_{qy} 的平均值仍然是零．如果我们忽略 E_{qz} 在这个薄层厚度内的微小变化，E_{qz} 在该薄层体积内的体积分就恰好是 $2z$ 乘上 E_{qz} 在该薄层的中间的正方形平面上的面积分［图 9.33 (c)］．

$$\int_{层} E_{qz} dv = 2z \int_{正方形} E_{qz} da. \tag{64}$$

现在高斯定律可以帮助我们，因为在式 (64) 中的面积分正好是 $\mathbf{E}_q$ 通过以电荷 q 为中心的立方体的一个面的通量．这通量必定正好是 $4\pi q/6$，因为一个立方体有六个等效面．我们断定 $2z\int_{正方形} E_{qz} da = -2z(4\pi q/6) = -4\pi qz/3$，所以

$$\langle E_{qz}\rangle_{匣} = \frac{1}{b^3}\int_{匣} E_{qz} dv = \frac{-4\pi qz}{3b^3}. \tag{65}$$

式中的负号表示正电荷的向上位移，使匣内的向下电场占优势．相似的公式适用于电荷沿 x 或 y 方向的位移．所以电荷从中心沿任何方向位移 $\mathbf{r}$，将使匣内产生平均电场 $-4\pi q\mathbf{r}/3b^3$．对于具有电荷分布 $\rho(x, y, z)$ 的整个原子 A，在匣中产生的平均电场是

$$\langle \mathbf{E}_{自}\rangle_{匣} = \frac{-4\pi}{3b^3}\int \mathbf{r}\rho dv. \tag{66}$$

我们可以看出积分 $\int \mathbf{r}\rho dv$ 就是电荷分布的偶极矩 $\mathbf{p}$．［和偶极矩的定义式 (10) 相比较．］我们现在得

$$\langle \mathbf{E}_{自}\rangle_{匣} = \frac{-4\pi}{3b^3}\mathbf{p}. \tag{67}$$

其余部分就容易进行了．由式 (62) 我们立刻可得

$$\langle \mathbf{E}_{他}\rangle_{匣} = \mathbf{E} + \frac{4\pi}{3b^3}\mathbf{p}. \tag{68}$$

如果我们认为 $\langle E_{他}\rangle_{匣}$ 是使原子极化的有效电场，则 $\mathbf{p}$ 和这个

电场通过原子极化率联系起来，

$$\mathbf{p}=\alpha\langle E_{他}\rangle_{匣}. \tag{69}$$

由式(68)和式(69)我们得到联结 $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{E}$ 的关系式

$$\mathbf{p}=\alpha\left[\mathbf{E}+\frac{4\pi\mathbf{p}}{3b^3}\right], \tag{70}$$

这可用宏观极化密度 $\mathbf{P}$ 表示出来．因为每立方厘米的极化原子数 N 等于 $1/b^3$，所以 $\mathbf{P}=N\mathbf{p}=\mathbf{p}/b^3$．代入式(70)

$$\mathbf{P}=N\alpha\left[\mathbf{E}+\frac{4\pi\mathbf{P}}{3}\right], \tag{71}$$

整理后，可得

$$\mathbf{P}=\left[\frac{N\alpha}{1-(4\pi/3)N\alpha}\right]\mathbf{E}, \tag{72}$$

括弧内的因子必然是电极化率 χ_e.

在推导式(72)的过程中我们作了两个近似．我们曾假设原子电荷分布全部都靠近匣子中心；如果 z 或 $\mathbf{r}$ 和 b 相比不是很小的，则式(65)和式(66)是不准确的．并且，作为使原子极化的电场，我们用的是 $\mathbf{E}_{他}$ 在匣内的平均值，而不是 $\mathbf{E}_{他}$ 在原子中心的值．对于像在大多数晶体中那样紧密排列的原子，第一个假设是不很现实的，而第二个假设所涉及的问题是没有关系的．我们不能期望实际晶体准确地遵守式(72).

如果物质中的原子彼此相距很远，因而，$4\pi N\alpha/3\ll 1$，我们就可以把式(72)的分母中的这一项略去不计，得

$$\chi_e=N\alpha. \tag{73}$$

如果我们不考虑偶极子的相互影响，这就是我们应当得到的结果．这结果对正常密度的气体非常符合，在这种情形下被略去的那一项的数量级是 10^{-3}．在这个限度内原子的几何排列是没有关系的，只是每立方厘米的原子数有关系．所以准

确地测出低压气体的介电常数就可以确定原子极化率，而没有偶极子互相作用所引起的复杂问题．然后，测量较稠密的同一物质[1]，则可以用来检验理论公式，例如式(72).

在式(72)的分母中的$-4\pi N\alpha/3$项反映晶体中极化原子的相互作用．显然相互作用具有增强的性质，使极化密度要比没有相互作用时所引起的极化密度大．如果我们认真地研究这个数学公式，就会发现它提出了一个惊人的可能性．如果$N\alpha$是如此之大以致$4\pi N\alpha/3$等于或超过一，那么将会怎样呢？似乎χ_e将达到无限大．这就意味着外加电场为零时也有极化现象！这似乎是荒谬的，但也并不完全是荒谬的．已经知道有些晶体确实显示出自发的电极化．然而，在这种情形中除感生极化现象外还包含某些其他问题，所以我们的理论是不适用的．实际上，要使$4\pi N\alpha/3$近于一，原子必须是如此密集，以致于我们的近似根本不适用了．(参看习题 9.30).

9.14 极化时的能量改变

把电容器充电到电势差V，必须作$\frac{1}{2}CV^2$的功．使电容器经过外电路放电，还能把这一能量收回．这能量已经贮存在充电的电容器中了．在第二章中曾证明过，赋予电场每立方厘米$E^2/8\pi$尔格的能量，我们就能计算任何静电系统中贮存的能量．作为复习，板面积为A，距离为t的平行板真空电容的电场强度E是V/t，所以

$$(E^2/8\pi)\times\text{体积}=V^2A/8\pi t=\frac{1}{2}CV^2.$$

---

1) 能够证明式(72)所给出的关系式应当不仅适用于立方对称的晶体，而且也适用于气体，它们的原子在空间的位置是杂乱无章的．关于这一点的最好的实验证明可从测量在较高密度和较大压力下的气体的介电常数中得到．(参看习题 9.28).

如果电容器中填充上介电常数为 ϵ 的电介质，并将其充电到相同的电势差 V，因为 C 增大为 ϵ 倍，所作的功必将增至 ϵ 倍。但是 E 是相同的。所以电介质中单位体积的能量不是 $E^2/8\pi$，而是 $\epsilon E^2/8\pi$。这个结果可推广到任何静电系统。我们现在用

$$能量 = \frac{1}{8\pi}\int \epsilon E^2 dv \tag{74}$$

代替式(2.36)。

这"额外的"能量是怎样贮存下的？考虑一个孤立的可极化的分子，对它可以施加一个电场。在图 9.34 中，这个分子用固定在弹簧两端的两个电荷来表示。它的偶极矩 $\mathbf{p}$ 是一个大小为 qs 的矢量。电场 $\mathbf{E}$ 是由某外场源产生的，例如图中所示的极板和电池。假设在有电场 $\mathbf{E}$ 时，电荷移开一个小距离 ds。因此偶极矩 qs 变为 $q(s+ds)$。这样就有电荷沿 $\mathbf{E}$ 方向的移动，相当于电荷 $+q$ 移动距离 ds。（无论是一端移动还是两端都移动，是无关紧要的）。所以对分子作了 $Eqds$ 的功。这个功的根本供给者是电场的电源——在图 9.34 中是维持极板之间恒定电势差的电池。如果 dW 表示对分子所作的功，则

$$dW = Eqds = \mathbf{E}\cdot d\mathbf{p}. \tag{75}$$

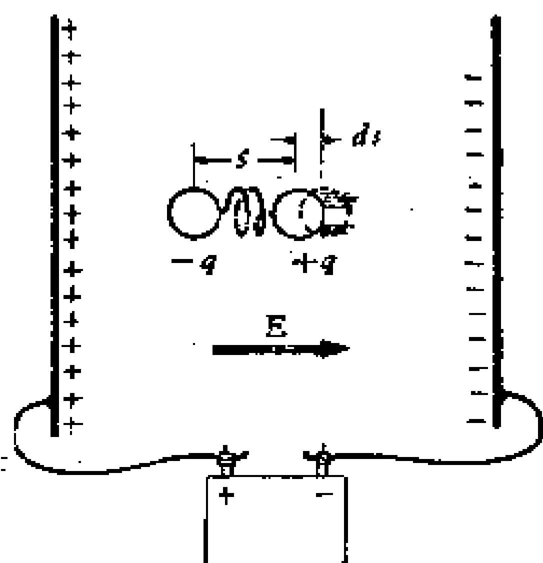


图 9.34 一个可极化的分子相当于用弹簧连在一起的两个电荷．在电场 $\mathbf{E}$ 中弹簧被拉长．

与此功相当的贮存起来的能量，可以在两个地方找到，即在被拉长的弹簧中和在分子偶极子本身的电场中，现在分子偶极子的电场有更多的总能量，因为这两个电荷离得更

远了．在实际分子的情形，我们不必作这样的区分．所有的能量都是属于分子结构的，如果我们研究分子的动力结构，我们就会发现这能量是静电势能和电子运动的动能． 重点在于：作用在分子上改变分子极化状态的功，$\mathbf{E}\cdot d\mathbf{p}$，使分子本身恰好增加了这些能量．

让我们看看贮存在电介质中的能量有多少是由这种方式产生的．在每单位体积中有N个分子的情形，$\mathbf{P}=N\mathbf{p}$．当$\mathbf{P}$改变了$d\mathbf{P}$时，则$\mathbf{E}\cdot d\mathbf{P}$是一立方厘米中的分子的内能的增量．但是因为$\mathbf{P}=(\epsilon-1)\mathbf{E}/4\pi$，

$$\mathbf{E}\cdot d\mathbf{P}=\frac{1}{4\pi}(\epsilon-1)\mathbf{E}\cdot d\mathbf{E}=\frac{1}{8\pi}(\epsilon-1)d(E^2) \quad (76)$$

所以，看来似乎贮存在电介质中的 $\epsilon E^2/8\pi$ 尔格的能量中，有$(\epsilon-1)E^2/8\pi$能看作为极化分子所增加的内能．其余的$E^2/8\pi$恰好是贮存在真空电场中的能量．

9.15 由有极分子构成的电介质

具有永久偶极矩的分子，即有极分子，在电场作用下，趋向于排成和电场平行的方向．它的适当的机械模型不是在弹簧端点上的两个电荷，而是固定在硬棍端点上的两个电荷(图9.35)．如果棍子不和电场平行，就有一个大小为$Eqs\sin\theta$的力矩作用在它上面．在角位移$d\theta$内所作的功是(力矩×角位移)即 $Eqs\sin\theta d\theta$．这也可以用大小为qs的偶极矩矢量$\mathbf{p}$和转动$d\theta$后$\mathbf{p}$的改变$d\mathbf{p}$来表示．由图9.35可以清楚地看出，dp的大小是$pd\theta$，它的方向应该符合于$\mathbf{E}\cdot d\mathbf{p}=Edp\sin\theta$．所以 $dW=\mathbf{E}\cdot d\mathbf{p}$． 这和式(75)一致，本来就应该是一致的．

如果一个孤立的有极分子，在施加电场$\mathbf{E}$的瞬间，是在图9.35中所示的位置，它将转向电场的方向，但是它将超过平衡位置继续转动，并且要像摆一样地摆动，因为它没有除掉

它的能量的方法. 然而，为其他分子所包围的一个实际分子能够和它的邻近分子交换能量，提供一种“摩擦”，使振荡衰减. 似乎这将导致物质中的有极分子都安定下来，并和任何外加的电场完全平行，无论电场是多么弱. 假设转动仍然是可能的话，这将是在温度绝对零度的情形. 在绝对零度以上的任何温度，热骚动的无规则运动反抗有规则的排列，而温度越高热骚动越强. 外加的电场强烈地使每一分子偶极子倾向于指向电场的方向，但是每一分子不断地为它的邻近分子所冲撞，它最多只能是指向正确方向的时间比指向错误方向的时间略长一点. 例如水，1000伏特/厘米的电场所产生的极化密度相当于大约每三千个分子中有一个分子完全按场的方向排列着. 尽管如此，这也比无极分子构成的物质在同样的电场下所显示出的极化密度大得多，并且这是水有非常高的介电常数的原因. 在有极分子构成的电介质中，体极化密度一般和外加的电场强度成正比，和绝对温度成反比.

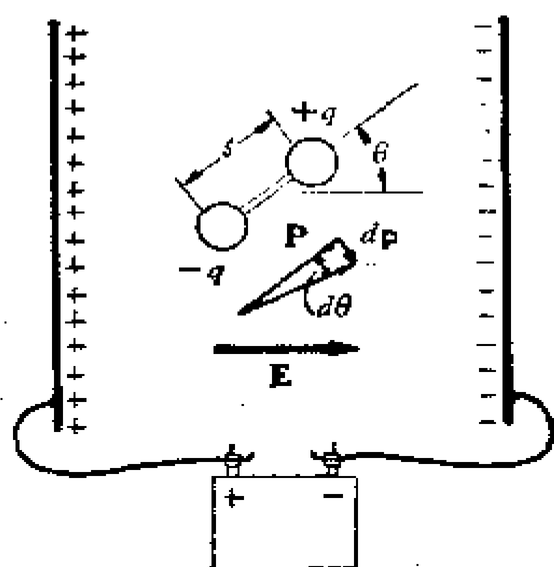


图9.35 有极分子好象是在硬杆的两端点上的两个电荷. 电场 **E** 对这个结构施加一力矩.

9.16 变化电场中的极化

到现在为止我们只讨论了物质中的静电场. 我们需要研究一下随时间变化的电场，例如在交流电路中所用的电容器中的电场的效应. 重要的问题是，极化的变化能跟得上电场的变化么？ 在任何时刻 **P** 对 **E** 的比值和在静电场中的一样么？

我们预料对于很慢的变化是不会有什么差别的，但是和通常一样，慢的标准是决定于个别物理过程的。我们发现，感生极化和永久偶极子的取向是两个具有非常不同的响应时间的过程。

原子和分子的感生极化是由于电子结构的变形而发生的。只牵涉到少许的质量，而且结构是很坚硬的；它的自然振动频率是非常高的。换句话说，电子在原子和分子中运动的特点在于运动周期的数量级是 10^{-16} 秒——和可见光波的周期相近。对于原子来说，10^{-14} 秒是一个长时间。在这样长的时间内，重新调整它的电子构造是没有困难的。因此，从“直流”到接近可见光的频率的范围内，严格的无极分子所构成的物质的性质实际上是一样的。极化和电场保持同步，并且极化率 $\chi_e = \mathbf{P}/\mathbf{E}$ 和频率无关。当电场变化的频率趋近于电子结构的自然频率时会发生什么现象是一有趣的问题，须留到下一卷再讲。(一个结果是虹！)

有极分子的取向过程和仅仅电子云的变形是很不相同的。它的整个分子构架必须转动。按照微观尺度，这有些像使一袋子花生里的一个花生转个头。摩擦阻力有使转动落后于力矩的趋势，并且有使所得到的极化振幅减小的趋势。在时间尺度上这个效应从那一点开始，对于不同的极性物质有很大的差异。在水中，偶极子的重新取向所需要的“响应时间”大约是 10^{-11} 秒。频率在每秒 10^{10} 周的数量级以下，介电常数保持在 80 左右。在 10^{11} 周/秒以上，ϵ 下降到一个无极分子液体所具有的典型值。偶极子就是不能这么快地跟着电场变化。其他物质的，特别是固体的，特征响应时间要长得多。刚好在凝固点以下的冰中，电极化的响应时间是 10^{-5} 秒左右。图 9.36 表示水和冰的介电常数随电场频率变化的一些实验曲线。

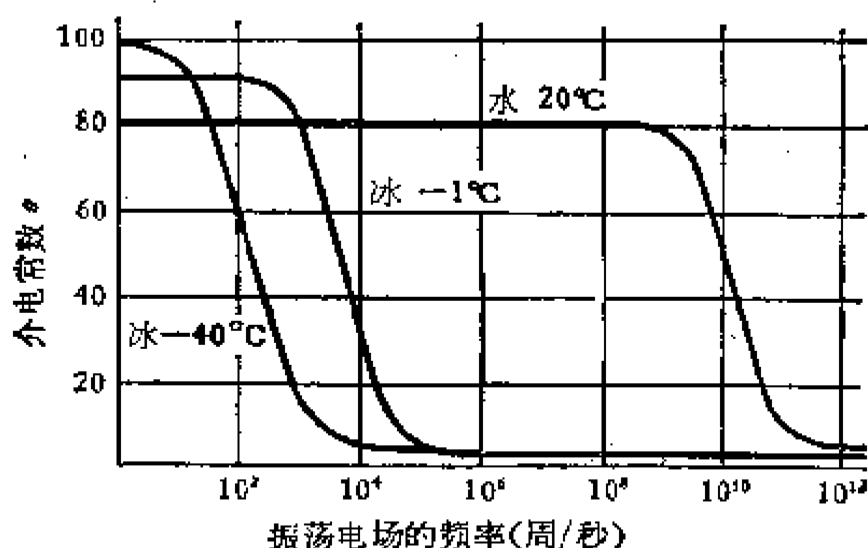


图 9.36 水和冰的介电常数随频率的变化.（水的数据取自 *C. P. Smyth*,“电介质的性质和构造” McGraw-Hill，纽约，1955，冰的数据取自 *R. P. Auty* 和 *R. H. Cole*, *J. Chem. Phys.* **20**, 1309, 1952）

你可能要问，像在晶体那样密集坚硬的物质中，一个有极分子是否真地能够翻转. 在许多晶体中确实发生这种情况，一个分子由于它的邻近分子的振动，可以忽然得到它自己作整体翻转所需的足够空间. 但这是一个好的问题，因为在某些固体里，可能发生一些电荷的移动，不能用永久分子偶极矩的转动来说明. 我们现在就回到这个问题上来.

9.17 束缚电荷的电流

物质中的极化密度随时间而改变的地方都会有电流，即真正的电荷运动. 假设在一立方厘米的电介质中有 N 个偶极子，并且在时间间隔 dt 内每一个偶极矩从 $\mathbf{p}$ 改变到 $\mathbf{p}+d\mathbf{p}$. 则宏观的极化密度 $\mathbf{P}$ 由 $\mathbf{P}=N\mathbf{p}$ 变到 $\mathbf{P}+d\mathbf{P}=N(\mathbf{p}+d\mathbf{p})$. 假设变化 $d\mathbf{p}$ 是由于一个电荷 q 移动距离 $d\mathbf{s}$ 而引起的，在每个原子内：$qd\mathbf{s}=d\mathbf{p}$. 则在时间 dt 内，确实有一个密度为 $\rho=Nq$ 的电荷云以速度 $\mathbf{v}=d\mathbf{s}/dt$ 移动. 这是一电流密度为 $\mathbf{J}$

(静电单位/秒)/厘米²的传导电流

$$\mathbf{J}=\rho\mathbf{v}=Nq\frac{d\mathbf{s}}{dt}=N\frac{d\mathbf{p}}{dt}=\frac{d\mathbf{P}}{dt} \tag{77}$$

极化密度的改变率和电流密度之间的关系，$\mathbf{J}=d\mathbf{P}/dt$，和模型的细节是无关的. 极化密度的改变就是传导电流，二者没有本质上的区别.

自然，这样的电流是磁场的源. 如果附近没有其他电流，我们应当将麦克斯韦第二方程，

$$\text{curl } \mathbf{B}=(1/c)(\partial\,\mathbf{E}/\partial t+4\pi\,\mathbf{J})$$

写成

$$\text{curl } \mathbf{B}=\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\,\mathbf{E}}{\partial t}+4\pi\frac{\partial\,\mathbf{P}}{\partial t}\right) \tag{78}$$

"普通的"传导电流密度和电流密度 $\partial\mathbf{P}/\partial t$ 之间的唯一区别是：一个是自由电荷运动，另一个是束缚电荷运动. 有一个相当明显的实际区别——不可能有稳恒的束缚电荷电流，即长久不变化地继续流动下去的束缚电荷电流. 通常我们宁愿分别考虑束缚电荷电流和自由电荷电流，而保留 $\mathbf{J}$ 只作为自由电荷电流密度的符号. 为了将所有的电流都包括到麦克斯韦方程里，我们必须把它写成

$$\text{curl } \mathbf{B}=\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+4\pi\underbrace{\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}}_{\text{束缚电荷电流密度}}+4\pi\underbrace{\mathbf{J}}_{\text{自由电荷电流密度}}\right). \tag{79}$$

在介电媒质中，$\mathbf{E}+4\pi\mathbf{P}=\epsilon\mathbf{E}$，这使式(79)有一比较简单的形式

$$\text{curl } \mathbf{B}=\frac{1}{c}\left(\epsilon\frac{\partial\,\mathbf{E}}{\partial t}+4\pi\,\mathbf{J}\right). \tag{80}$$

更一般地，可以引用以前定义为 $\mathbf{E}+4\pi\mathbf{P}$ 的矢量 $\mathbf{D}$，把式(79)简单地写成

$$\operatorname{curl} \mathbf{B} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + 4\pi \mathbf{J}\right), \tag{81}$$

通常 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ 称为位移电流．实际上，如我们已知的，其中 $\partial \mathbf{P}/\partial t$ 那一部分代表真正的传导电流，实际的电荷运动．在总电流密度中，唯一不是电荷运动的部分只是 $\partial \mathbf{E}/\partial t$，它是我们在第七章末尾所讨论的真正的真空位移电流．附带说一下，如果我们想把总电流密度的所有成分都用和 $\mathbf{J}$ 的单位相同的单位来表示，应当注意在第一项中没有 4π，可将式(79)整理为下列形式

$$\operatorname{curl} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\left[\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{J}\right]. \tag{82}$$

↑ 真空位移电流密度　↑ 束缚电荷电流密度　↑ 自由电荷电流密度

在讨论束缚电荷和自由电荷的区别中我们还有一个没有正视的问题：人们是否总是能够明确地认出物质中的"分子偶极矩"来，特别是在固体里？答案是否定的．让我们微观地观察一下氯化钠晶体的一个薄膜．在图 1.7 中曾画出正钠离子和负氯离子的排列．图 9.37 是这个晶体的横截面，它向左右延伸出去．如果愿意的话，我们可以认为相邻的两个离子是具有偶极矩的一个中性分子．把它们如图 9.37(a)所画的样子组合起来，于是可将这个媒质描述为具有均匀的宏观极化密度 $\mathbf{P}$，$\mathbf{P}$ 是一个向下指的矢量．同时，我们看到在晶体顶部有一层正电荷，在底部有一层负电荷，它们没有被包括在我们所考虑的分子里，必须把它们看作是自由电荷．

我们同样也可以像图 9.37(b)那样来组合离子．按照这种描述，$\mathbf{P}$ 是一个向上的矢量，但是在这种情况下，在晶体顶部有一层负自由电荷层，在底部有一层正自由电荷．两种描

述全是正确的．我们不难想出另外一种也是正确的描述，其中 $\mathbf{P}$ 是零，没有自由电荷．每种描述都预示 $\mathbf{E}=0$．宏观电场 $\mathbf{E}$ 是一个能观测的物理量．它只决定于电荷分布而不决定于我们愿意怎样来描述电荷分布．

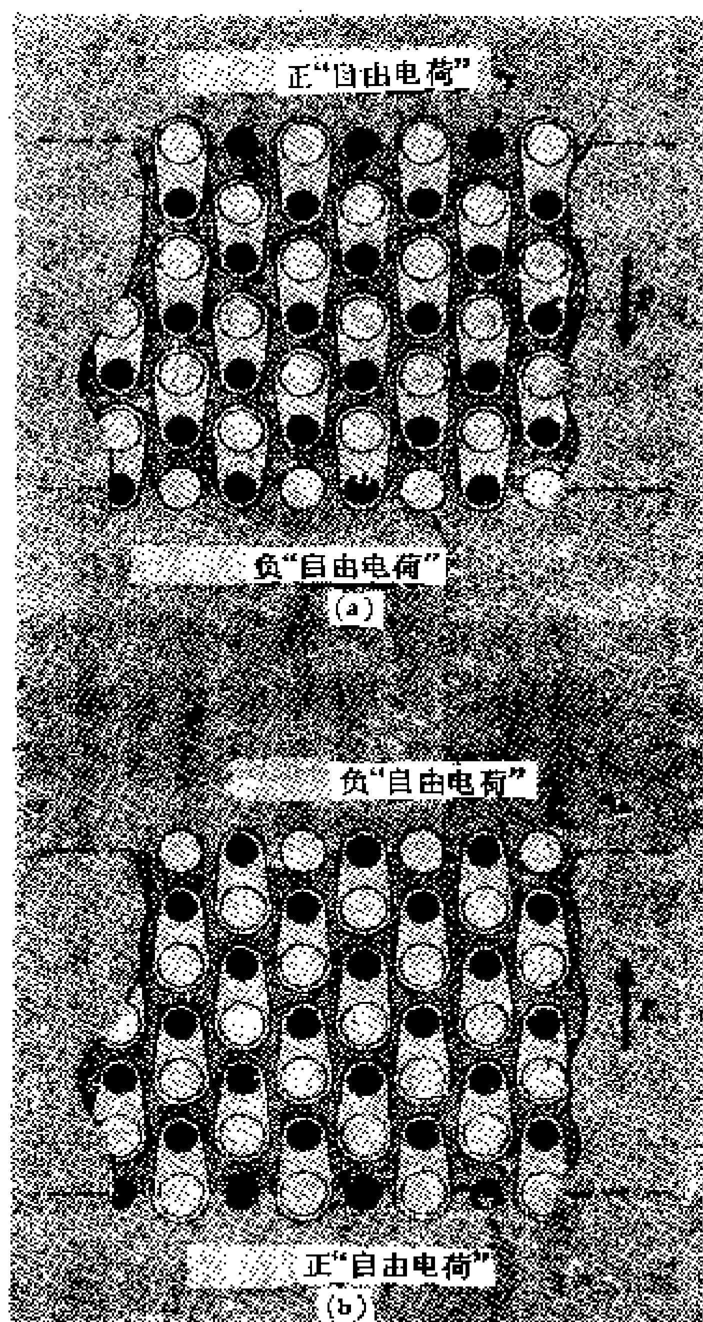


图 9.37 同一离子晶体，其电荷成对地组成"分子"，画出两种方式：矢量向下指(a)，或向上指(b)．两个系统在物理上是等同的；只是在描述上不同．

这个例子告诉我们，在实际的原子世界里，“束缚电荷”和“自由电荷”之间的区别是或多或少地带有任意性的，所以极化密度 **P** 的概念也是如此. 只有在分子能被辨认出来的地方，也就是只有在有某种物理上的理由能说明“这个原子属于这个分子而不属于那个分子”的地方，分子偶极子才是一个有意义明确的概念. 在许多晶体中，这样的指定组合是没有意义的. 一个原子或离子可以和它所有的邻近原子有同样强度的相互作用；人们只能把整个晶体当作一个单独分子来讨论.

区别自由电荷和束缚电荷的任意性，自然也存在于自由电荷电流密度 **J** 和 $\partial\mathbf{P}/\partial t$ 中. 考虑像冰那样的晶体的极化. 晶格是三维的，但是我们在图 9.38 里画出了具有一些相似特性的二维排列. 让我们也把它叫做冰. 在图 9.38 (a) 里我们容易地辨认出 H_2O 分子来，因为我们注意到每一个氧原子恰好有两个H原子靠近它. 所画的晶体是极化了的. 因为，如本章中以前所讲过的，水分子中氧的一端有过多的负电荷，所以 **P** 指向下方. 我们可以认为图中黑色的氢的部分是正电荷. 现在假设有某种原因将这晶体的内部情况改变成图 9.38 (d)中那样，它是同一个区域的微观图. 现在，偶极子反转了，晶体具有向上的极化密度了.

这个变化可以通过两个本质上不同的方法产生，如图 9.38 (b) 和 (c) 所示. 在图 9.38 (b) 中加上了一个向上的电场 **E**，将分子的正端向上推，实际上是使每个分子都翻转过来了. 正电荷有一个净的向上移动；它所表现的电流可纳入我们刚学过的 $\partial\mathbf{P}/\partial t$ 项中.

图 9.38(c) 描绘一个完全不同的过程；其中加上一个向下的电场，使氢原子改换了伙伴. 每个氢原子移至它下面的最近的O原子的近旁. （在实际晶体中这是很容易实现的，因为在两个O原子之间的 H，在某种程度上为两个O原子所共有，

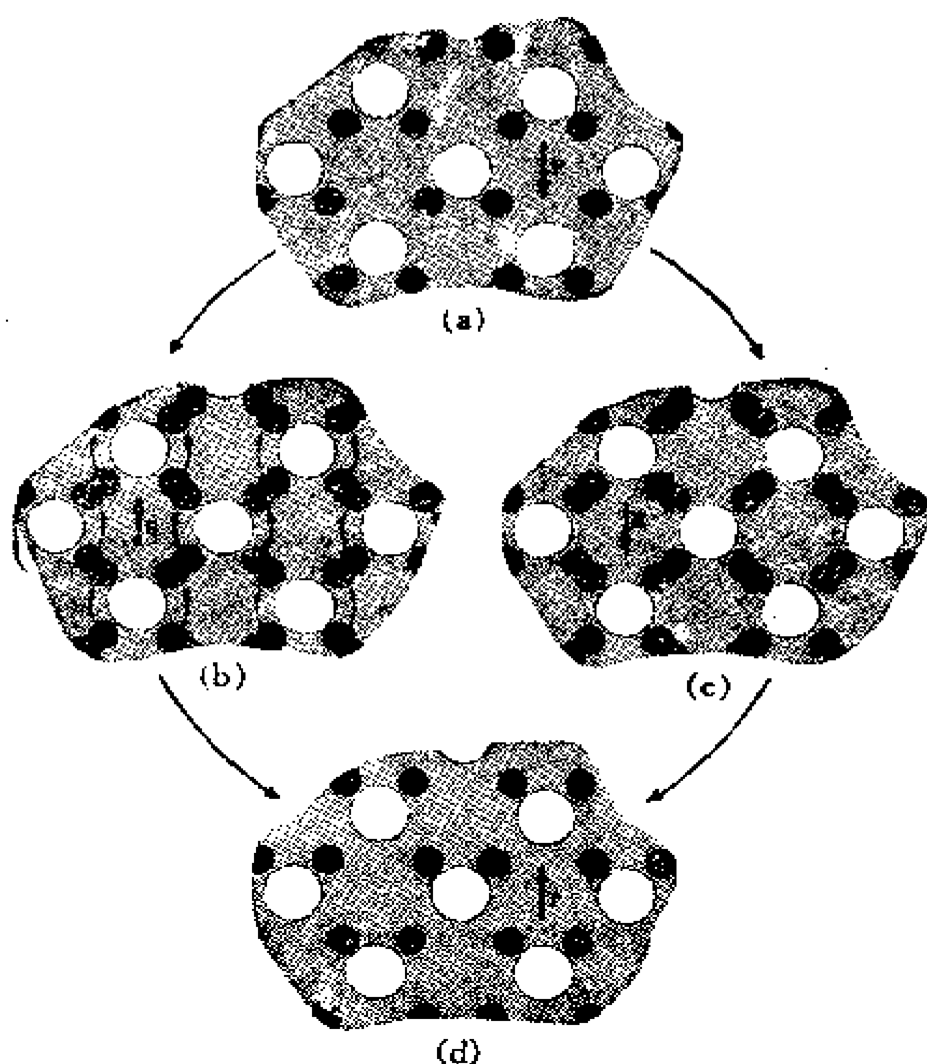


图 9.38 极化分子群的晶格(a)可由两种方式(b 或 c)改变成沿相反方向极化的分子群的晶格(d).

以提供结成晶体的"氢键".)最后的组态看起来是完全一样的. 偶极子全都反转了——但实际发生的是正电荷的向下流动. 如果我们要把在这个过程中的电流合计起来作为式(79)右边的一项，我们就必须和从前一样把它归入 $\partial \mathbf{P}/\partial t$中，这相当于一个向上的电流，但是我们还必须加上一个更大的向下传导电流 $\mathbf{J}$，它相当于每个电荷向下移动了一个整个晶格间距 d. 二者的差是正电荷真正向下移动一个距离 s 所引起的真正的净电流.

请注意在每种情形中，总电流都是沿外加电场的方向流

动的．单从宏观测量，我们不能说出发生的是哪一种微观过程．诚然，人们仍然在争论着关于冰的极化机理．为了解决这一个争论，人们需要对微观结构有足够的了解，从而断定是反转个分子容易些，还是移动质子容易些．对于我们来说，所得到的结论只是：所有电荷（包括自由电荷和束缚电荷）的实际微观运动决定总传导电流．

习　　题

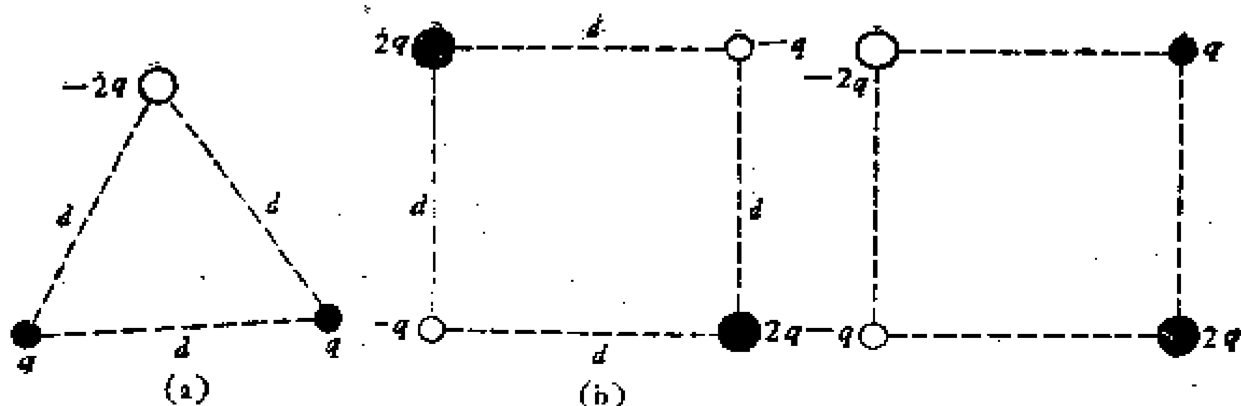
9.1　有足够的聚乙烯带，介电常数是 2.3，宽 2.25 英寸，厚 0.001 英寸；又有足够的铝带宽 2 英寸，厚 0.0005 英寸．打算制造一个电容大约为 0.05 微法的电容器，它的形状是一个卷紧的圆柱形卷．说明应该怎样做，并估计每种带的需要量以及作成后电容器的总直径．

[设计一个实用的电容器]

9.2　1746 年莱顿的 Musschenbroek 教授从一个玻璃瓶的颈口引出一根导线与一静电起电机相接触，使瓶中的水带电．当他的助手用一只手拿住瓶子用另一只手去移动导线的时候，他受到强烈的震动．这个简单的电容器就这样引起了电气科学家们的注意．"莱顿瓶"的发现引起了电学实验的革命．在 1747 年，富兰克林就已经叙述了他用"Musschenbroek 的奇异瓶子"所作的实验．这个瓶子没有别的东西，只是在玻璃瓶内外面上涂了一层导体．为了明了为什么会引起这样一种感觉，试估计由瓶壁厚为 2 毫米，介电常数为 4 的玻璃作成一个一公升的莱顿瓶电容器，它的电容有多大？在空气中，多大直径的圆球才能有这样大的电容？

9.3　习题 9.3 的 (a)，(b) 和 (c) 三部分中每一电荷分布的偶极矩是多大？偶极矩矢量 **p** 的方向如何？

9.4　在氯化氢分子中，氯的原子核和质子的距离是 1.28



习题 9.3

埃. 假设氢原子上的电子完全转移到氯原子上，和其他电子联合起来形成以氯原子核为中心的球形对称的负电荷. 这个模型的电偶极矩和在图 9.16 中给出的实际的 HCl 偶极矩相比怎么样？在实际分子中，负电荷分布的实际“重心”应该在什么地方？（氯原子核有电荷 $17e$，氢原子核有电荷 e.）

[一个分子中的电荷分布]

9.5 在原点有一个氯化氢分子，H–Cl直线是沿着 z 轴的方向的，Cl 在最上面. 在 z 轴上，在原点以上 10 埃的一点的电场的方向如何？强度是多少静伏/厘米？在 y 轴上，原点以外 10 埃的一点的电场又是多大？

[一个分子偶极子的电场]

9.6 把具有电容 $C=250$ 厘米的一个平行板电容器充电到 6 静伏的电势差. 两板相距 1.5 厘米. 我们现在研究在电容器外边的电场，这是我们常常忽视的所谓“边缘”场. 特别是我们希望知道远离电容器地方的电场，距电容器的距离和电容器本身的大小相比要大得多. 这可以将电容器上的电荷分布当作一个偶极子来计算. 估计 (a) 在板的平面上，离电容器 3 米远的一点的电场强度及 (b) 在和板面垂直的方向上，离电容器 3 米远的一点的电场强度.

[一个宏观偶极子的电场]

9.7 在 4.11 节中我们讨论了用电阻率为 ρ 的材料所填充的电容器的弛豫时间. 如果回头看一下那个讨论，我们将会注意到我们避开了材料的介电常数的问题. 现在我们可以补足那个欠缺. 将 ϵ 适当地引进时间常数的表达式中. 对于我们都很重要的一个漏电电容器是由一个活细胞壁形成的电容器，细胞壁是一个分开两导电流体的绝缘体(还有许多其他功能!). 在神经细胞的情形，它的电性质是特别有意义，因为神经冲动的传播伴随着内外之间电势差的迅速改变. 在 3.5 节的脚注里，我们提到过细胞膜电容器膜面积和电容的关系，其典型值大约是 1 微法/厘米^2. 认为细胞膜是由介电常数大约为 3 的材料构成的. 现在你可以算出这膜有多厚. 其他的电测量表明，如果从细胞壁两边的导电流体来测量的话，则可得到每平方厘米的细胞壁的电阻是 1000 欧姆左右. 试证明这样一个漏电电容器的时间常数和电容器的面积无关. 在这种情形，它的时间常数有多大? 这种膜材料的电阻率 ρ 是在图 4.6 的哪个地方?

[漏电电容器]

9.8 如果在半径为一毫米的水滴里，所有的分子偶极子都指向同一方向，(a) 离水滴 10 厘米远处的最大电场强度是多大? (b) 在水滴表面是多大?

[一个极化圆球]

9.9 电介质球的公式实际上能用来描述在均匀电场中的金属球. 为了说明此点，研究极限情形，$\epsilon \to \infty$，然后证明外部电场所取的形式满足理想导体的边界条件. 内部电场将如何? 对于这极限情形画出一些电力线来. 在电场 E_0 里，在一个半径为 a 的导体圆球中感生的偶极矩是多大? 和氢原子有相等的极化率的一个理想的导体球应该有多大的直径?

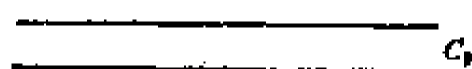
[在均匀电场中的球形导体]

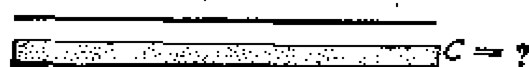
9.10 在相同的电场里，一小滴水（$\epsilon=81$）的感生偶极矩和具有相同直径的一个球形滚珠的偶极矩相差的百分比是多少?

9.11 在 9.10 节中，在极化的圆球内部的电场是均匀的这一事实是从边界上的电势的形式推导出来的．将中心不在一起的两个电荷圆球的内部电场重迭起来，也能证明这一结果．(a) 证明在一球形的均匀电荷分布的内部，$\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{r}$ 成正比．(b) 密度为 ρ 和 $-\rho$ 的两个球形分布，球心在 C_1 和 C_2，试证明合成的电场是不变的并且和 C_1 到 C_2 的直线平行．(c) 用同样的方法分析一根圆柱形长棒的电场，这根长棒是在和它的轴垂直的方向极化的．

[极化的圆球中的电场的另外一种推导法]

9.12 右图表示三个具有相同面积和板间距离的电容器．以 C_0 表示真空电容器的电容．其他两个电容器每个都用电介质填充了一半，电介质有相同的介电常数 ϵ，但是，如图所示，填充方式不一样．求每个电容器的电容(略去边缘效应.)







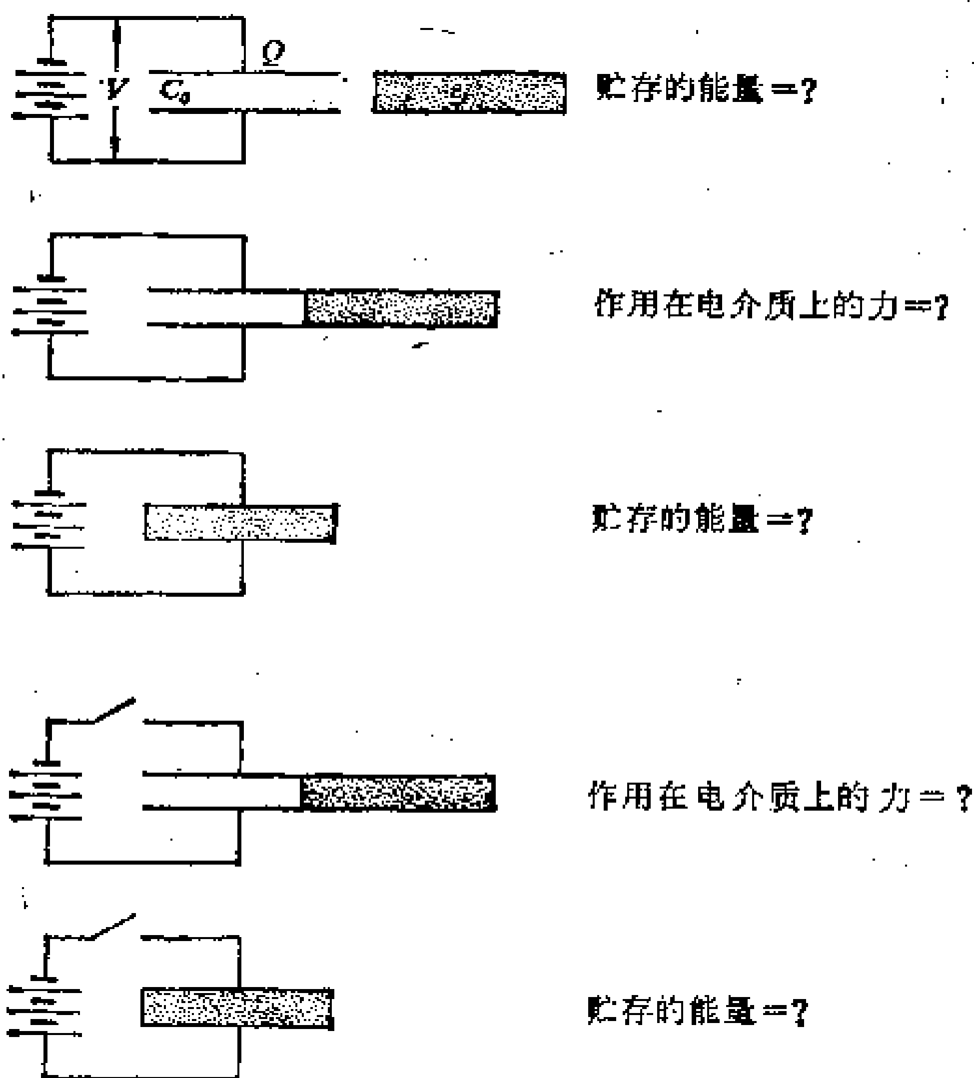
习题 9.12

9.13 认为电容器只是贮存能量的一种器件．对于电容器两板间电势差的实际限制是电介质填充物的“介电强度”，即在电介质中不致引起火花的最大电场强度．对于具有 $\epsilon\approx 2.3$ 和密度≈ 1 克/厘米^3 的好的液体电介质，这个值一般地在 10^5 伏特/厘米左右．略去电极和盛液箱子的重量，在每公斤的电容器中能够贮存多少焦耳的能量?（请注意这和电容，形状，板极的数目等无关）．以焦耳/公斤数作为能量贮存器的

“性能因数”，试将电容器和汽车的蓄电池以及旋转飞轮相比较．这就必须先对蓄电池的重量和能量输出作某些适当的推测，并且明确什么限制了飞轮的速率．将电容器作为能量贮存器的好处是什么？

[在电容器中贮存能量；一些实际的考虑]

9.14 图中用图解法表示两种不同的过程，在每一过程中都是将一块电介质插入带电的电容器的板极的中间去．试按照图中问题的提示来分析所涉及的能量变化．作用在电介质上的力如何？



习题 9.14

9.15 一个半径为 a 的金属球为一厚电介质外壳所包围，壳的内半径是 a，外半径是 b，介电常数是 ϵ. 金属球带有自由电荷 Q. 在电介质表面上或在内部都没有自由电荷. 透彻地分析这个系统，确定金属球的电势及束缚电荷的分布.

第十章　物质中的磁场

10.1　各种物质对磁场的响应

设想用一个很强的磁场做几个实验．为了确定起见，假设我们做一个如图 10.1 中那样的内径为 10 厘米，长度为 40 厘米的螺线管．它的外径是 40 厘米，在这一空间里大部分充满了铜线绕组．如果这个线圈中通以 400 千瓦的电力，而且大约每分钟流过 30 加仑的水来冷却带走所产生的热量的话，那么在这个线圈的中心处将会产生 30,000 高斯的稳定磁场．我们叙述这些实际的细节，为的是说明我们的装置，虽然没有什么奇特之处，但却是一个相当不错的实验室磁体．它的中心处的场强为地球磁场场强的 10^5 倍，而且可能比在实验中所遇到的棒状磁铁或马蹄形磁铁附近的磁场强 5 或 10 倍．在螺线管中心附近的场是十分均匀的，在每一端的轴上场减弱到约为中心处的数值的一半．它没有图 6.18 中螺线管的磁场那样均匀，因为我们的线圈相当于长度——半径比从 4/1 到 1/1 的许多螺线管"套"起来叠加在一起的．事实上如果我从这一角度来分析我们的线圈，应用对于单层绕组的螺线管的轴上的场强公式(6.44)，则在线圈轴上的场强是不难精确计算的．取中心场强为 3 万高斯，将轴上各处的场强分布图画在图 10.1 中．在线圈两端的强度仅是 18,000 高斯，在邻近处的场强以大约 1700 高斯/厘米的梯度变化．

让我们将不同的物质置于此磁场中并观察它们是否受力的作用．一般地说，我们确实能测出这个力来．在切断线圈

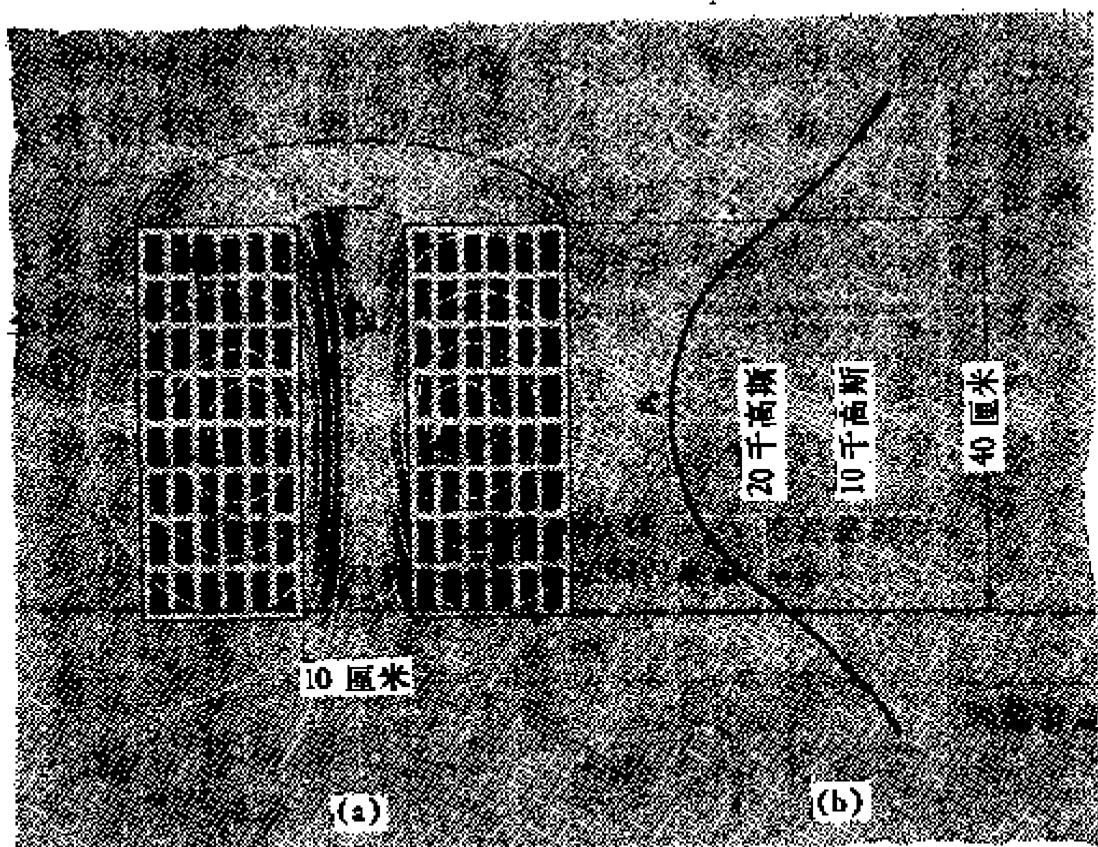


图 10.1 (a) 为产生强磁场而设计的线圈。
(b) 在线圈轴上场强 B_z 的分布图。

中电流时它就消失了．我们不久就会发现当我们把物质样品放在线圈中心时这力并不最强，虽然那里磁场 B_z 是最强，而当将样品放在近于线圈两端时样品受力最强，那里磁场的梯度 dB_z/dz 很大，样品所受的力也最大．从现在起，我们假定把每个样品正好放在线圈的上端内．图 10.2 表明将上述样品装在试管里，悬挂在一个弹簧上，弹簧附有刻度，可以指示由磁场所产生的附加力．当然我们必须先做一个未放样品时的实验，那时只有试管和悬挂部分，以便测量出作用于样品以外的任何其它物质上的磁力．

我们发现在这样的实验中，作用在个别物质（譬如金属铝）上的力正比于其质量而与其形状无关．（用小样品作实验证明，在线圈两端内几厘米范围的区域中的作用力几乎保持

恒定不变；如果我们所用样品的体积不超过 1 到 2 立方厘米，那么，就可以正好把它放在这个区域内.）在 $B_z = 18,000$ 高斯，$dB_z/dz = 1700$ 高斯/厘米的条件下，我们对于给定样品可以按每克样品受力若干达因来给出定量的结果.

但是首先有些费解的定性结论：对于大量的非常普通的纯物质来说，在我们尽力能做到的强磁场中，虽然是容易测量到这个力，但是也小得可怜．典型的力为每克十或二十达因，还不到样品重量的百分之几． 这个值对某些样品来说高一

一克样品放在 $B_z = 18,000$ 高斯，$dB_z/dz = 1700$ 高斯/厘米的磁场中，它所受的力

物　　质	化　学　式	所　受　力*
抗磁性物质		
水	H_2O	−22　　达因
铜	Cu	−2.6
铅	Pb	−37
氯化钠	NaCl	−15
石英	SiO_2	−16
硫	S	−16
金刚石	C	−16
石墨	C	−110
液态氮	N_2	−10　(78K)
顺磁性物质		
钠	Na	+20　　达因
铝	Al	+17
氯化铜	$CuCl_2$	+280
硫酸镍	$NiSO_4$	+830
液态氧	O_2	+7,500　(90K)
铁磁性物质		
铁	Fe	+400,000　达因
磁铁矿	Fe_3O_4	+120,000

* 受力方向：向下为＋ 向上为－．除了注明的以外所有测量都是在 20℃ 下进行的.

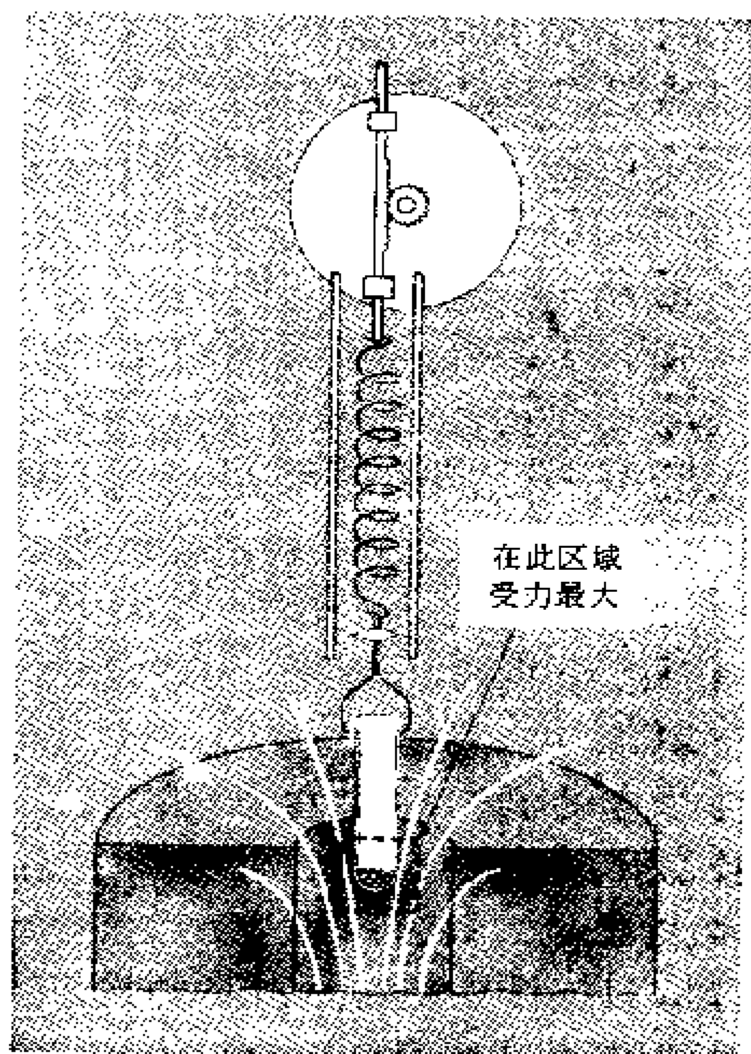


图 10.2　测量磁场中作用于物质上的力的装置

些，而对另一些样品来说低一些．这和磁场的方向无关，譬如我们可以通过使线圈中的电流反向来改变磁场方向．看起来某些物质似乎总是被拉向场强增加的方向，而另一些物质则被拉向场强减小的方向，和磁场的方向无关．

我们确实发现某些物质被相当大的力往线圈里面拉．譬如氯化铜晶体每克样品就受 280 达因的向下拉力．在这个实验里液氧的性质表现得更为突出；它受到一个将近是自己重量八倍的力往线圈里拉．事实上，如果我们将盛有液氧的无盖烧瓶放在线圈底部，则液体将立刻从烧瓶中升起(你认为它应该在哪里停止呢?)．另一方面，已证明液态氮是很不易激

发的；一克液态氮只受 10 达因微弱的力推出线圈．在表中我们列出了一些数据，这些数据就是在上述实验中得到的．我们选择这些物质（包括上面讲过的），是为了只挑选少数物质作为样品尽可能地反映出我们在普通材料中所发现的磁性能有很大的变化范围．

如我们所知，少数物质，其中最熟悉的是金属铁，似乎远要比任何其他物质的"磁性"来得大．在表中给出的力是把一克铁屑放在磁场中，位置和其他样品相同时，所受的作用力将近有一磅！（我们还不至于那么傻，把几克铁放在试管中悬在精细弹簧上去靠近磁铁．我们一定要用另一种悬挂方式．）注意，作用于一克铁和一克铜上的力它们之间差 10^5 倍以上，元件并没有根本差别．附带说明，这就提醒我们，对于像铜这样的物质作可靠的磁性测量是不容易的．

在铁和磁铁矿以及表中其他物质之间，在性质方面还有另一个根本性差别．设想我们用改变磁场强度的方法来作一个明显的试验，以查明作用在样品上的力是否和场强成正比例．例如，我们可以将螺线管的电流减小到原来的一半，我们将会发现，在表中铁以上的每种物质，所受的力将减小到它原来的四分之一，而作用在铁样品和磁铁矿上的力只减少一半，或许比一半还要少一点．显然，对表中所列的其他物质，至少在这种条件下，所受的力是正比于场强的平方，而对 Fe 和 Fe_3O_4，则近似地正比于场强本身的大小．

看起来我们在这里所讨论的是几种不同现象，而且都是复杂的现象．作为弄清问题的初步，我们可以引出某种分类法．

首先，水、氯化钠、石英等这样一些轻微地被磁体所排斥的物质，称为抗磁性物质．大部份无机物和几乎所有有机物都是抗磁性物质．事实上抗磁性是每一个原子和分子的属

性．当观察到有相反行为时，那是因为有另一种更强的效应超过了抗磁性，这种更强的效应导致了吸引．

能被吸向较强磁场区域的物质叫作*顺磁性物质*．在某些情况下，特别是像 Al、Na 或许多其他金属其顺磁性并不比一般的抗磁性强多少．表中的其他材料，像 $NiSO_4$ 和 $CuCl_2$，它们的顺磁效应是更强些．这些物质当温度降低时，顺磁性增大，当温度接近绝对零度时，导致十分大的顺磁效应．降温时顺磁性增加是造成液氧中特大磁力的部分原因．如果你认为这都是容易解释的，那么请你注意铜是抗磁的，但氯化铜则是顺磁的，而钠是顺磁的但氯化钠则是抗磁的．

最后，像铁和磁铁矿这样物质叫作*铁磁性物质*．除去这类普通金属铁、钴、镍之外，还有很多的铁磁合金和晶体化合物是熟知的铁磁性物质．事实上，现代的研究工作还正在逐渐加长铁磁性物质的名单．

在本章中我们有两个任务．一是导出对磁性材料的宏观现象的一种分析方法，这种方法是把材料本身用几个参数表征出来，并用实验方法确定出这些参数间的关系．这与根据观察电场和体极化之间的关系来处理电介质问题相似．我们有时称这种理论为*现象学的*理论．我们的第二个任务是试图至少在大体上弄明白各种磁效应的原子根源．在弄明白了磁效应之后，它会揭示原子结构的某些基本特点甚至比电介质现象揭示得更多．

在表中突出了一个普遍事实．抗磁性和顺磁性只涉及到非常小的能量（在分子能量的尺度上）．以液氧为极端例子．将一克液氧从我们的磁体移开所需的功约为 7,500 达因乘以几厘米距离的数量级（因为场强在几厘米距离的地方显著减弱）．粗略地说它大约是 50,000 尔格．一克液氧温度升高一度所需的能量约是此值的 300 倍（0.4 卡或 1.6 焦尔）．使液

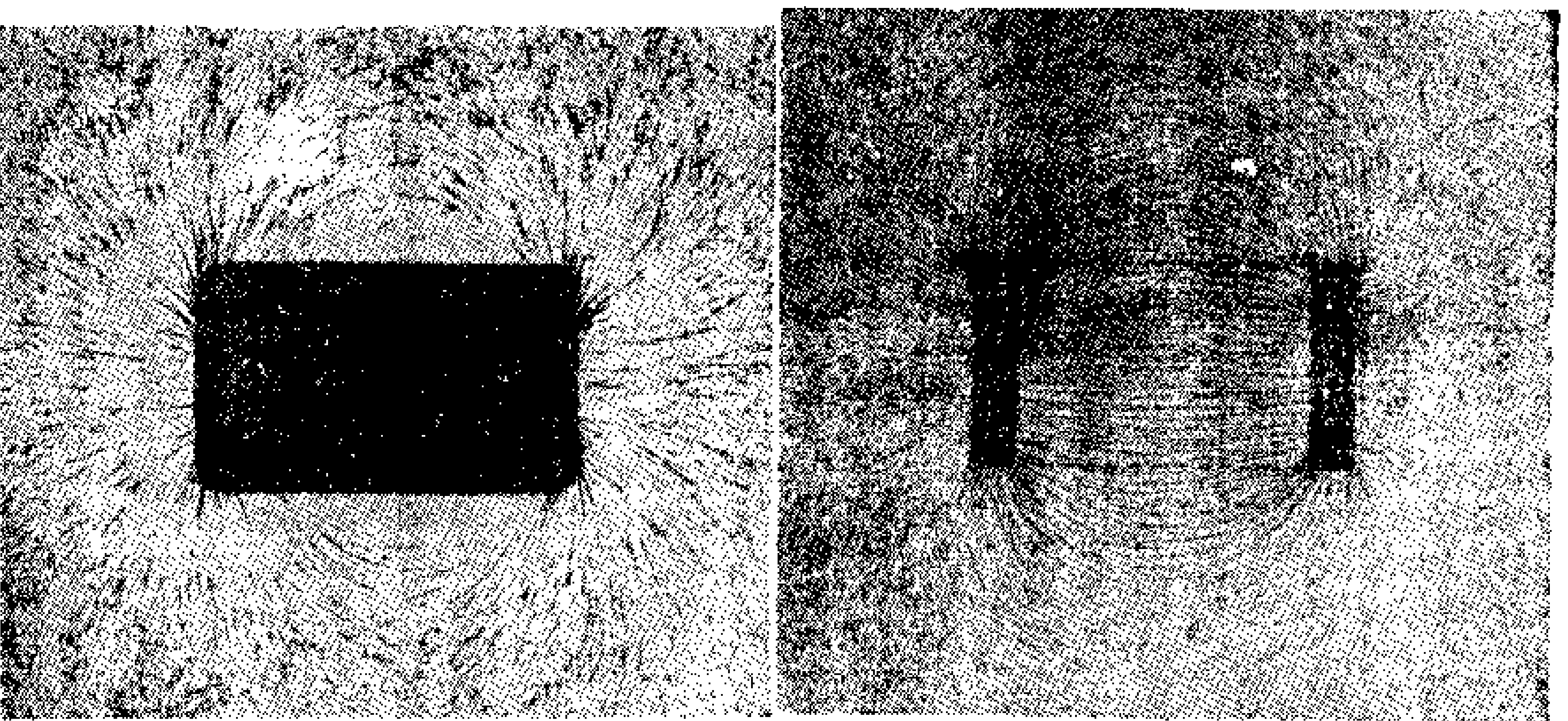
氧汽化，即使分子彼此分开，所需的能量比此值大 30,000 多倍．不管出于磁场的存在，液氧中的分子能级会出现什么情况，从能量观点来看显然这是小事．

我们知道甚至很强的磁场，对化学过程实际上也几乎是没有什么影响的，并且对生物化学也是如此．你可以把你的手和前臂放在 30,000 高斯的螺线管里（不是带手表的那只手！）而不会有任何显著的感觉和后果．很难指出你的手臂是抗磁性的还是顺磁性的，但不论是哪一种情况，作用在它上面的力都不会比几分之一英两大．在强磁场中繁殖和饲养起来的小老鼠也没有什么重要的改变．和这里所写的一样，在其他的生物学实验中也没有发现过磁效应对化学过程有任何值得注意的事情[1]．这并不使人感到意外．在和物质的相互作用中，磁场起的作用和电场完全不同．因为原子和分子是由缓慢地运动着的电荷组成的，电力压倒一切地决定分子的状况．

10.2 磁“荷”不存在

磁棒，例如指南针其周围的磁场看起来非常像电极化棒周围的电场，这样的极化棒在一端有过剩的正电荷而在另一端有过剩的负电荷（图 10.3）．可以设想磁场也有源，这源和磁场的关系与电荷和电场的关系相似．那么，磁针的“北”极将是有一种过剩“磁荷”的地方，而“南”极则将是有一种相反

1）这并不是说微弱的效应总是无关紧要的．像我们方才所说的理论表明在分子尺度重力是很不重要的，然而山坡上的树却都垂直地生长．这大概涉及到作用在比分子尺度大的生物单元上的总力．的确，这有点像由实验所表明的，树苗生长在非均匀强磁场中的“向性”似的．我们这里也不是暗示，分子的磁特性对生物化学家是无关的．相反，有时化学反应中的中间体是能够用它们的磁性质检测的，甚至可用磁性鉴别出来．但这和外场作用于化学过程的影响是两码事．顺便说一下，如果你把你的头放在磁场中摇晃，你将在你的嘴中“尝”到电解电流——只是感应电动势的证明．



(a)　　　　(b)

图 10.3　(a) 两个带相反电荷的圆盘(画出了电极的横截面,像一根粗黑棒)具有和极化棒一样的电场. 这就是说,如果你想象在虚线所围绕的边界内有这样一个棒,它外边的电场就会像所画的那样. 我们把许多细小的黑色纤维浮悬在油里,它们就沿电场方向排列起来,使电场成为可见的了. 这种巧妙地显示出电场外形的方法是普林斯顿大学帕尔默物理实验室的哈罗德 M. 瓦杰 (Harold M. Waage)[1] 作出的,他友好的为本图提供了原始照片.

(b) 用浸在甘油里的小镍丝的取向来显示围绕磁化圆柱的磁场. (试图采用 Waage 技术来改进传统的"铁屑"演示的努力是不很成功的——镍丝趋于连成长串然后被拉向磁体.)

这两个系统的场的理论结构图画在后面的图 10.21 中.

1) H. M. Waage, *Am. J. Phys.* **32** 388 (1964)

磁荷的地方．我们可以称"北磁荷"为正，"南磁荷"为负，磁场的方向从正指向负，和电场与电荷所采用的规则相似．历史地讲，磁场的正方向习惯上就是这样定的[1]．我们上面所说的磁荷，通常称为磁极强度．

就此而论，这种观念是完全讲得通的．当我们想到在电磁场的基本方程中 **E** 和 **B** 十分对称时，这就变得更有道理了．那么为什么我们不应该指望有场源的对称性呢？以磁荷作为静磁场 **B** 的可能的源，我们就应当有 $\operatorname{div}\mathbf{B}=4\pi\eta$，其中 η 代表磁荷密度，它完全类似电荷密度 ρ．两个单位强度的正磁荷(或北磁极)相距一厘米时，将有一达因的相互排斥力，以此类推．

问题就在于事物并非如此．由于某些原因，大自然没有采用这种可能性．从我们没有找到任何磁荷的意义来说，我们周围的世界似乎是完全不对称的．从来没有一个人观察到过一种孤立的过剩．磁荷——譬如说孤立的北极．这样的物体如果存在，就应当可以用某些方法来识别．它将产生一个从它向外放射的磁场，而且在远处磁场按 $1/r^2$ 衰减．也许更惊人的是这个物体在均匀磁场中也会受力．和我们螺线管中的样品不同，这个物体在线圈的中心处受力最大，而不是在两端最大．也和在磁场中运动着的带电粒子所受的力不同，作用在静止的北极上的力应当平行于磁场而不是垂直于磁场．

从含有孤立磁极的空间区域应当有 **B** 的净通量发出．这

---

1) 回忆在第六章中，我们参照电流方向(正电荷运动方向)和右手定则确定了 **B** 的正方向．现在说的"北极"意味着"指北极"．时至今日我们仍不清楚为什么地球的磁极极性是这样的而不是另一种样子的．富兰克林规定的"正"电与此毫无关系．所以取右手定则不取左手定则使得磁场和电场方向的定法一致，纯粹是偶然的事情．

样的物体明显地完全不存在，这一事实概括起来可以这样说，不是 $\operatorname{div}\mathbf{B} = 4\pi\eta$，而是

$$\boxed{\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \qquad \text{在任何地方.}} \tag{1}$$

真的任何地方都是这样吗？可能不可能有这种情况：有两个不可分开的北极和南极结合成强度相等极性相反的一对，而且两极之间结合得如此紧密，以致于在物理上我们探测不到两极之间的区域. 我们没有理由这样想，但这没有什么关系，因为只要 **B** 本身无论在那里都有意义则方程(1)就成立. 然而，曾有过认真的推测，即一对磁极就像一对基本粒子一样，可以在很强的核事件中产生和消失. 最近对于这种叫作磁单极子的粒子的一些探索，并没有探查出什么东西来.[1] 是不是它们不能存在？ 如果是这样，那么为什么不能存在呢？这仍是一个未解决的问题. 如果某人发现了磁单极子，他就有资格胜利地在方程(1)后面加上限制条件"……除了在我的照片(或者气泡室的图片或计数器记录等等)中出现的磁单极子的位置外". 但即使是这样，也不影响主要结论：一般物质是由电荷而不是由磁荷组成的.

我们只能得出结论，磁场唯一的源是电流. 这就又把我们带回到安培的假设上来了，他的观点是物质中的磁性是由

---

1) 对于磁单极子探索的报导可以参考 Kenneth Ford 的文章"磁单极子" *Sci. American* **209** 30 (*December*, 1963). 在磁荷不存在情况下的明显"不对称性"与我们所熟悉的电的不对称性不同，后者是负粒子和正粒子之间的性质的不同. 电子是稳定的负粒子；正电荷是以质子形式被发现的，是很重的粒子. 但是我们知道这不一定是普遍如此的，我们知道反粒子是存在的. 所有证据都表明由正的电子和负的质子组成物质是可能的；这种"反物质"和在我们这部份宇宙中所看到的物质是孪生子. 我们在实验室里曾经看到反物质世界的成分——但从未看到过"磁孪生子"的成分. 对于它们是否存在，是有严重怀疑的；而且有有力的论证表明如果它们确实存在，它们也必定是在其他一些方面完全和带电粒子不同.

很多分布在物质中的微小电流环形成的。

10.3 电流迴路的场

图 10.4 (a) 表示一个置于 xy 平面，围绕原点的闭合导电迴路. 有一以静电单位/秒为单位的稳定电流 I 流过迴路. 我们感兴趣的是这个电流在离迴路的一定距离处所产生磁场，如图中 P_1 点的磁场. 我们假设到 P_1 点的距离 r_1 比迴路的任一方向的长度都大很多. 为了使图形简化，我们将 P_1 置于 yz 平面中；以后可以看出，这并不是一种限制. 这是应用矢势的一个好位置. 我们将首先计算 P_1 处的矢势 $\mathbf{A}$，也就是 $\mathbf{A}(0, y_1, z_1)$. 从这里可以明显看出远离迴路的其他任一点 (x, y, z) 的矢势如何. 然后取 $\mathbf{A}$ 的旋度我们便可得出磁场 $\mathbf{B}$.

对于导线中的电流，由方程 (6.35) 我们有

$$\mathbf{A}(0, y_1, z_1) = \frac{I}{c}\int_{\text{迴路}} \frac{d\mathbf{l}_2}{r_{12}}. \tag{2}$$

那时我们只涉及到迴路的一小段的贡献；现在我们必须对整个迴路积分. 我们要考虑到在绕迴路一周时分母 r_{12} 的变化. 如果 P_1 很远，r_{12} 的一级变化仅和小线段 $d\mathbf{l}_2$ 的坐标 y_2 有关而和 x_2 无关. 这在图 10.4 (b) 侧视图中看的很清楚. 这样，忽略正比于 $(x_2/r_{12})^2$ 的量，我们可以认为 r_{12} 和 r'_{12} 是相等的，在侧视图上 r_{12} 和 r'_{12} 重合在一起. 而且一般地说，取到比值 (迴路尺度/到 P_1 的距离) 的第一级近似，我们有

$$r_{12} \approx r_1 - y_2 \sin\theta. \tag{3}$$

现在来看图 10.4 (a) 中迴路的两个线元 dl_2 和 dl'_2. 对此，它们的 dy_2 是相等相反的，而且我们已经指出两个 r_{12} 的一级近似是相等的，因而对于这个一级近似来说，它们对线积分的贡献将相消. 而且对整个迴路都是如此. 因此在 P_1 点 $\mathbf{A}$ 没

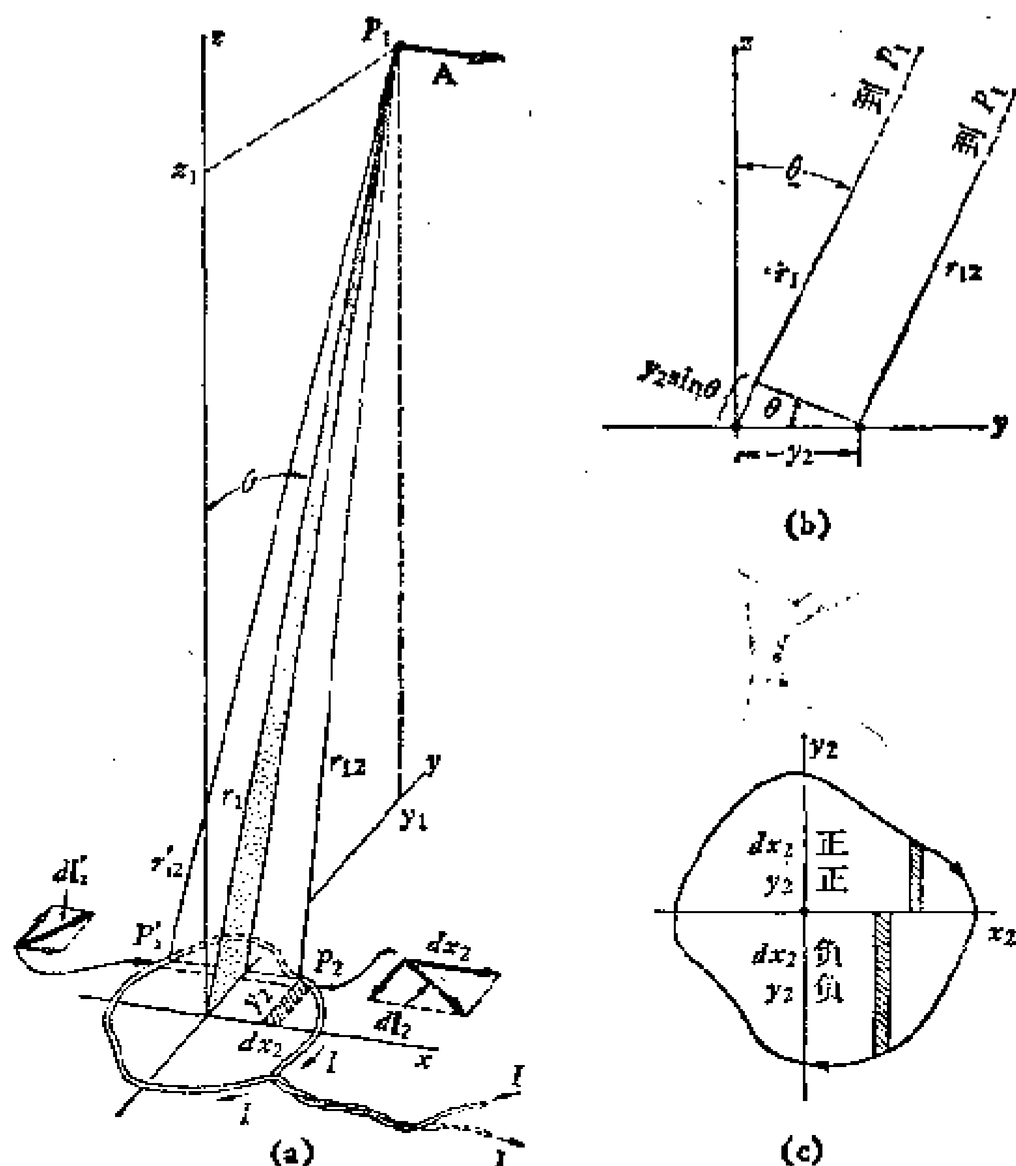


图 10.4 (a) 在远离电流迴路的一点的矢势 $\mathbf{A}$ 的计算. (b)沿着 x 轴看的侧视图，指出如果 $r_1 \gg y_2$，$r_{12} \approx r_1 - y_2\sin\theta$. (c)为了说明 $\oint_{\text{迴路}} y_2 dx_2$ 是迴路面积的俯视图.

有 y 分量. 显然它也没有 z 分量，因为电流的路径本身在任何地方都没有 z 分量. 矢势的 x 分量是来自路径积分的 dx 部分.

于是

$$\mathbf{A}(0, y_1, z_1) = \hat{\mathbf{x}} \frac{I}{c} \int \frac{dx_2}{r_{12}}. \tag{4}$$

我们可将方程 (3) 写为

$$\frac{1}{r_{12}} \approx \frac{1}{r_1}\left(1+\frac{y_2 \sin\theta}{r_1}\right), \tag{5}$$

而不影响我们的一级近似．用它作被积函数，我们有

$$\mathbf{A}(0, y_1, z_1) = \hat{\mathbf{x}}\frac{1}{cr_1}\int\left(1+\frac{y_2\sin\theta}{r_1}\right)dx_2, \tag{6}$$

积分中 r_1 和 θ 是常数．显然沿整个迴路 $\int dx_2$ 为零．沿整个迴路 $\int y_2 dx_2$ 正好是迴路的面积，不管它的形状如何 [见图 10.4(c)]．所以我们最后得到

$$\mathbf{A}(0, y_1, z_1) = \hat{\mathbf{x}}\frac{I\sin\theta}{cr_1^2} \times (\text{迴路的面积}). \tag{7}$$

这一点是非常简单的，但是决定性的：由于迴路的形状无关紧要，我们限制 P_1 点在 yz 平面上并无任何重大影响．所以我们如果只作一般的表述，必然会得出方程 (7) 那样的一般结果来；一般的叙述如下：任意形状的电流迴路在距离迴路 r 处的矢势（r 比迴路的尺寸大很多）是一垂直于包括 $\mathbf{r}$ 和迴路平面的法线的平面的矢量，其数值为

$$A = \frac{Ia\sin\theta}{cr^2}, \tag{8}$$

其中 a 代表迴路的面积．

这个矢势绕迴路是轴对称的，这意味着场 $\mathbf{B}$ 也必是对称的．其解释是：我们所考虑的区域离迴路是如此之远以致迴路的形状的细致结构的影响可以忽略，凡有同样电流和面积的乘积的迴路在远处产生同样的磁场．我们称乘积 Ia/c 为电流迴路的**磁偶极矩**并用 $\mathbf{m}$ 来表示．磁偶极矩显然是个矢量，它的方向是迴路的法线方向，或者说是矢量 $\mathbf{a}$ 的方向，$\mathbf{a}$ 是迴路所围绕的那块有方向的面积

$$\mathbf{m} = \frac{I}{c}\mathbf{a}. \tag{9}$$

至于符号问题，我们一致认为 $\mathbf{m}$ 的方向和流经迴路的正电流的方向之间是右手螺旋法则关系，如图 10.5 所示.（按照这个法则，在图 10.4 (a) 中迴路的偶极矩应指向下方）. 磁偶极矩 $\mathbf{m}$ 的场的矢势可以简练地用矢量写出

$$\mathbf{A}=\frac{\mathbf{m}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}. \tag{10}$$

这里 $\hat{\mathbf{r}}$ 是从迴路到我们要计算的矢势 $\mathbf{A}$ 的所在点的方向上的单位矢量. 你们可以核对一下，这一规定和我们关于符号的规定是一致的. 注意 $\mathbf{A}$ 的方向必须总是迴路最靠近那部分的电流的方向.

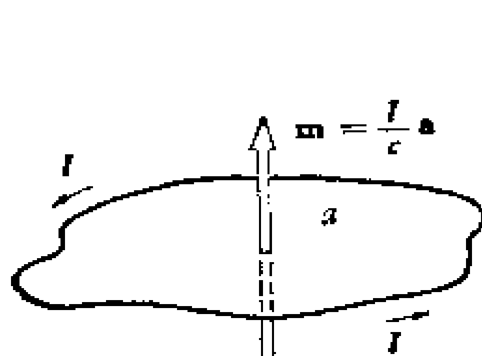


图 10.5 根据定义，磁矩矢量和电流的关系是右手螺旋法则，像这里画的那样.

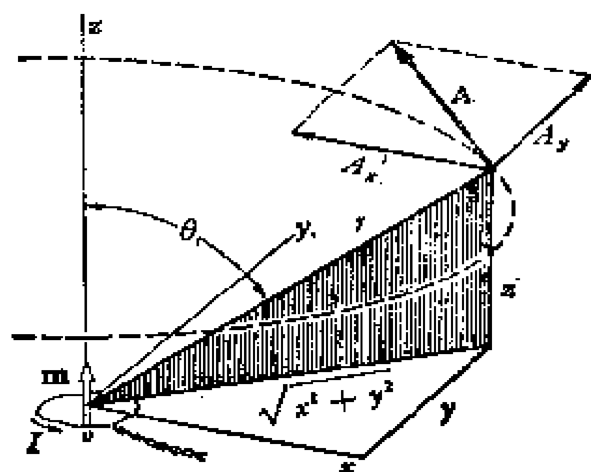


图 10.6 在原点的一个磁偶极子，在距迴路很远的一点处的矢势 $\mathbf{A}$ 是平行于 xy 平面的一个矢量，切于绕 z 轴的一个圆.

图 10.6 表示一个位于原点的磁偶极子，其磁偶极矩矢量 $\mathbf{m}$ 指向 z 的正方向. 我们按照 $r^2=x^2+y^2+z^2$ 以及

$$\sin\theta=\sqrt{x^2+y^2}/r$$

来表达在任意点 (x, y, z) 的矢势. 在此点的矢势 A 的值是

$$A=\frac{m\sin\theta}{r^2}=m\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r^3}. \tag{11}$$

由于 $\mathbf{A}$ 是切于围绕 z 轴的水平的圆，它的分量是

$$A_x = A\left(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{-my}{r^3}, \tag{12}$$

$$A_y = A\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{mx}{r^3},$$

$$A_z = 0.$$

让我们通过计算 curl $\mathbf{A}$ 的分量来计算 xz 平面上一点的 $\mathbf{B}$，然后(不是在这之前)令 $y=0$.

$$B_x = (\nabla\times\mathbf{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial z}\frac{mx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{3mxz}{r^5},$$

$$B_y = (\nabla\times\mathbf{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}\frac{-my}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{3myz}{r^5},$$

$$B_z = (\nabla\times\mathbf{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

$$= m\left[\frac{-2x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \frac{x^2-2y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right]$$

$$= \frac{m(3z^2-r^2)}{r^5}. \tag{13}$$

在 xz 平面上，$y=0$，$\sin\theta = x/r$，$\cos\theta = z/r$. 于是在这平面上任意点的磁场的分量为

$$B_x = \frac{3m\sin\theta\cos\theta}{r^3},$$

$$B_y = 0,$$

$$B_z = \frac{m(3\cos^2\theta-1)}{r^3}. \tag{14}$$

现在再回到 9.3 节，在方程 (9.14) 中我们曾指出电偶极子 $\mathbf{p}$ 在 xy 平面上的电场 $\mathbf{E}$ 的分量，$\mathbf{p}$ 完全和我们的磁偶极子 $\mathbf{m}$ 的情况一样．符号也是完全相同的．我们由此发现，一个小电流迴路在距离很远的一点的磁场和两个分离电荷的电场具有同样形式．我们已经知道电偶极子的电场的样子．图 10.7 试图表明具有偶极矩 $\mathbf{m}$ 的电流迴路所引起的磁场 $\mathbf{B}$ 的三维形式．

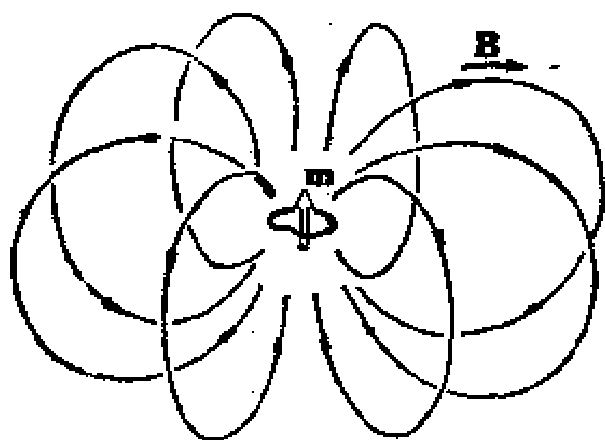
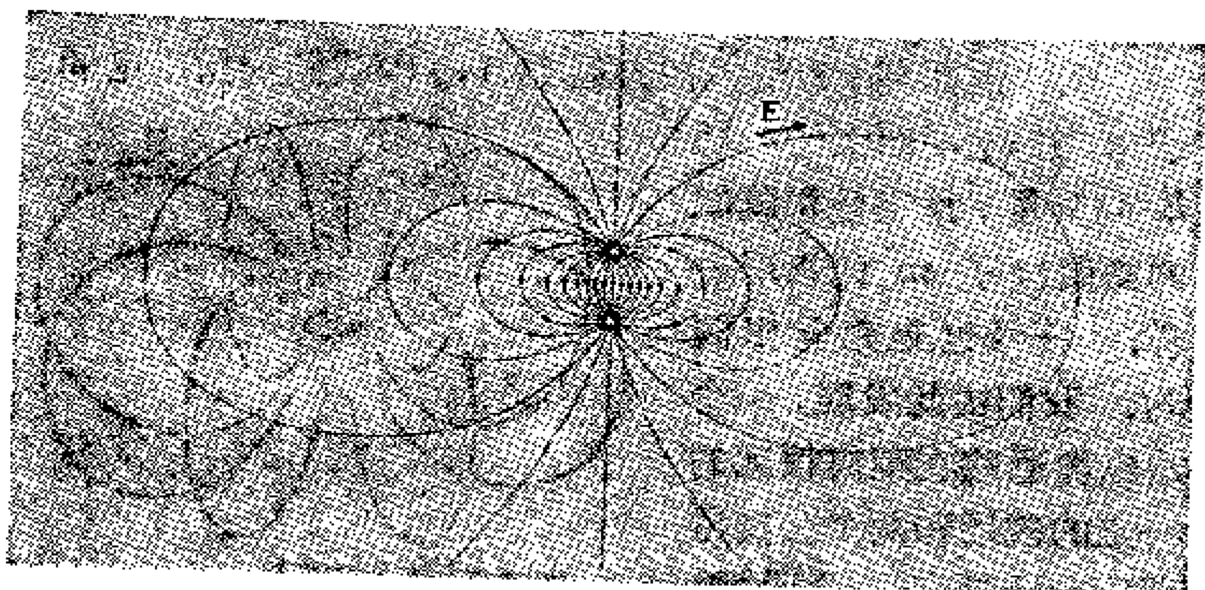


图 10.7　一个磁偶极子，即小电流迴路的磁场中的一些磁场线．

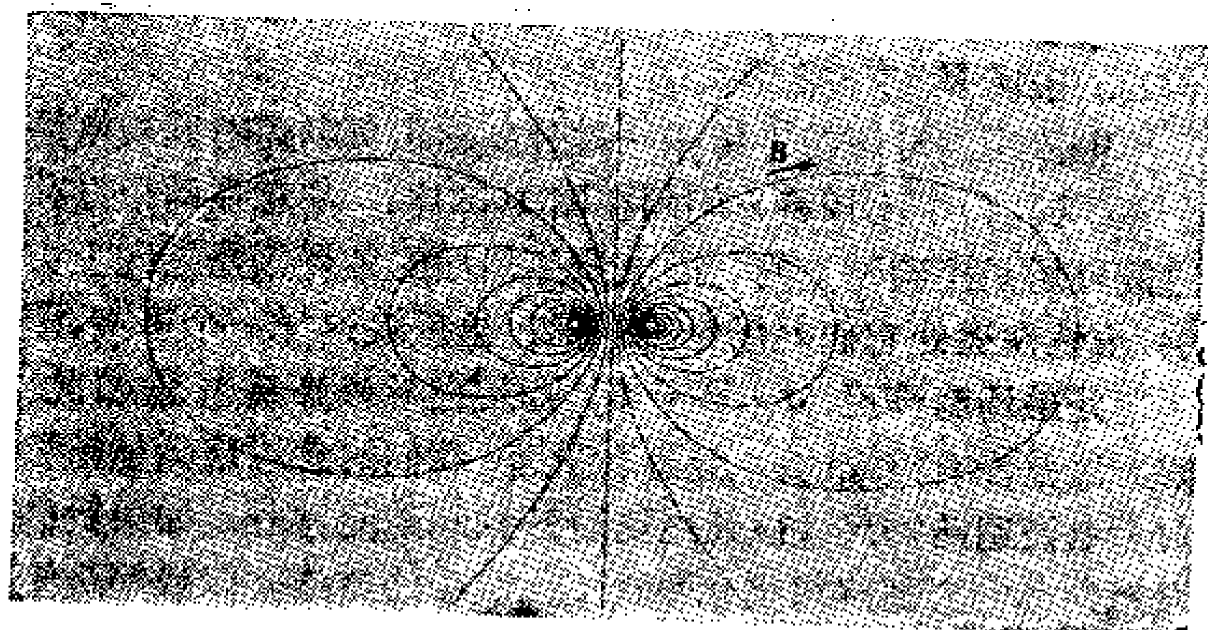
电流迴路附近的磁场和一对分离的正负电荷附近的电场全然不同，为了比较将它们画在图 10.8 中．注意在两个电荷之间电场是指向下方的，而电流环里面的磁场则是指向上方的，虽然在远处它们的场是相似的．这反映这样一个事实，即在各处磁场都满足 $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$，即使在源的里面也是如此．磁场线是没有终端的．所谓近和远，我们的意思自然是指相对于电流迴路的尺寸以及电荷分开的间距而言的．如果我们设想缩小电流迴路的尺寸同时增大其中的电流，以致偶极矩 $m=\dfrac{Ia}{c}$ 仍保持不变，这就接近于无穷小的磁偶极子，与其相对应的无穷小的电偶极子在第 9 章中讨论过了．

10.4　在外场中作用在偶极子上的力

考虑把半径为 r 的一个小圆形电流迴路放在其他电流系统的磁场中，譬如说放在螺线管中．在图 10.9 中所画的磁场 $\mathbf{B}$，一般地说，是沿 z 方向的．它不是均匀场，而是沿 z 方向



（a）一对数量相等符号相反电荷的电场.
在远处的场变成电偶极子的场.



（b）电流环的磁场. 在远处的场变成磁偶极子的场.
图10.8

逐渐减弱；这从场线的扇形展开就可以明显地看出来. 为简单起见，让我们假设场是对 z 轴对称的. 这样就很像图 10.1 中螺线管上端附近的磁场. 图 10.9 中所表示的磁场不包括电流环自己的磁场. 我们希望求出其他场作用于电流环上的力，这个其他场最好叫做外场. 电流环自己的场作用在它本身上的净力当然为零，所以我们在讨论中可以不管它自己的

场.

如果我们研究图 10.9 中的情形，我们可以立即得出结论：有一净力作用于电流环上. 这是由于在电流环的各处，外场 **B** 有一向外的分量 B_r. 所以如果电流是沿着所指的方向流的，迴路的每个小元线段 **dl** 必定受一大小为 $IB_r dl/c$ 的向下的力. 如果 B_r 在环上所有的点都具有同样的大小(在所假设的对称扩展场中，它必然是如此.)，则向下的总力大小为

$$F = \frac{2\pi r I B_r}{c}. \tag{15}$$

现在 B_r 可以直接和 B_z 的梯度联系起来. 因为在所有的点 $\text{div}\,\mathbf{B} = 0$，由任意体积向外发出的磁场的净通量为零. 考虑一个半径为 r，高度为 Δz 的小圆柱体(图 10.10). 从侧面向外的通量为 $2\pi r(\Delta z)B_r$，从端面向外的净通量为

$$\pi r^2[-B_z(z) + B_z(z+\Delta z)].$$

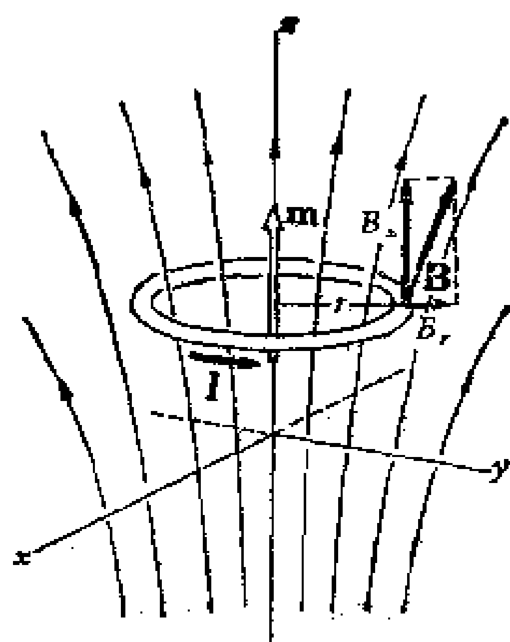


图 10.9 一个电流环在一非均匀磁场中.(电流环自己的磁场未画出). 由于场的辐向分量 B_r，整个电流环受到一个作用力.

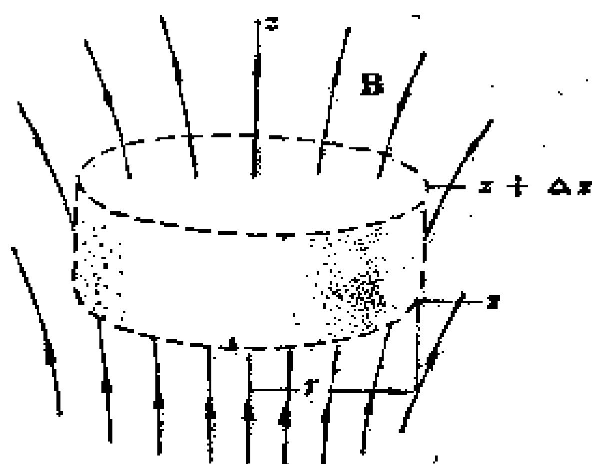


图 10.10 可以用高斯理论得出 B_r 和 $\frac{\partial B_z}{\partial z}$ 之间的关系式，方程(16).

对小距离 Δz 取一级近似，上式是 $\pi r^2\left(\frac{\partial B_z}{\partial z}\right)\Delta z$． 令总通量等于零：$0=\pi r^2\left(\frac{\partial B_z}{\partial z}\right)\Delta z+2\pi r B_r\Delta z$，由此得出关系式

$$B_r=-\frac{r}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z}. \tag{16}$$

现在核对一下符号，按照方程（16），当 B_z 是向上减小时，B_r 为正；看一眼图中所画的情形就知道这是正确了．

现在可以用外场的分量 B_z 的梯度来表达作用在偶极子上的力

$$F=\frac{2\pi r I}{c}\cdot\frac{r}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z}=\frac{\pi r^2 I}{c}\cdot\frac{\partial B_z}{\partial z}. \tag{17}$$

我们可以看出式中因子 $\pi r^2 I/c$ 就是电流环的磁偶极矩的值 m．所以作用于环上的力可以非常简单地用偶极矩表达出来，

$$F=m\frac{\partial B_z}{\partial z}. \tag{18}$$

我们虽尚未证明，但是当你听到对于任意其他形状小迴路所受的力仅与电流和面积的乘积有关，也就是说只与偶极矩有关时，你是不会感到惊奇的．形状无关紧要．当然，我们所讨论的仅是足够小的迴路，因而在小环的跨度范围内只有外场的一级变分才是重要的．

图 10.9 的电流环具有一个向上指的磁偶极矩 $\mathbf{m}$ 而作用于环上的力则是指向下的． 显然，如果我们能反转环中的电流，从而也就反转了 $\mathbf{m}$，力的方向也必然反转． 这种情况可以归纳为

偶极矩平行于外场：作用力是沿着场强增加的方向．

偶极矩反平行于外场：作用力是沿着场强减小的方向.

均匀外场：力为零.

非常明显，这不是最一般的情况，磁矩 $\mathbf{m}$ 的指向可能和磁场 $\mathbf{B}$ 成某些特殊的角，而且 $\mathbf{B}$ 的各分量可以在空间变化. 推导出在一般情形下作用力 $\mathbf{F}$ 的公式并不困难. 它非常像我们得到的非均匀电场中的电偶极子的受力公式，如方程(9.22). 也就是说，作用在任意磁偶极子 $\mathbf{m}$ 上的力的 x 分量可以由下式给出

$$F_x = \mathbf{m} \cdot \operatorname{grad} B_x, \tag{19}$$

对 F_y 和 F_z 具有相应的公式.

在方程(18)和(19)中，力以达因为单位，磁场梯度以高斯/厘米为单位，磁偶极矩 m 由方程(9)给出，$m = \frac{Ia}{c}$，其中 I 的单位是静电单位/秒，a 的单位是平方厘米，c 的单位是厘米/秒. m 的单位有几个等效的表示方式. 我们将采用"尔格/高斯"，可以从方程(18)看出

$$m = \frac{\text{达因}}{(\text{高斯/厘米})} = \frac{\text{达因}\cdot\text{厘米}}{\text{高斯}} = \frac{\text{尔格}}{\text{高斯}}.$$

现在我们可以开始来看一下，在本章开头所讨论的实验中会出现什么现象. 一种物质放在图 10.2 中的样品位置上，如果它含有平行于线圈磁场 B 的磁偶极子，它将被吸入螺线管. 如果它含有相反指向的偶极子，和磁场反平行，它将被推出螺线管. 力取决于轴向场强的梯度，在螺线管的中点受力为零. 而且如果样品中偶极矩的总强度和场强 $\mathbf{B}$ 成比例，则在某一给定位置，力将与 B 和 $\frac{\partial B_z}{\partial z}$ 的乘积成比例，因而和螺线管中电流的平方成比例. 这是在抗磁性和顺磁性物质的情况下所观察到的性质. 看起来好像铁磁性样品的磁矩几乎与

场强无关，无论如何我们必须把铁磁性物质暂时放一边，应把它作为一特殊问题来讨论.

为什么一物质加上磁场之后，在物质中会引起偶极矩的总强度正比于所加磁场呢？又为什么在某些物质中它们平行于磁场，而在另一些物质中它们的指向相反呢？如果我们能够回答这些问题，我们就可以了解抗磁性和顺磁性的物理性质了.

10.5 原子中的电流

我们知道，原子是由一个正核和围绕它的负电子组成的.要想充分描述它，需要量子物理的概念，这些概念你们在本教程的第四卷中将会学习到. 幸好，一个简单而容易想像的原子模型可以很好地解释抗磁性. 这就是电子在轨道上绕核运动的行星模型，就像玻尔对于氢原子的第一个量子理论中的模型一样.

我们从一个电子以恒定速率在圆形路径上运动开始. 因为在这里我们并不打算去解释原子结构，所以不去探讨电子为什么会有这种特殊轨道. 我们要问的仅是，如果它在这样轨道上运动，能产生什么样的磁效应呢？在图 10.11 中我们看到电子就像一个质点带着集中的电荷$-e$，以速率 v 在半径为 r 的圆形路径上运动. 中央是正的核电荷，使整个系统呈电中性，但是因为原子核有相当大的质量，它的运动是这样的缓慢，以致它的磁效应可以忽略.

在任何时刻电子和正电荷都表现为一个电偶极子，但是按时间平均，电偶极矩为零，在远处不产生稳定电场. 我们在 9.5 节已讨论过这一点. 在远处，系统的*磁场*按时间平均，并不是零而正好是一个电流环的磁场. 因为涉及到时间平均问题，所以把所有的负电荷都集中在一起沿着轨道运动，还是像

图 10.11 (b) 中那样把负电荷分成由小点构成的一个均匀的没有终点的序列，这都没关系. 电流是每秒通过环上一给定点的电量. 因为电子每秒转 $v/2\pi r$ 圈，如果 e 用静电单位，电流用静电单位/秒，则

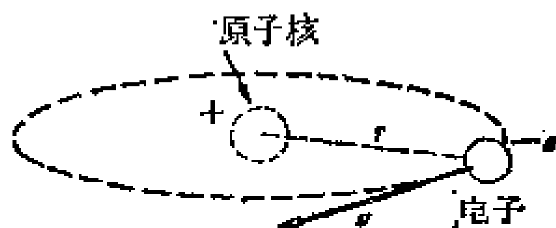
$$I = \frac{ev}{2\pi r}. \qquad (20)$$

在轨道上运动的电子和具有这样大小的环形电流等效，电流的正方向与 v 相反，如图 10.11(c) 所示. 因此在远处的场是一个

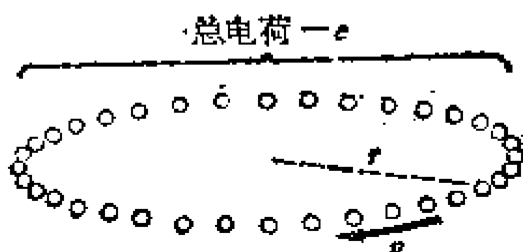
$$m = \frac{\pi r^2 I}{c} = \frac{evr}{2c} \qquad (21)$$

的磁偶极矩的场.

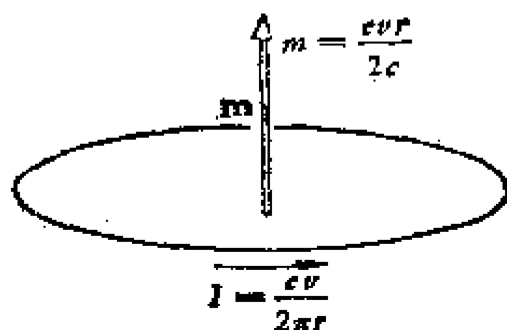
让我们顺便注意一下，与电子轨道相联系的磁矩 **m** 和轨道角动量 **L** 之间的简单关系. 角动量是一大小为 $L = m_e vr$ 的矢量，其中 m_e 表示电子的质量[1]，并且如果电子按图 10.11(a) 中所画的方向



(a)



(b)



(c)

图 10.11 (a) 原子的一种模型，其中一个电子以速率 v 在圆形轨道上运动. (b) 等效的电荷过程. 设想把负电荷 $-e$ 分成许多小电荷，形成一个转动的电荷环，则所设想的转动的电荷环的电流就与平均电流相等. (c) 磁矩是电流与面积乘积的 $\frac{1}{c}$ 倍.

1) 我们要涉及到的速率 v 比 c 小很多，所以 m_e 代表静止质量，为 9.0×10^{-28} 克. 我们选择符号 m 代表磁矩，使得在本章中必须用一不同的符号代表电子质量. 我们选择符号 **L** 代表角动量，而不是第一卷第六章中选用的 **J**，因为习惯上在原子物理中用 **L** 代表角动量，这就是我们在这里所考虑的，并且因为我们已经用 **J** 代表电流密度了.

运动，则此角动量指向下方．注意 **m** 和 L 中都出现 vr 的乘积．考虑到方向，我们可以写出

$$\mathbf{m}=\frac{-e}{2m_e c}\mathbf{L}. \tag{22}$$

除了一些基本常数外，这个关系式不包括什么新的东西，这会使你猜想到它是普遍适用的．的确，它是普遍适用的，尽管我们在这里不予以证明．它对椭圆轨道也适用，甚至在非平方反比的中心场中出现的玫瑰花形轨道也适用．回忆一下在中心场中任意轨道的重要性质：角动量是一个运动常量．由方程（22）所表示的一般关系式（我们仅仅是在特殊情形下导出的．）可以推断在角动量守恒的地方，磁矩的大小和方向也是保持不变的．因子 $\frac{-e}{2m_e c}$ 称为电子的轨道磁机比[1] 磁矩和角动量之间的本质联系是解释原子磁性的中心问题．

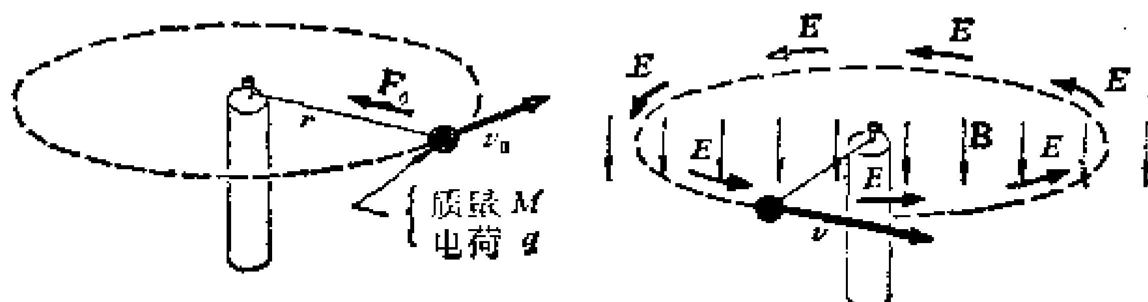
为什么我们没注意到每种物质中的所有原子中的全部电子轨道运动所引起的磁场呢？回答只能是有相互抵消作用．在一块普通物质中，沿一个方向运动的电子数目一定和沿另一方向运动的电子数目相同．这是可以预料到的，没有任何理由使某一旋转方向本征地比另一旋转方向更容易些，或者说否则就会能识别出一个唯一的轴向来．在材料结构中就会必定有某种方法能不仅选出轴来而且能选出绕这个轴的转动方向来！

我们可以把没有外磁场情形下的一块材料描绘为包括着一些迴转的电子，它们的轨道角动量和与之相联系的轨道磁矩在空间各个方向均匀分布着．考虑那些碰巧它们的轨道平

1）好些人把这一量叫作迴磁比．像在第 I 卷第 8 节中一样，我们宁愿用磁机比．

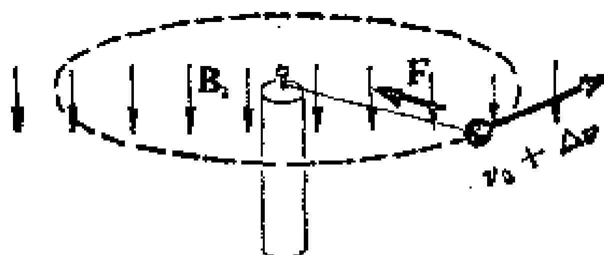
面接近与 xy 平面平行的轨道，在这些轨道中大约有相等数目的向上的 **m** 和向下的 **m**. 让我们查明，当我们加上 z 方向的外磁场时，一个这样的轨道会出现什么现象.

我们首先分析一下一个电学力学系统，看起来它不很像一个原子. 在图 10.12 中有一质量为 M，电荷为 q 的物体，用一长度固定为 r 的绳拴在一固定点上. 这个绳提供一向心力以保持物体在圆形轨道上运动. 如我们所知，这个力 F_0 的大小由下式给出



(a) 初始状态
$\mathbf{B}=0$
$F_0=\dfrac{Mv_0^2}{r}$.

(b) 中间状态
B 在向下方向增大
$E=\dfrac{r}{2c}\dfrac{dB}{dt}$.



(c) 最终状态(在 Δt 时间以后)
$\mathbf{B}=\mathbf{B}_1$
$\Delta v=\dfrac{qE\Delta t}{M}=\dfrac{qrB_1}{2Mc}$.

图 10.12 磁场 **B** 的增加感生一电场 **E**，它加速了旋转的带电物体.

$$F_0=\frac{M v_0^2}{r}. \tag{23}$$

在初始状态，图 10.12 (a)，没有外磁场. 现在，用相当大的螺

线管，我们开始在 z 的负方向建立一个磁场 **B**，这场在任何给定时刻在全部区域中都是均匀的。当这个场按 dB/dt 增大时，沿着全路径将有一感生电场 **E**，像图 10.12 (b) 中所表明的那样。为求出场 **E** 的大小，我们注意到穿过圆形路径的磁通量的变化率为

$$\frac{d\Phi}{dt}=\pi r^2\frac{dB}{dt}. \tag{24}$$

这确是电场的线积分，这就是最重要的一点(我们只是为了对称和简单起见假设全路径上电场是同样的)。

$$\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\frac{\pi r^2}{c}\frac{dB}{dt}=2\pi rE. \tag{25}$$

所以我们可以求出

$$E=\frac{r}{2c}\cdot\frac{dB}{dt}. \tag{26}$$

到目前为止我们还没有管符号，但是如果你把你所喜爱的确定感生电动势的法则应用于图 10.12，你就会看出，如果 q 是正电荷的话，**E** 的方向必定是使物体加速的方向。沿路径上的加速度，dv/dt，由力 qE 来确定

$$M\frac{dv}{dt}=qE=\frac{qr}{2c}\cdot\frac{dB}{dt}. \tag{27}$$

所以我们在 v 的改变量和 B 的改变量之间有一关系式

$$dv=\frac{qr}{2Mc}dB. \tag{28}$$

半径 r 由绳的长度来确定，因子 $(qr/2Mc)$ 是一常数。令 Δv 表示在场达到最终值 B_1 的整个过程中 v 的净改变量，则

$$\Delta v=\int_{v_0}^{v_0+\Delta v}dv=\frac{qr}{2Mc}\int_0^{B_1}dB=\frac{qrB_1}{2Mc}. \tag{29}$$

注意，时间已被消掉了，不论速度变化是快还是慢，最终速度都是相同的。

在最终状态，电荷的速率增大意味着指向上方的磁矩 **m** 的增大。一个带负电的物体在同样情况下就会是减速的，这就会减小它向下的磁矩。无论是哪种情况，加上磁场 $\mathbf{B}_1$ 后，将引起磁矩的改变，其改变方向和磁场相反。磁矩改变量 Δm 的大小为

$$\Delta m = \frac{qr}{2c}\Delta v = \frac{q^2 r^2}{4Mc^2} B_1. \tag{30}$$

电荷沿另一方向转动也是一样，无论电荷是正的还是负的，感应出来的磁矩的改变总是和所加磁场的变化反方向。图 10.13 画出一正电荷情形。看来下面的关系式不论对什么符号的电荷和什么方向的旋转都是成立的：

$$\Delta \mathbf{m} = -\frac{q^2 r^2}{4Mc^2}\mathbf{B}_1. \tag{31}$$

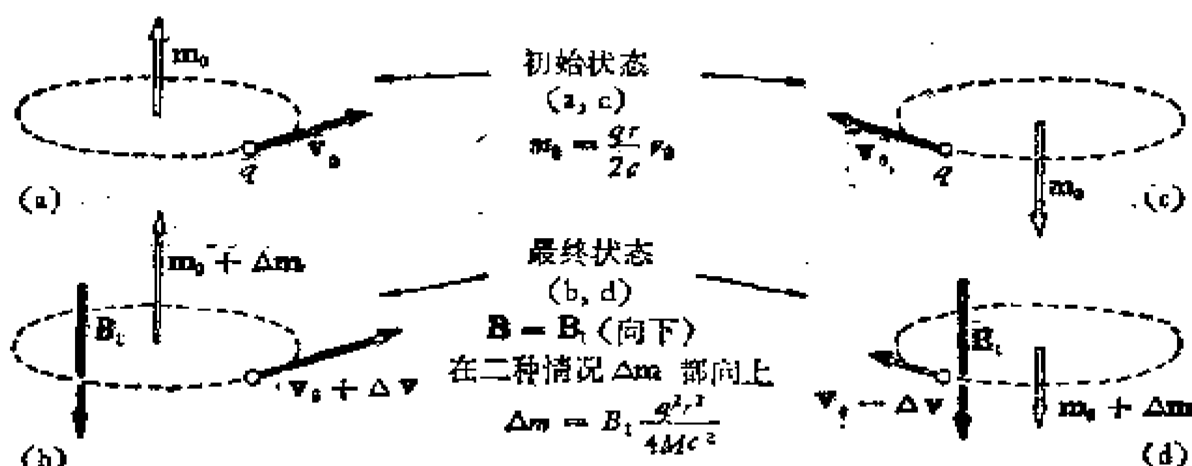


图 10.13 磁矩矢量的变化和 **B** 的方向相反，对 q 的两个运动方向都是如此。

在这个例子中我们用长度固定的绳子而强令 r 为常数。让我们来看一下绳子的张力如何改变。我们假设 B_1 是足够小的，因而 $\Delta v \ll v_0$。在最终状态我们要求向心力的大小为

$$F_1 = \frac{M(v_0 + \Delta v)^2}{r} \approx \frac{Mv_0^2}{r} + \frac{2Mv_0\Delta v}{r}, \tag{32}$$

式中忽略了正比于 $(\Delta v)^2$ 的项。但是现在磁场自己对运动电

荷提供一向内的力，$q(v_0+\Delta v)B_1/c$。利用方程(29)将 B_1 用 Δv 表示出来，我们看到这个附加的向内力的大小是

$$\frac{q(v_0+\Delta v)}{c}\cdot\frac{2Mc\Delta v}{qr},$$

计算到 $\Delta v/v_0$ 的第一级，则是 $2Mv_0\Delta v/r$，按照方程(32)，这就避免了对绳子的额外要求，这正是我们所需要的！因此绳上的张力保持 F_0 值不变。

由此得到一个意外的结论：我们的结果方程(31)，对任何形式的随半径变化的约束力一定都是有效的。我们的绳子可以用弹簧来代替而不影响其结果——在最终状态下半径仍保持不变。或者我们立刻回到我们感兴趣的系统，这个绳子可以用核对电子的库仑引力来代替。或者它可能就是作用于多电子原子中一个电子上的随半径而不同的有效力。从已经得出的象方程(31)这样的普遍关系式，甚至在没有较好的原子结构理论的情况下，我们也可以希望得到某些有意义的结论。明显显示出的仅有的原子特征是 r^2。当然，我们必须遵守 $\Delta v/v_0\ll 1$ 这个限制，它实际是对 B_1 的限制，上述结论才能普遍应用。

加上磁场 **B** 对电子轨道的影响可以这样来看：每个电子继续在同样半径的轨道上旋转，但是在它的角速度($\pm v_0/r$，±的选取决定于它的旋转方向)上加了一个小的增量 $\Delta\omega=\Delta v/r$。按照方程(29)，这个增量的值为

$$\Delta\omega=\frac{\Delta v}{r}=\frac{eB}{2m_ec},\tag{33}$$

这一角速度仅依赖于外加的磁场强度和电子的荷-质比。所有在一个方向旋转的电子都加快了同一个量，可以用弧度/秒表示，在另一个方向旋转的电子减慢了同一个量。这新的系统看起来恰好像从一旋转坐标系来看原来系统一样。方程

(33) 中的角速度叫作"拉摩角速度"或"拉摩频率". 拉摩 (Larmor) 是英国的数学物理学家，在任何人尚未真正了解原子结构之前，在 1895 年就证明了这一普遍性理论.

我们只考虑了垂直于 **B** 的轨道. 粗略地说，我们的结论对于物质中的电子轨道应该有三分之一是适用的，因为有三个互相垂直的方向. 平行于 xz 平面和 yz 平面的轨道上所发生的现象是很有趣的，这些情况在做习题 10.22 时可以看到. 它们也产生一个和磁场方向相反并且和轨道半径平方成正比的感应磁矩. 所有的轨道效应可以加在一起构成一个类似于方程 (31) 那样的方程，在这个方程中用轨道半径的均方值 $\langle r^2\rangle$ 来代替 r^2，并且用某一数值因子来把轨道方位的平均效果考虑进去.

我们不想作这样细致的工作，让我们把方程 (31) 应用于所有电子，对轨道半径作某些合理的估计，看我们是否能对表中的一些数据作些近似的说明. 对大多数物质来说，每克中的电子数大致相同，因为在原子中，对应于每个电子在原子核里就有一个质子，并且大约每有一个质子就有一个中子. 所以每克中的电子数 n 和原子量为 2，原子序数为 1 的物质中的电子数相同，即

$$n \approx \frac{6\times 10^{23}}{2} = 3\times 10^{23}. \tag{34}$$

令 r 值为 0.5×10^{-8} 厘米，这一距离作为典型的原子"半径"，以后你们会很熟悉的. 在多电子原子中，自然，有的电子有较大的轨道，有的电子有较小的轨道. 我们用电子质量 m_e 来代替 M. 在放样品的地方磁场强度为 18,000 高斯. 于是一克任何物质中总的感应磁矩粗略地为

$$n\Delta m = \frac{ne^2r^2B}{4m_ec^2}$$

$$= \frac{(3\times 10^{23})(4.8\times 10^{-10})^2(0.5\times 10^{-8})^2(1.8\times 10^4)}{4(9\times 10^{-28})(3\times 10^{10})^2}$$

$$= 0.95\times 10^{-2}, \tag{35}$$

场的梯度 $\frac{\partial B_z}{\partial z}$ 为 1700 高斯/厘米. 用方程 (18) 来计算所受的力，我们可估计这力的大小为 $1700\times 0.95\times 10^{-2}$，约为16达因. 这和表中的许多物质的给出值很接近. 的确，它比我们有理由希望的更为接近，所以这种一致达到意外的程度[1].

我们最好查明白我们的假设 $\Delta v \ll v_0$ 在这种情况下是否被满足. 在方程 (29) 中代入同样数值，我们可以估计 Δv

$$\Delta v = \frac{erB}{2m_ec} = \frac{(4.8\times 10^{-10})(0.5\times 10^{-8})(18{,}000)}{2(9\times 10^{-28})(3\times 10^{10})}$$

$$\approx 10^3 \text{ 厘米/秒}. \tag{36}$$

无需更多的原子物理知识，我们就可以知道和原子中电子的速度相比，10^3 厘米/秒那是很小的. 人就能跑这么快！原子中电子的典型速度接近于 10^8 厘米/秒或者更高些. 这就表明：从原子中的电子的观点来看，甚至相当强的磁体，它所提供的磁场也是很弱的，只能对旋转速度作出微小的改变.

我们现在可以看出为什么抗磁性是一个普遍现象，而且是一种不很显著的现象. 原子和分子都是这样的. 一个分子可以在结构上比原子大很多（可以由几百个或几千个原子构成），一般说，并不能增加有效的均方轨道半径. 理由是在分子中任何给定的电子都是很好地定居在原子上的. 有某些有

---

1) 在把各个方向取向机会相同的所有轨道平均起来所得到的准确公式中，在以 $\langle r^2\rangle$ 代替 r^2 的同时，还以因子 1/6 代替了方程 (31) 中的 1/4. 严密的量子力学理论导出的结果与此完全一样，而且很好的与实验一致. 的确，磁学测量对许多抗磁性物质的原子提供了最精确的确定 $\langle r^2\rangle$ 的方法.

趣的例外，我们的表中有一个——石墨．石墨的异常抗磁性是由于它的异常结构，在其晶格中，允许有些电子可以在同一个平面上的原子群中相当自由地迴游．

10.6 电子自旋和磁矩

电子具有与它的轨道运动毫无关系的角动量．在许多方面它的行为好像是绕着自身的轴在不停地转动着．这个性质叫作*自旋*．测量自旋角动量的大小时，总是得到同样结果：$h/4\pi$，其中 h 是普朗克常数．电子自旋是一种量子现象．在本教程第四卷中你们将可以进一步地知道它的发现以及有关东西．对我们说现在重要的是，*磁矩*与它的本征的或“固有的”角动量有联系，而且这个磁矩的大小是不可变的．如果你把电子看成是一个带负电的绕它自身的轴自旋的球，你就可以预料出磁矩的指向来了．即磁矩矢量的指向是反平行于自旋角动量矢量的，如图 10.14 所示，然而，相对于角动量来说，自旋磁矩是轨道运动的磁矩的两倍．

没有必要试图为这个物体设计一个经典模型；它的性质实质上是量子力学的性质．我们甚至于无需说它是一个电流环．重要的只是它的行为具有如下各种特征：i）它产生一个磁场，这个磁场在远处是一个磁偶极矩的磁场；ii）在外场 **B** 中它受到一个力矩，这力矩与具有等效的偶极矩的电流环所受的力矩相等；iii）在场源里面各处 $\operatorname{div} B = 0$，像在我们已经熟悉

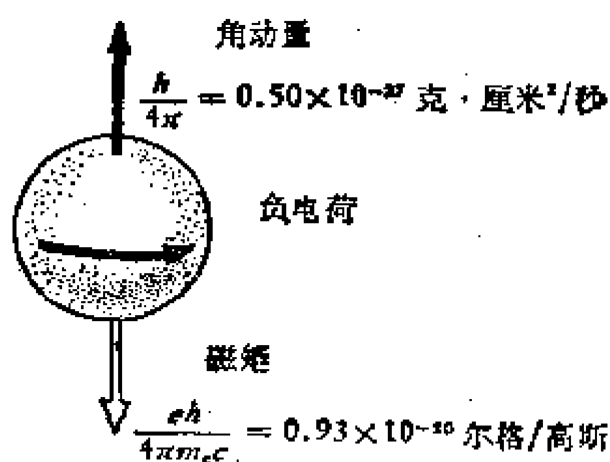


图 10.14 电子的本征角动量（即自旋）以及与此有关的磁矩．

的普通磁场源中一样.

由于自旋磁矩的大小永远是不变的，故外场只能影响其方向. 磁偶极子在外场中受到一个力矩. 做过习题 6.22，你就能证明出在场 **B** 中，具有偶极矩 **m** 的任何形状的电流迴路皆受一力矩 N，

$$\mathbf{N}=\mathbf{m}\times\mathbf{B}. \tag{37}$$

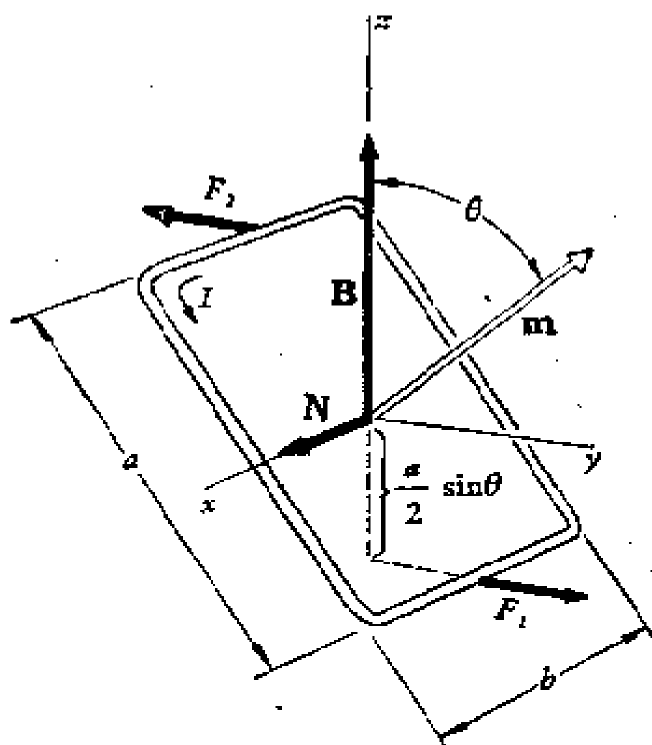


图 10.15 在磁场 **B** 中，作用于一电流环上的力矩的计算. 电流环的磁矩为 **m**.

让我们停下来，为还没有作这个习题的人计算一个简单的特殊情况下的力矩. 在图 10.15 中我们看到一个长方形的流有电流 I 的导线环. 迴路有一大小为 $m=Iab/c$ 的磁矩 **m**. 作用于水平导线上的力 F_1 和 F_2 对于迴路产生一个力矩. 每个力的大小为 $F=IbB/c$，它的力臂是 $(a/2)\sin\theta$. 我们得到作用于迴路上力矩的值为

$$N=2\frac{IbB}{c}\cdot\frac{a}{2}\sin\theta=\left(\frac{Iab}{c}\right)B\sin\theta=mB\sin\theta, \tag{38}$$

力矩的作用方向是使 **m** 平行于 **B**；在所画情况下力矩用指向 x 正方向的矢量 **N** 来表示．所有这些都和普遍公式（37）一致．注意方程(37)和我们在第 9 章中导出的对于在外电场 **E** 中作用于电偶极子 **p** 上的力矩公式即 $\mathbf{N}=\mathbf{P}\times\mathbf{E}$ 完全对应．**m** 和 **B** 的方向相同时，就像电偶极子平行于 **E** 一样是能量最低的位置．同样，使磁偶极子 **m** 从平行转到反平行所需的功为 $2mB$．［见方程（9.18）；对磁的情况我们可以直接地也引用这一结论．］

如果在物质中电子自旋矩可以随意取向的话，我们预料它宁愿取和任何外加磁场 **B** 一致的方向，这是能量最低的方向．假定一克材料中每一个电子都取这个方向．我们已经计算过无论什么材料每克中都大约有 3×10^{23} 个电子．电子的自旋磁矩 m_s 已在图 10.14 中给出为 0.93×10^{-20} 尔格/高斯．排列起来的总自旋磁矩将为 $(3\times10^{23})\times(0.9\times10^{-20})$ 即 2700 尔格/高斯．在我们的线圈中场的梯度是 1700 高斯/厘米，作用在这样样品上的力应当是 4.6×10^{6} 达因，比十磅还多一点！

显然这远比资料上所记载的任何顺磁性样品的力都要大得多．其原因是，电子磁矩的排列是很不理想的．热骚动总是引起自旋轴方向的混乱分布，即无序分布．真正排列的有序程度实际上表现为要选择能量最低的方向和热运动破坏有序取向之间的折衷结果．已证明总磁矩一般地正比于外加场 **B**，反比于绝对温度 T．这是怎样得出来的，必须到本教程的第五卷才能学到，这一论题可以描述为能量和无序之间的竞争．在那时侯，电子自旋的顺磁性将提供一个很有启发性的例子．你们不久就要学到的量子力学会使这个问题比用我们现在的观点来看更为简单些．

为什么不是每种物质都是顺磁性的呢？理由是在大多数

的原子和分子中，电子是成对地组合起来的，每对中自旋被强制指向相反的方向，不管外加磁场如何．结果是每个电子对中的磁矩恰好相互抵消．剩下的就是我们已经研究过的抗磁性了．少数分子含有奇数个电子，对它们来说成对的完全抵消显然是不可能的．作为例子，氧化氮 NO 的每个分子中有 15 个电子；它是顺磁物质．氧分子 O_2 含有偶数个电子，但是它的电子结构恰好有利于两个电子自旋不互相抵消．在某些元素族中，特别是在周期表中钆周围的元素，以及铁周围的元素，其原子含有不成对的电子自旋，它们在磁场中是比较自由取向的．(这样原子的磁矩也常常包括一些轨道运动的贡献)．在金属导体中"自由"电子在金属中徘徊，具有它们所特有的弱顺磁性．所有这些都基本上是量子物理的性质．

甚至抗磁性，从基本上讲，也要涉及量子力学．考虑在一个原子中，两个电子沿相反的方向迴转．我们解释抗磁性产生的原因是因为外加场 **B** 使一个电子转的稍微快些，使另一个转的稍微慢些．但是为什么两个轨道最后不都转到轨道磁矩指向平行于磁场的同一方向呢？ 回答是在大多数情况下，按量子力学定律的要求，两个电子的轨道运动总保持在相反的方向，很象电子自旋被两个两个地分成对一样．

10.7 磁 化 率

我们已经看到在顺磁性和抗磁性物质中，都产生一个正比于外加磁场的磁矩．至少，在大多数情况下是这样．在很低温度和相当强的外场中可以看到感生的顺磁性磁矩可以随场强的增强而趋近于一个极限值．撇开这"饱和"效应不谈，磁矩和外加磁场之间的关系几乎是线性的，所以我们可以用感生磁矩和外加磁场的比来表征物质的磁特性．这个比叫作磁化率．随我们选取一克物质的，或是一立方厘米物质的，或

是一克分子物质的磁矩，而把它定义为比磁化率，体磁化率或克分子磁化率．我们在 10.5 节的讨论中提出，对于抗磁性物质来说，根据每克物质的感应磁矩而建立的比磁化率应当对各种物质都几乎是相同的．然而，根据每立方厘米物质的感应磁矩而建立的体磁化率更切合于我们现在的情况．

我们称单位体积内的磁矩为磁极化强度，或磁化强度，用符号 $\mathbf{M}$ 来表示．现在磁化强度 $\mathbf{M}$ 和磁场 $\mathbf{B}$ 具有同样的量纲[1]．为了证明它，回忆一下磁偶极子的场 $\mathbf{B}$ 的量纲为 $\frac{\text{磁偶极矩}}{(\text{距离})^3}$，而 $\mathbf{M}$ 的量纲，如我们刚才所规定的，为 $\frac{\text{磁偶极矩}}{\text{体积}}$．

如果我们现在规定体磁化率 χ_m 由关系式

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{B} \quad \text{（提醒：注意下边的附注）} \tag{39}$$

来定义，则磁化率是没有量纲的数．对抗磁性物质是负的，对顺磁性物质是正的．这完全类似方程(9.38)中所表示的方法，在那里我们定义电极化率 χ_e 为电极化强度 P 和电场 E 的比．我们将立即看到这种类似甚至可以再深入一步，因为物质中的宏观磁场 $\mathbf{B}$ 是微观磁场 $\mathbf{B}$ 的平均，正像宏观电场 $\mathbf{E}$ 是微观电场 $\mathbf{E}$ 的平均一样．

不幸的是方程(39)并不是体磁化率的习惯定义．在通常的定义中出现另一个场 $\mathbf{H}$ 来代替 $\mathbf{B}$，我们在适当的时候将会见到它[见方程(55)]．虽然不合逻辑，但通过 $\mathbf{H}$ 来定义磁化率具有某些实际的理由，而且习惯势力已经如此牢固地建立起来了，以致最后我们不得不对它屈服．但是在本章中只要可能我们想自然地和一致地按照物质中电场的讨论途径平行地来进行讨论．

---

1) 虽然 M 和 B 的量纲相同，如果用同一单位来表示它们，必将引起混乱，因为立刻会出现一个 4π 因子．如果需要给 M 的单位以一个名称的话，我们采用尔格/高斯・厘米^3．

只要 χ_m 是一个比 1 小得多的数值，定义上的这种差别并无实际重要意义. 固态或液态的纯抗磁性物质，χ_m 的值在 -0.5×10^{-6} 和 -1.0×10^{-6} 之间. 甚至对于在表中所给的条件下的氧来说，顺磁磁化率也小于 10^{-3}. 这就意味着物质中偶极矩所产生的磁场，至少从宏观平均来看，比外加场 **B** 要弱得多. 这就使我们坚信，在这样的系统中我们可以假设作用在原子偶极子上使它们定向的场，和样品不存在时那里原有的场一样. 然而，我们感兴趣的是另外一些系统，在这些系统里磁矩的场不是很小的. 所以，正像研究电极化的情形一样，我们需要研究磁化物质自己在物质内部和外部所产生的磁场.

10.8 磁化物质引起的磁场

一块物质所包含的均匀分布在整个体积中的大量磁偶极子都指向同一方向时，这块物质就叫作*被均匀磁化*了. 磁化矢量 **M** 只不过是每单位体积中已经取向的偶极子数和每一个偶极子的磁矩 **m** 的乘积. 我们并不关心这些偶极子保持什么样的排列. 可能有来自其他场源的外加磁场，但我们对此并不感兴趣. 我们要研究的仅是偶极子自己产生的磁场.

首先考虑在垂直于磁化方向上切出的一片厚度为 dz 的材料，如图 10.16 (a) 中所示. 这片可以再分成更小的片. 一个小片具有面积为 da 的端面，由于 M 是单位体积内的偶极矩，每个小片含有总偶极矩为 $M\,da\,dz$ [见图 10.16(b)]. 这样的小片在所有远处各点——远是相对于小片的大小来说的——所产生的磁场正好是具有同样磁矩的任何偶极子的磁场. 我们可以把一个 dz 宽的导体带子弯成小片的形状，让电流 $I = Mc\,dz$ 流过这个迴路，造成具有小片那样强度的偶极子 [见图 10.16 (c)]. 这个迴路的偶极矩为

$$m = \frac{I}{c} \times \text{面积} = \frac{M\,c\,dz}{c}\,da = M\,da\,dz. \qquad (40)$$

这和小片的偶极矩一样.

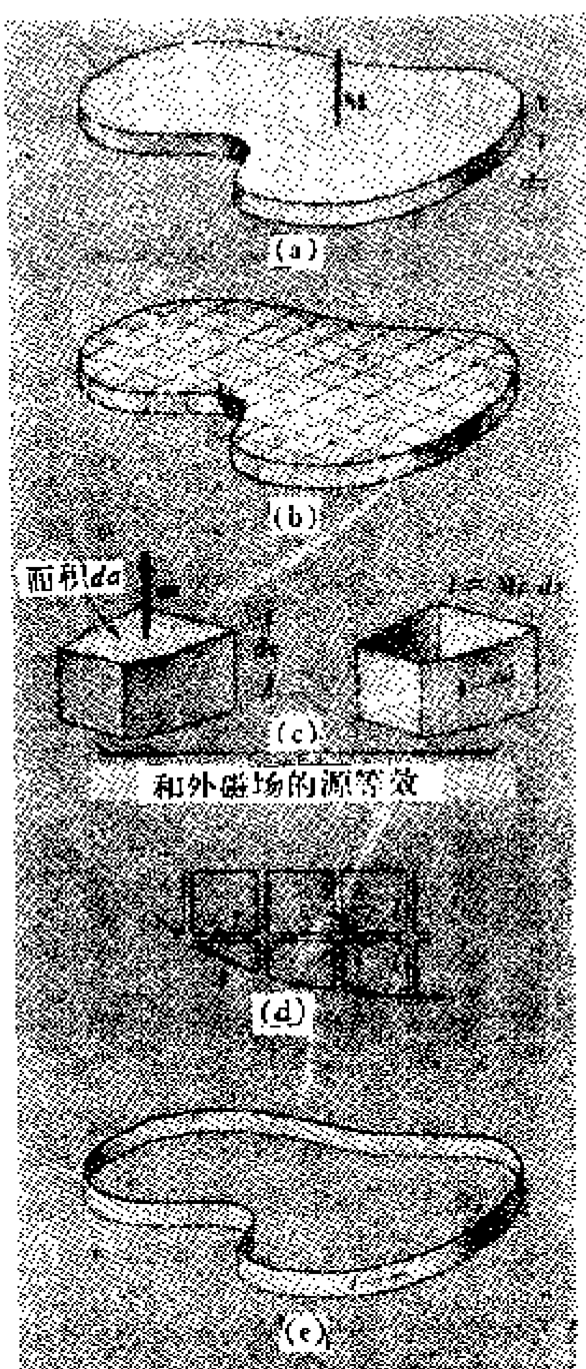


图 10.16 在宽面的垂直方向磁化的薄片，在讨论它的外部磁场时，和一个电流带等效.

让我们把这片材料中的每一小片都用这样的电流环来代替，如图 10.16(d)所示. 所有这些环中的电流都是相同的，因此我们在内部边界上看到相等而相反的电流，总电流等于零. 所以我们的分成许多小环的"鸡蛋篓"就等效于一个单个的围着外圈一周的带子，它载有电流 $M\,c\,dz$ [图 10.16 (e)]. 现在这些小片可以作得很小，只要我们不分到分子大小就行. 它们又必须足够大，以致各小片之间磁化强度不变化得很大. 在这样限制范围之内，我们可以指出在任何外部一点的场，甚至靠近小片的地方，都是和电流带的场相同.

剩下的只是再由这样的薄层或片作成一个整块，如图 10.17(a). 整块材料等效于图 10.17 (b) 中的宽带子，绕着它在每个宽度为 dz 的带子中流过电流 $M\,c\,dz$，以静电单位/秒为单位，或者更简单地说，

绕着宽带子有一面电流密度 $\mathscr{J}$，以(静电单位/秒)/厘米为单位，其表达式为

$$\mathscr{J} = Mc. \tag{41}$$

在图 10.17 (a) 中被磁化的物质块的外部任一点的磁场 $\mathbf{B}$，甚至在靠近物质块的地方，只要不是接近到分子距离以内，和在图 10.17 (b) 中宽电流带的邻近地方的对应点的场 $\mathbf{B}'$ 相同.

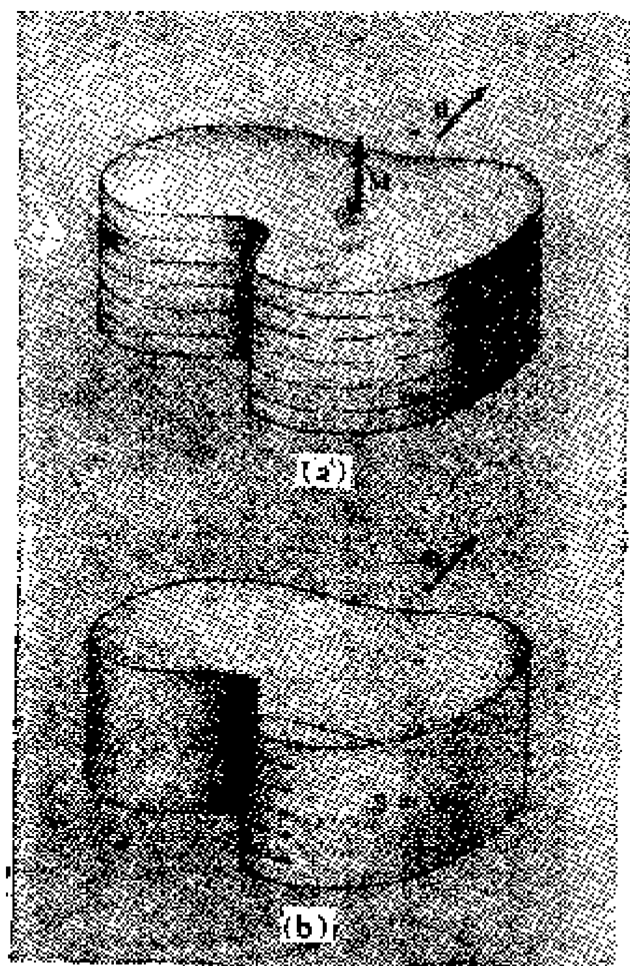


图 10.17　一个均匀磁化的物质块等效于一个面电流带.

但是在磁化材料内部的场怎样呢？这里我们面临在第九章中所遇到的问题.如果我们用称之为"微观"的原子尺度来观察，在物质的内部磁场是一点也不均匀的. 在相距几埃的两点之间，它的大小和方向都在急剧地改变着. 这种微观场 $\mathbf{B}$ 只不过是真空中的磁场，因为如我们在第九章中所强调的，从微观的观点来看，物质是粒子和电荷在本来是空的空间中的集合. 在物质中可以被唯一确定的宏观场是微观场的空间平均.

因为没有可归于磁荷的效应. 我们相信微观场本身满足 $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$. 如果这点属实，那就可以立即直接引出结论，在我们的物质块内部的微观场的空间平均和与之等效的电流带里面的场 $\mathbf{B}'$ 相同.

为了证明这一点，考虑一下图 10.18 (a) 中的平行于其长度方向的被均匀磁化的长棒. 我们已经指出外部的场正好和图 10.18 (b) 中所画的长圆柱形电流的场一样(实际上等于一个单层螺线管). 在图 10.18 (a) 中 S 表示一闭合曲面，它包括穿过棒内部的 S_1 那部份. 因为对于内部的微观场，和外部的场一样，$\mathrm{div} B=0$，所以在 S 所包括的整个体积中，处处 $\mathrm{div} B=0$. 根据高斯定理，在整个 S 面上场 $\mathbf{B}$ 的面积分必定等于零. 在整个闭合面 S' 上 $\mathbf{B}'$ 的面积分也是零. 在圆柱体的外部，S 和 S' 上的 B 和 B' 相等.因此在内部圆形面 S_1 上的 B 的面积分必定等于在内部的圆形面 S_1' 上的 B' 的面积分. 这对于任何一个近间隔的平行圆形面 S_2，S_3 等也必定是成立

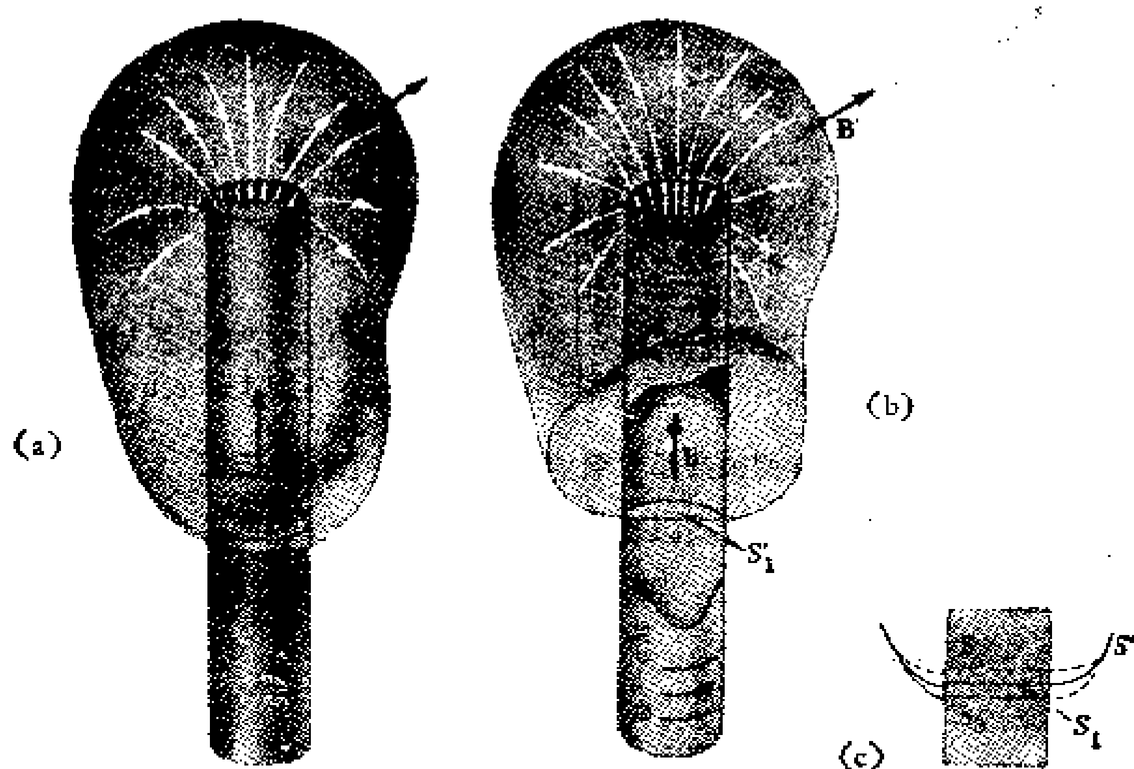
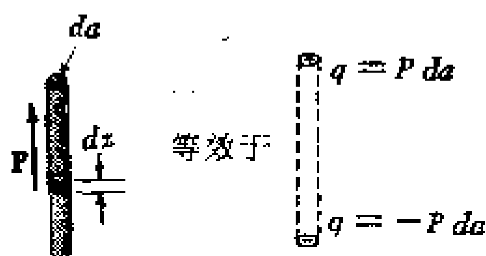
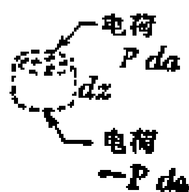


图 10.18 (a) 一个均匀磁化的圆柱形棒. (b) 等效的空心圆柱电流，或柱状筒形电流 (c) 用靠得很近的平行面 $S_1, S_2, \cdots$，在棒内部取样，由此来求出微观场的空间平均.

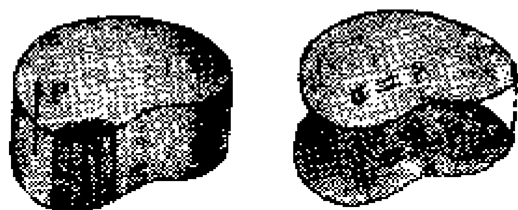
a) 作为外电场 **E** 的源



因为一小块体积为 $da \cdot dz$ 的极化物质具有的电偶极矩等于：

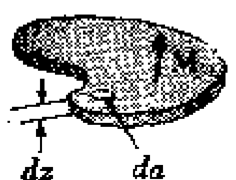


一均匀极化块可以再分成这样小柱．所以极化块和具有 $\sigma = P_z$ 的两片面电荷层有同样的外场．

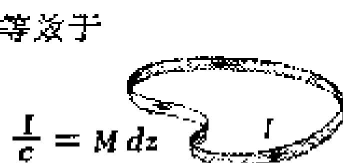


[更一般情况为：对于非均匀极化，极化物质和电荷分布 $\rho = -\mathrm{div}\mathbf{P}$ 等效]

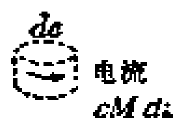
b) 作为外磁场 **B** 的源



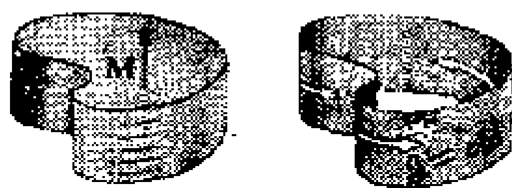
等效于



因为一小块体积为 $da \cdot dz$ 的磁化物质具有磁偶极矩等于：



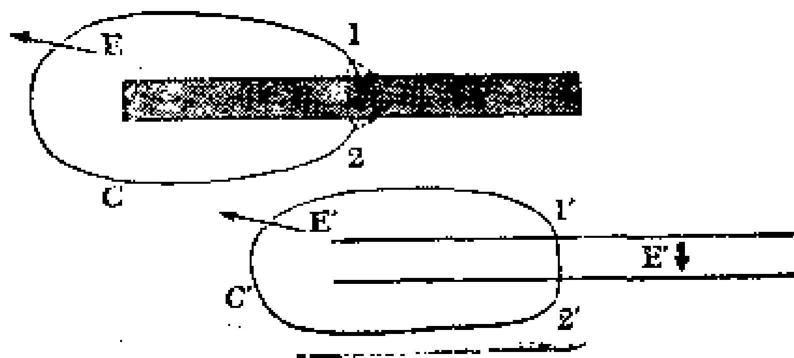
一均匀磁化块可以分成这样一些层，所以磁化块和具有 $\mathscr{J} = cM$ 的面电流宽带有同样的外场．



[更一般情况为：对于非均匀磁化，磁化物质和电流分布 $\mathbf{J} = c\,\mathrm{curl}\mathbf{M}$ 等效]

这种相对应的关系推广到内部场的空间平均的证明

考虑一个宽而薄的均匀极化片条以及和它等效的面电荷层．靠近中点处外场是弱的而且 $\mathbf{E}'$ 是均匀的．如果对内部的场 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$，则 $\oint_C \mathbf{E}d\mathbf{l} = 0$．但是在



外部路径上 $\mathbf{E}=\mathbf{E}'$，因此在所有内部路径上

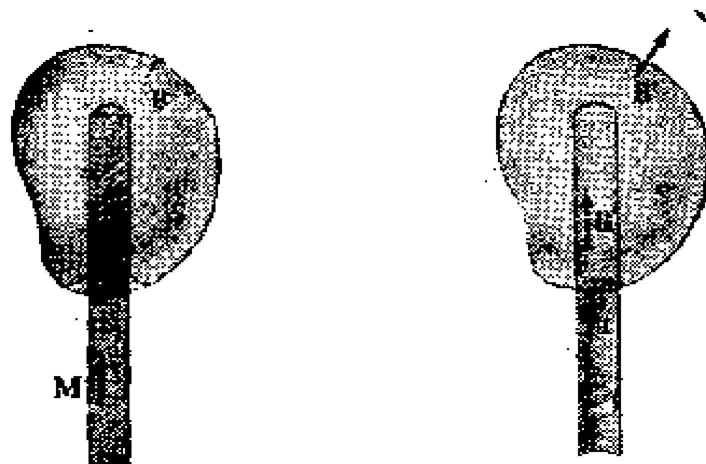
$$\int_1^2 \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\int_{1'}^{2'}\mathbf{E}'\cdot d\mathbf{l}'.$$

结论：$\langle\mathbf{E}\rangle=\mathbf{E}'$；内部电场的空间平均等于场 $\mathbf{E}'$，场 $\mathbf{E}'$ 是由上面所说的等效电荷分布，在空的空间中在此点产生的场(和任何外源一起产生的)．考虑一长而均匀的磁化柱以及和它等效的面电流筒． 靠近中点处外场是弱的而且 $\mathbf{B}'$ 是均匀的．如果对于内部场，$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$，则 $\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{a}=0$． 但是在柱的外表面 $\mathbf{B}=\mathbf{B}'$，因此在任何内部的 S_1，S_2 等面上

$$\int_{S_1}\mathbf{B}\cdot d\mathbf{a}=\int_{S_1'}\mathbf{B}'\cdot d\mathbf{a}'.$$

结论：$\langle\mathbf{B}\rangle=\mathbf{B}'$；内部磁场的空间平均等于场 $\mathbf{B}'$，场 $\mathbf{B}'$ 是由上面所说的等效电流分布，在空的空间中在此点产生的场(和任何外源一起产生的)

图 10.19 电 (a) 和磁 (b) 情况的比较



的，如图 10.18 (c) 所示，因为在圆柱外边的这些圆形面的邻近处的场是小到可以忽略的，所以外边的部分不起任何作用．对一系列这样等间隔的平面取面积分，这是计算这一邻近区域的场 $\mathbf{B}$ 的体平均值的一个非常好的方法，因为在这种方法中对所有体元都同等地取了样．由此可以得出磁化棒内部的微观场 $\mathbf{B}$ 的空间平均等于图 10.18 (b) 中的电流筒内部的场 $\mathbf{B}'$．

把我们刚才所作的讨论和我们在第 9 章中对相应问题的分析作一个比较，是很有启发性的． 图 10.19 把这些情况并排地表示出来了． 我们可以看出它们有条理地平行排列着，

但是在每一阶段它们有不同之处，这种差别反映出了从观测到的事实概括出的本质上的不对称性：**电荷是电场的源，而运动电荷是磁场的源**．例如，在有关微观场的平均的论证中，在电的情况，问题的关键是对微观电场的 $\text{curl}\mathbf{E}=0$ 的假定．在磁情况，问题的关键是对微观磁场的 $\text{curl}\mathbf{B}=0$ 的假定．

如果在材料内部磁化强度 $\mathbf{M}$ 是不均匀的，则可用 $\mathbf{M}(x,y,z)$ 的位置变化来表示，那么等效电流分布简单地为

$$\mathbf{J}=c\,\text{curl}\mathbf{M}. \tag{42}$$

让我们来看在下述情况这关系式会怎样．假设有一沿 z 方向的磁化强度，它沿 y 方向逐渐增强，在图 10.20(a)中，画出了材料的一小部分，它又可以再分成许多小块．假设这些小块是如此小以至我们可以认为在每一单个小块内磁化是均匀的．这样我们可以用面电流密度为 $\mathscr{J}=cM_z$ 的电流带来代替每个小块． 如果小块的高度为 Δz，这样的带所载电流为 $\mathscr{J}\Delta z$ 或 $cM_z\Delta z$． 现在每个带比在它左边的带的电流密度稍微大一点．每个环中的电流都比它左边的环中的电流大 ΔI，

$$\Delta I=c\Delta z\,\Delta M_z=c\Delta z\frac{\partial M_z}{\partial y}\Delta y. \tag{43}$$

在这一行小块中每个界面处都有沿 x 方向的大小为 ΔI 的净电流 [图 10.20 (c)]． 为计算沿 x 方向的通过单位面积的电流，我们可以乘以单位面积上小块的数目 $\dfrac{1}{(\Delta y\Delta z)}$． 于是

$$J_x=\Delta I\left(\frac{1}{\Delta y\Delta z}\right)=c\,\frac{\partial M_z}{\partial y}. \tag{44}$$

得到 x 方向的电流的另一途径是要有一沿 z 方向变化的磁化强度的 y 分量．如果我们用一列垂直的小块来探讨这种情况，我们发现 x 方向的净电流密度为

$$J_x = -c\frac{\partial M_y}{\partial z}. \tag{45}$$

一般说来，将这两种情况迭加起来

$$J_x = c\left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}\right) = c(\mathrm{curl}\,\mathbf{M})_x, \tag{46}$$

这足以建立方程(42)。

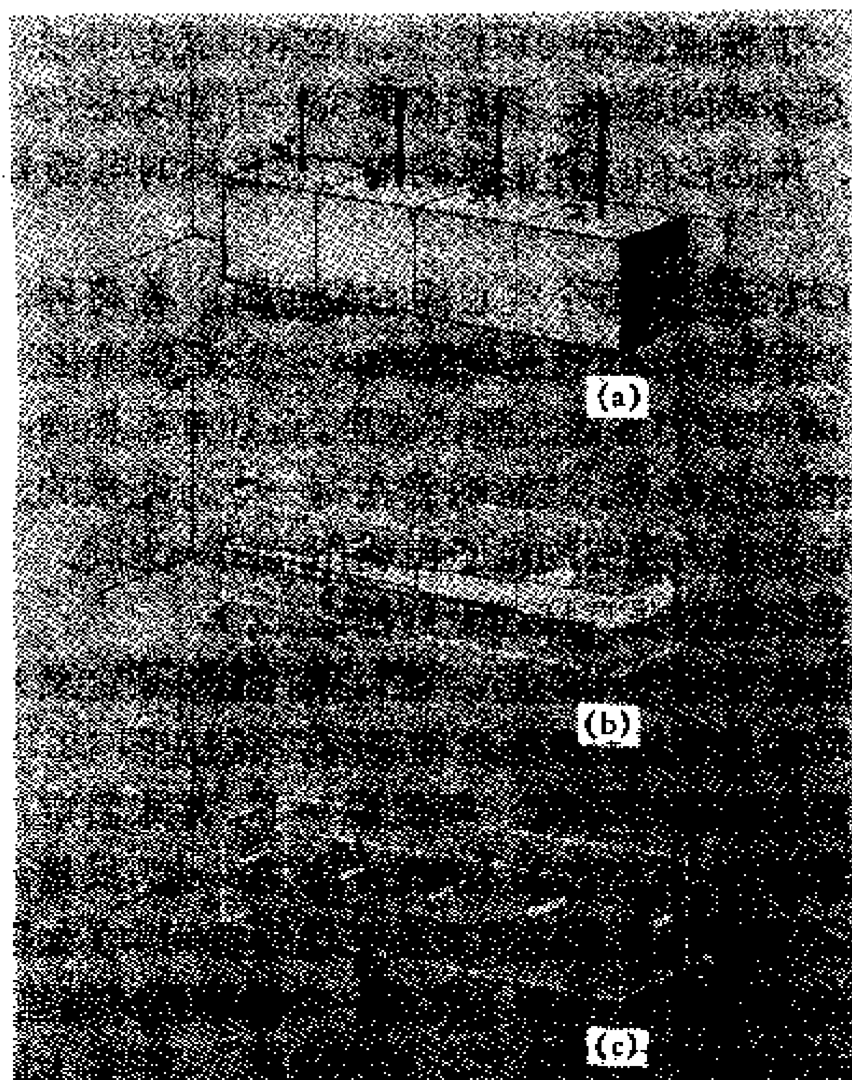


图 10.20　非均匀磁化和体电流密度等效。

10.9　永磁体的场

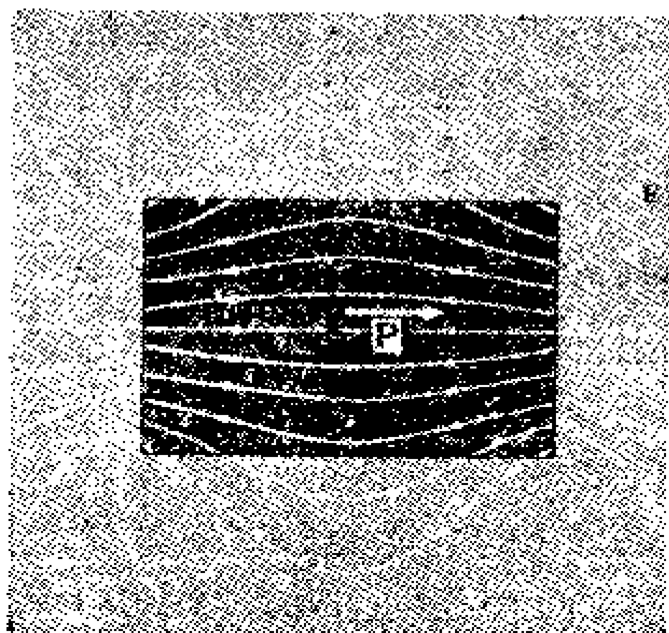
我们在第 9 章中所谈到的均匀极化球和棒，甚至在实验

室里也是少见的。在某些物质中可以出现冻结住的电极化，虽然它经常被累积的自由电荷所掩盖。为了制作图 10.3(a)，它表明极化棒的场该是什么样子，这就需要用两个带电的圆盘。另一方面，永久极化的物质，即具有永久磁化的强度的物质，是我们很熟悉而且非常有用的物质。永磁体可以由一些铁磁物质的合金和它们的化合物作成。为什么这样作是可能的，这是我们要留给 10.11 节的一个问题，在那里我们将简短地讨论一下铁磁性的物理性质。在本节我们可以认为永磁体的存在是不成问题的，我们想研究一下均匀磁化的圆柱棒的磁场 **B**，并把它和同样形状的均匀极化棒的电场 **E** 作仔细地比较。

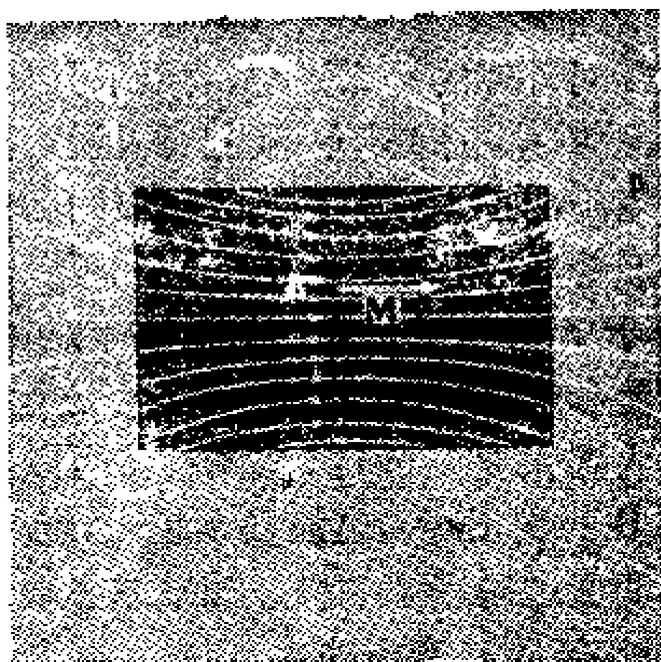
图 10.21 画的是每个实心棒的截面图。在每种情况下极化都是和轴平行的，而且是均匀的。这就是说极化强度 **P** 和磁化强度 **M** 在它们各自的圆柱体里，各处都有相同的方向和大小。在磁的情况下，这意味着在每一立方毫米的永磁体中有同样数目的排列整齐的电子自旋指向同一方向。(用近代永磁材料可以做到非常接近于这种情况。)

所谓圆柱体的内部的场，当然，我们指的是定义为微观场的空间平均的宏观场。根据这种理解，我们在图 10.21 中画出在棒的内部和外部的场线。顺便说一下，并未假定这样两个棒是彼此靠近的；我们在图上把它们放在一起，只是为了便于比较。每个棒都是孤立在原来是无场的空间中(如果把两个棒放在一起，你想哪一个棒干扰另一个的场更历害些呢?)。

在棒的外部场 **E** 和 **B** 看起来很相似。事实上场线走的是相同路线。如果你回想一下电偶极子和磁偶极子在“远处的场”是相似的，你就不会对此感到意外了。每一小块磁体是一个磁偶极子，每一小块电极化棒(有时叫作驻极体)是一个电偶极子，在棒外部的场是所有这些小块在远处的场的叠加。



（a）均匀极化圆柱的内部和外部的 E．



（b）均匀磁化圆柱的内部和外部的磁场 B．
上述的每种情况所显示出的内部场都是宏观场，即原子或
微观场的局部平均．
图 10.21

无论在棒的内部和外部，场 B 和圆柱筒形电流的场是一样的．事实上如果我们在一个卡片纸作成的圆柱上很均匀地绕上一层细线，作成螺线管，我们给它接上电池就可以复制出

永磁体的外部和内部的场 **B**.（线圈会变热，电池将会用尽，但电子自旋所提供的电流是自由的和无摩擦的！）在电极化棒内部和外部的电场 **E** 就是在圆柱两端处的两个带电圆盘产生的场.

注意在圆棒内部的场 **E** 和 **B** 在式样上有本质的差别：**B** 指向右方，在圆柱的两端是连续的，而在圆柱的侧表面场的方向显出急剧的改变. **E** 指向左方，在穿过圆柱表面时就好像那里不存在表面似的，但在两个端面处是不连续的. 产生这种差别是由于物理上的电偶极子的“内部”和物理上的磁偶极子的“内部”在本质上有差别. 如在图 10.8 中所见到的那样，所谓物理上的，意思是指大自然实际提供给我们的那些偶极子.

如果我们仅对外部的场感兴趣，我们可以用二者之中的任何一张图形来描述磁体的场. 我们可以说永磁体的磁场是由一层在磁体右端的正磁核——“北”磁极的面密度——和一层在另一端的负磁核“南”极产生的. 我们可以采用一标量势函数 $\varphi_{磁}$，符合于 $B=-\mathrm{grad}\varphi_{磁}$. 势函数 $\varphi_{磁}$和假想极的密度的关系就像电势和电荷密度的关系一样. 比起矢势来，标势的简单性颇令人感兴趣. 而且，磁的标势可以用一非常简洁的方式和作为 **B** 的真正源的电流联系起来，因而人们可以采用标势而不必明显地用假想磁极. 如果你必须设计磁体或者计算磁场，你就需要用这套方法.

但是，如果我们想了解磁性材料内部的场时，我们必须放弃磁极这个假想. 从非常真实的意义上说，永磁体内部的微观磁场像是图 10.21 (b) 中的场而不是像图 10.21(a) 中的场，这一点已由实验证明：有用高能带电粒子在磁铁中的偏转作的实验，还有磁场对慢中子效应的实验，慢中子甚至更容易通过物质内部.

图 10.22 (*a*) 画的是一个小圆盘状的永磁体，其磁化强度和对称轴平行. 你或许对长棒形永磁体更熟悉些. 然而，可以用某些新材料作成相当强的扁平盘状的磁体. 在本例中我们选择的特殊尺寸和图 9.21 中电极化圆盘的尺寸相同. 给出磁化强度为 150 CGS 单位. 电子的磁矩为 0.93×10^{-20} 尔格/高斯，所以 M 的值相当于每立方厘米中 1.6×10^{22} 个排列起

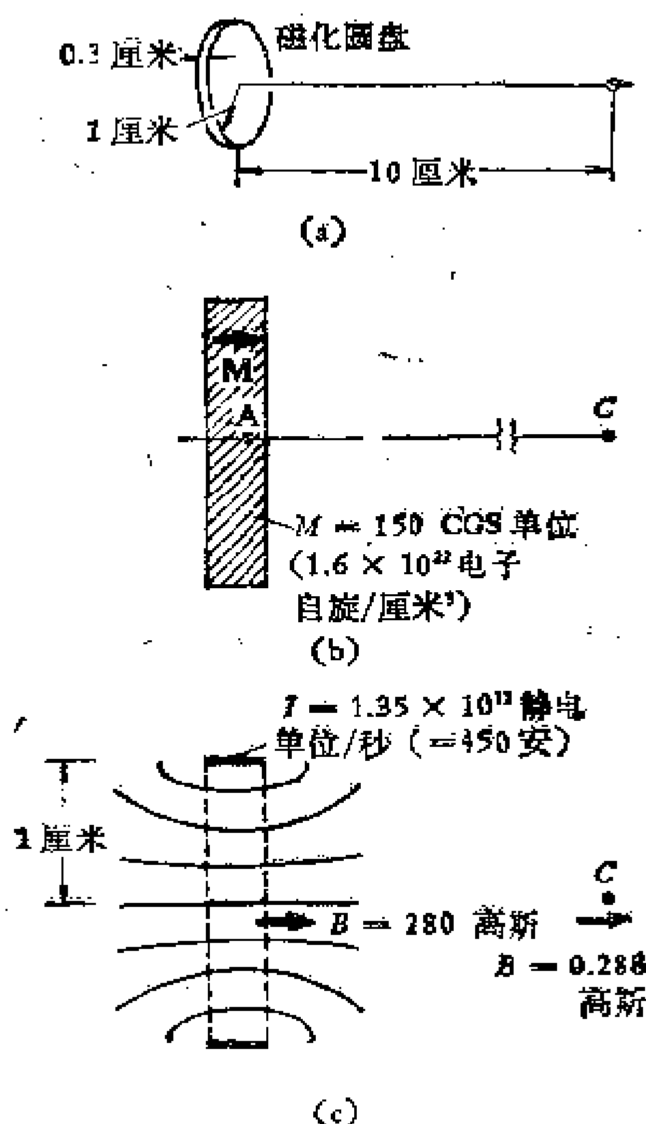


图 10.22 (a) 平行于轴向的均匀磁化圆盘. (b) 盘的截面图. (c) 等效的电流是一沿着圆盘的边缘流动的数量相当于 1.35×10^{12} 静电单位/秒或 450 安培的电流带. 磁场 **B** 和一非常短的螺线管的磁场相同，或者说和 1 厘米半径的简单电流环的磁场近似.

来的电子自旋。这个圆盘和绕着它的边缘的面电流密度为 $\mathscr{J}=cM$ 的电流带等效。边缘宽 0.3 厘米，故总电流 I 为

$$0.3cM=(0.3)(3\times10^{10})(150),$$

或 1.35×10^{12} 静电单位/秒。用实用单位制表示是450安——比汽车所用电池短路时的电流还大！在空间中任意一点的场 $\mathbf{B}$，包括盘内部的点，就是这个电流带的场。例如，靠近圆盘中心的 B 近似为

$$B=\frac{2\pi I}{rc}=\frac{2\pi(0.3\,cM)}{rc}=\frac{2\pi\,(0.3)(150)}{(1.0)}=280\text{ 高斯.} \tag{47}$$

这个近似就是把 0.3 厘米宽的电流带当作简单的电流环来对待。（电学的例子中相应的近似是我们认为等效电荷层的大小比它们的间距大得多。）对于在远处一点的场，在电流环的情况是容易计算的，但是我们也可以像在电场的例子中一样，作一近似计算。即我们可以求出这物体的总磁矩，并求出此强度的单个偶极子在远处的场。

10.10 自由电流和场 H

区分开束缚电流和自由电流常常是有用的。束缚电流是和分子或原子磁矩有关的电流，包括自旋粒子的本征磁矩。这些就是安培所想像的分子电流环，是我们刚才所讨论的磁化的来源。自由电流一般是在宏观路径上流动的传导电流——这种电流是可以用开关起动和停止的，而且可以用安培计测量的。

在方程 (42) 中的电流密度 $\mathbf{J}$ 是束缚电流的宏观平均，所以以后我们把它标明为 $\mathbf{J}_{束缚}$：

$$\mathbf{J}_{束缚}=c\,\mathrm{curl}\,\mathbf{M} \tag{48}$$

像图 10.17 中的磁化物体块的侧面那样，在 M 不连续的表面

处，我们总有一面电流密度 $\mathscr{J}$，它也是束缚电流.

我们发现不但在物质的外部，而且作为空间平均，在物质的内部，$\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{J}_{束缚}$ 的关系，恰好像它和任何电流密度的关系一样. 这就是说 $\mathrm{curl} B = (4\pi/c)\mathbf{J}_{束缚}$. 但这是在没有自由电流时的情形. 如果我们把自由电流考虑进去，就需要把自由电流产生的场简单地叠加在由磁化物质引起的场上，我们有

$$\mathrm{curl}\ B = \frac{4\pi}{c}(\mathbf{J}_{束缚} + \mathbf{J}_{自由}) = \frac{4\pi}{c} J_{总}. \tag{49}$$

让我们通过方程 (48) 用 $\mathbf{M}$ 来表示 $J_{束缚}$，则方程 (49) 变为

$$\mathrm{curl}\,\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}(c\,\mathrm{curl}\,\mathbf{M}) + \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_{自由}. \tag{50}$$

它可以改写为

$$\mathrm{curl}\,(\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_{自由}. \tag{51}$$

如果我们现在在空间每一点按以下关系式定义一矢函数 $\mathbf{H}(x, y, z)$，

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}. \tag{52}$$

方程 (51) 就可以写成

$$\mathrm{curl}\,\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_{自由}. \tag{53}$$

换句话说，由方程 (52) 定义的矢量 $\mathbf{H}$ 和自由电流的关系与 $\mathbf{B}$ 和总电流(束缚电流加自由电流)的关系是一样的. 然而这种类比是不完全的，因为我们总是有 $\mathrm{div}\mathbf{B} = 0$，而我们的矢函数 $\mathbf{H}$ 的散度却不一定为零.

这确实会使我们想到我们在上一章有点勉强地引入的矢量 $\mathbf{D}$. 记住，$\mathbf{D}$ 和自由电荷的关系与 $\mathbf{E}$ 和总电荷的关系一样. 尽管我们有点不重视 $\mathbf{D}$，但是矢量 $\mathbf{H}$ 确实是有用的，这是有一个实际的理由的，这个理由值得一谈. 在电系统中，我

们易于控制和测量的是物质的电势差，而不是物体上的自由电荷的数量．于是我们可直接控制电场 **E**．**D** 在我们直接控制范围以外，并且因为它在任何意义上都不是一个基本量，它出现什么情况都没有重大意义．然而在磁系统中，很明确，我们最容易控制的是自由电流．我们让它流过导线，用安培计来测量它，用绝缘的方法把它们限制在确定的路径上等等．通常我们几乎不能直接控制磁化强度．因此也几乎不能控制 **B**．所以辅助矢量 **H** 是有用的，虽然 **D** 不是很有用的．

和方程（53）等效的积分关系式是

$$\int_C \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=\frac{4\pi}{c}\int_S \mathbf{J}_{自由}\cdot d\mathbf{a}=\frac{4\pi}{c}I_{自由}, \tag{54}$$

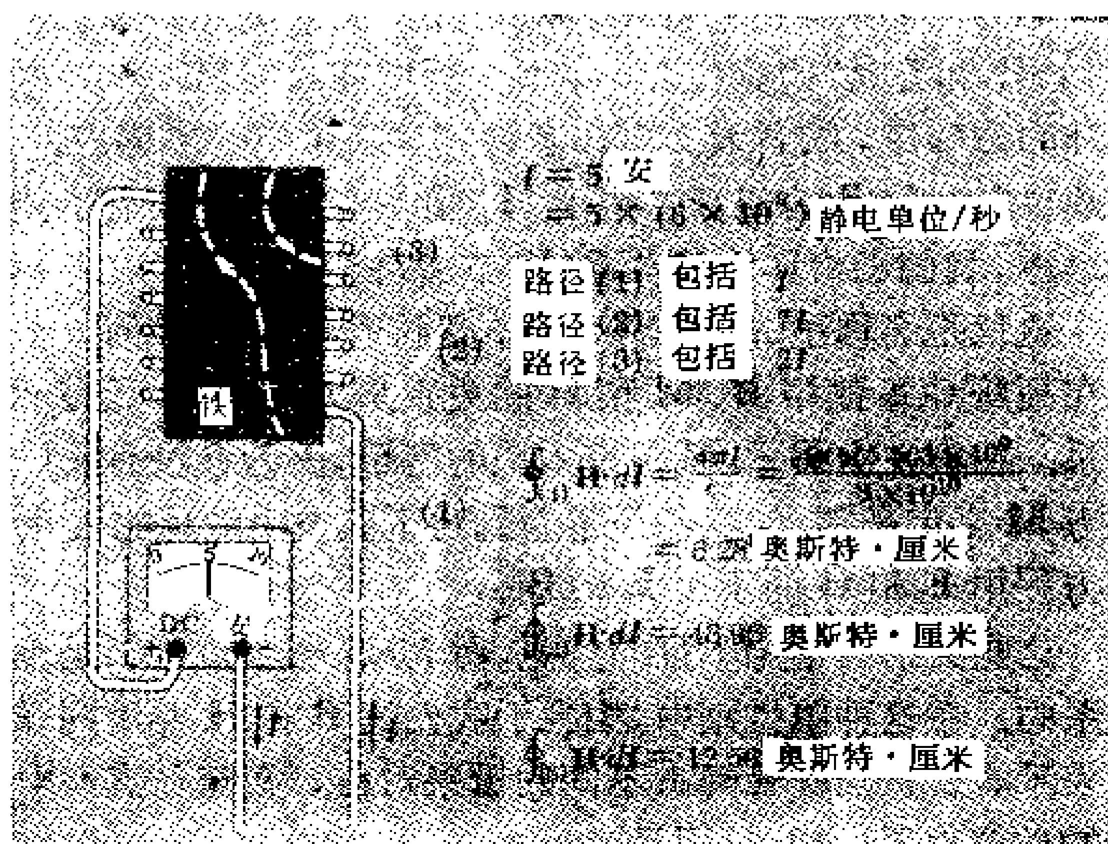
其中 $I_{自由}$是由路径 C 所包围的总电流．假如我们沿一块铁绕一个线圈，而且让线圈中通过电流，这电流可以用与线圈串联的安培计测量．这是自由电流，而且是系统中仅有的自由电流．因此，不论路径是否通过铁块，我们确实知道的是沿任意闭合路径的 **H** 的线积分．积分仅依赖于路径环绕线圈的匝数，而和铁的磁化强度无关．在这系统中确定 **M** 和 **B** 可能是相当复杂的．选出来一个我们能够容易直接测量的量来是很有益的．

图 10.23 用一实例表明 **H** 有这种特性，而且提醒我们在实用情形下所用的单位．**H** 的量纲和 **B** 的相同；在高斯 CGS 制中它们和以静电单位/秒为单位的电流的关系完全相同．众所周知，在这系统中磁场强度 **B** 的单位叫作高斯．并不迫切需要给 **H** 的单位以不同的名称．尽管如此，喜欢起名字的人还是给 **H** 的单位以一个自己特有的名称，叫作奥（斯特）[1]．

---

1) **B** 以高斯为单位和 H 以奥斯特为单位就像以厘米表示半径，而在沿圆周测量距离时保留"弧厘米"这一特殊名称一样！

因为你们在别处会遇到这个名称，所以我们在图 10.23 中引用了它.



在路径(1) $\mathbf{B}=\mathbf{H}$，因而$\int_{(1)}\mathbf{B}\cdot d\mathbf{l}=6.28$ 高斯·厘米，

在路径(2)和(3)在铁中 $\mathbf{B}\neq\mathbf{H}$.

图 10.23 用图说明自由电流和 $\mathbf{H}$ 的线积分之间的关系.

我们在 10.2 节中已经讨论过，因为没有磁荷就意味着在任何地方都 $\operatorname{div}\mathbf{B}=0$，甚至在原子和分子里面也是如此，所以我们把 $\mathbf{B}$ 看成是基本的磁场矢量. 如我们在 10.8 节中指出的，从 $\operatorname{div}\mathbf{B}=0$ 得出，在物质内部的平均宏观场是 $\mathbf{B}$ 而不是 $\mathbf{H}$. 这个含义在过去并不总是被理解或是受到重视的. 此外，我们已经解释过，$\mathbf{H}$ 在实际上具有便利之处. 在某些老书中可以看到 $\mathbf{H}$ 是作为基本的磁场引入的. 然后 $\mathbf{B}$ 被定义为 $\mathbf{H}+4\pi\mathbf{M}$，而且被命名为*磁感应*. 甚至某些近代著者，他们虽然把 $\mathbf{B}$ 作为基本的磁场，也觉得不得不把它叫作磁感应，

因为磁场一词在历史上已为 **H** 优先占有．这似乎是拙笨和迂腐的．如果你走进实验室问一个物理学工作者，是什么东西使他的汽泡室里的 π 介子轨道弯曲，他大概会回答是"磁场"而不回答是"磁感应"．你很少听到地球物理工作者提到地球的磁感应，或者天文工作者谈到银河系中的磁感应．我们建议继续称 **B** 为磁场，至于 **H**，虽然曾经为它创造了其他的名称，我们仍将称它为"场 **H**"或者甚至称之为"磁场 **H**"．

这仅是名称引起的麻烦，而不是符号问题．任何人都同意在高斯 CGS 制中 **B**，**M** 和 **H** 的关系是方程(52)所表示的关系．在真空中 **B** 和 **H** 没有本质的区别，因为在没有物质的地方 **M** 必定是零．我们经常看到对于真空中的场的麦克斯韦方程用 **E** 和 **H** 而不用 **E** 和 **B**．

这些关于名称和单位的意见，对 MKS 电学单位制是没有关系的．在这种单位制中，相当于我们的 **B** 和 **H** 并用同样符号表示的量被当作量纲上不同的量来对待，甚至在真空中它们的数值也不一样(见附录)．

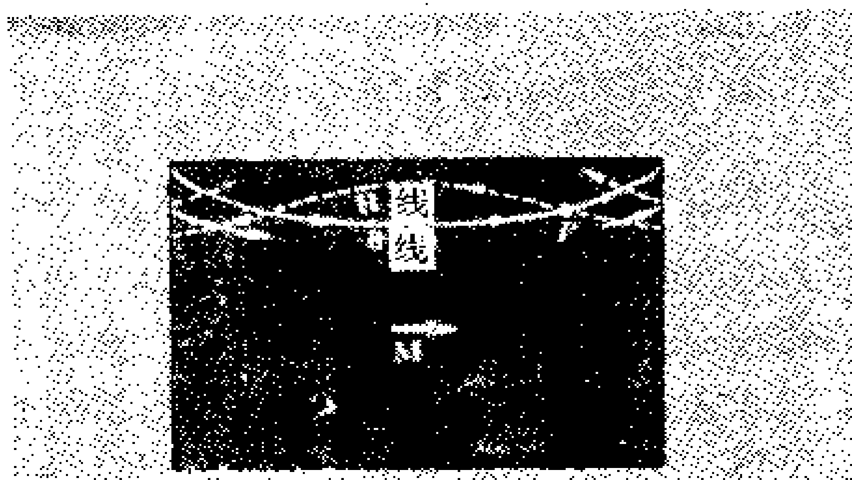
我们在这里也应当注意，方程(39)所给出的体磁化率 χ_m 的定义在逻辑上不是很好的，宁可定义为

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}. \tag{55}$$

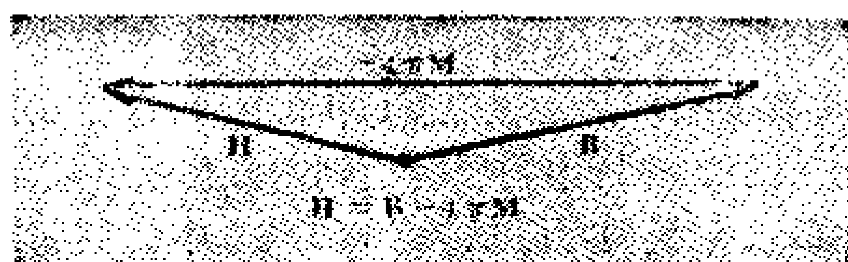
在图 10.21 (b) 中的永磁体是一个很有启发性例子，它表明了 **H** 对 **B** 和 **M** 的关系．为得到磁化物质内部某点的 **H**，我们必须在该点的磁场 **B** 上用矢量加法加上一个矢量 $-4\pi\mathbf{M}$．图 10.24 对一个特殊点 P 进行了描述．结果表明，磁体内部的 **H** 线看起来正好像图 10.21(a) 中极化圆柱体内部的 **E** 线．这是应当的，因为如果磁化的源确实是磁极，而不是电流的话，那么物质内部的宏观磁场应当是 **H** 而不是 **B**，磁极化和电极化就会有完全的相似性了．

在永磁体中没有任何自由电流，因此按照方程(54)，沿

任何闭合路径的 **H** 的线积分必定是零．我们可以看到如果 **H** 线看起来真正像图 10.21(a) 中的 **E** 线，这一线积分会是零的，因为我们知道沿任一闭合路径的静电场的线积分是零．



(a) 图 10.21 (b) 的磁化圆柱体内部一点的 **B**, **H** 和 **M** 的关系．



(b) 在 P 点的矢量关系．

图 10.24

10.11 铁 磁 性

铁磁长期以来为人类服务并使人迷惑．在古代就知道*磁石*（磁铁矿），做成指南针的铁对历史的影响也许仅次于制成刀剑的铁．将近一个世纪，我们的电气技术在很大程度上是依赖于这种特性，具有这种特性的金属恰巧很丰富．但是，对铁磁性的本质，直到最近几年才有所了解．

我们已经讨论了铁磁体的一些性质．在很强的磁场中作用于铁磁物质上的力的方向是将它拉向更强的场，就像对于顺磁性物质一样，但是这力不是和场 **B** 及其梯度的乘积成正

比，而只是和梯度自己成正比. 10.4 节末尾讲过，这一点提示我们，如果磁场是足够强的，铁磁体的磁矩达到某一极限值。磁矩矢量的方向必定仍为磁场所控制. 因为不然的话，力的作用方向就不会总是场强增加的方向了.

虽然没有任何外加场，我们也能在"永久"磁体中观察到磁矩，甚至当加上外场时，只要外场不是太强，磁矩仍保持它的大小和方向. 永磁体自身的场当然是总是存在的，但是你可能会问，它本身的场是否能保持住它自己场源的整齐排列。然而，如果再看一下图 10.21 (b) 或图 10.24，在承认它确实代表一个真实磁体之后，你就会注意到 **M** 一般地是既不平行于 **B** 也不平行于 **H**. 这就提示磁偶极子必定是被纯磁力之外的什么东西箝制在一定的方向上.

在铁磁物质中观察到的磁化强度比我们经常在顺磁物质中所观察到的大得多. 最普通的永磁体的磁场在几千高斯的量级. 更有特征的量是磁化强度(即单位体积内的磁矩)的极限值，即在很强的磁场中物质所达到的磁化强度值. 它叫作饱和磁化强度. 我们可以从表(10.1 节)中的数据推算出铁的饱和磁化强度. 在 1700 高斯/厘米梯度的场中，作用于 1 克铁上的力为 4×10^5 达因. 方程(18)把作用于偶极子上的力和磁场梯度联起来了，由它出发，我们可求出

$$m=\frac{F}{(dB/dz)}=\frac{4\times10^5\ \text{达因}}{1700\ \text{高斯/厘米}}$$

$$=235\ \text{尔格/高斯 (对于 1 克铁)}. \qquad (56)$$

为得到每立方厘米的磁矩，我们用铁的密度 7.8 克/厘米^3 乘 m，于是磁化强度为

$$M=235\times7.8=1830\ \text{尔格/高斯}\cdot\text{厘米}^3. \qquad (57)$$

我们应该用 $4\pi M$ 而不是 M 来和以高斯为单位的场强来比较. 例如，如果我们有一个很长的铁棒作成的永磁体，它具有这么

大的磁化强度，那么永磁体内部的场 H 将是很小的[想象把图 10.21 (b) 沿轴向拉长的情形]，所以铁中的磁场 $\mathbf{B}$ 应当近似地等于 $4\pi M$，或者约为 23,000 高斯.

看一下这个磁化强度相当于多少个电子自旋磁矩是很有意思的. 用图 10.14 给出的电子磁矩 0.93×10^{-20} 尔格/高斯来除 M，我们得到每立方厘米约 2×10^{23} 个自旋磁矩. 现在一立方厘米的铁含有约 10^{23} 个原子. 达到极限磁化强度似乎相当于每个原子约有两个排列起来的电子自旋. 因为原子中的大多数电子成对地抵消掉而无磁效应，故上述讨论表明我们所涉及到的是原子结构中那些少数电子自旋基本上完全排列起来的情况，这些电子自旋是能自由地指向同一方向的.

关于铁磁体的一个非常有启发性的事实是：一定的铁磁物质，以纯铁为例，如果加热到某一温度，会突然地失掉它的铁磁性质. 纯铁在 770℃ 以上就像顺磁物质一样. 冷到770℃以下，它立刻恢复其铁磁性质. 这个转化温度称为居里点，居里是这一现象的最早研究者之一，对不同物质居里点不同. 纯镍的居里点是 358℃.

这种"铁磁性质"究竟是什么，它使 770℃ 以下的铁和 770℃ 以上的铁如此明显地不同，而且在任何温度下都和铜不一样呢？这是由于原子的磁矩自发地排成一个方向，意思是指每个铁原子中某些电子的自旋轴排列成行. 所谓自发我们的意思是不需要涉及任何外加磁场. 在铁中一个大得足以包含成百万原子的区域内，几乎全部原子的自旋和磁矩都指向同一方向. 比居里点低得多时——例如铁在室温的情形——排列几乎是完全的. 如果你能有魔法看到金属晶格里面，而且能看到单个的磁矩像带有箭头的矢量的话，你就会看到像图 10.25 那样的情况

高温将破坏这种整齐的排列，这是不足为奇的. 可以这

样说，热能是有序排列的敌人．晶体(有序排列的原子)在十分确定的熔点温度会变成液体，这是一种非常无序的排列．熔点和居里点一样，因物质不同而不同．其相似性可以更深入地讨论，但是所涉及的概念最好留到本教程的后一部分热学和统计物理中去学习．让我们现在集中讨论有序状态本身．有两三个问题是很明显的：

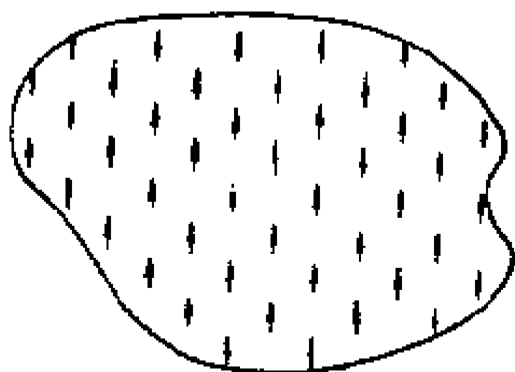


图 10.25 在铁晶体中的一个小区域内自旋方向有序地排列起来．每个箭头表示一个铁原子的磁矩．

问题 1 是什么使自旋排列整齐，并使它们保持住整齐的？

问题 2 如果没有外场，自旋如何选择某一方向而不选择另一方向呢？为什么图 10.25 中的所有磁矩不都指向下方，或右方，或左方呢？

问题 3 如果所有原子磁矩都是排列整齐的，为什么在室温下每片铁不都是强磁体呢？

回答这三个问题将帮助我们理解，至少是大体上理解，当加上既不太强也不太弱的外磁场时铁磁材料的性质．这也包括我们还未曾讨论过的许多现象．

答案 1 由于某些和铁原子结构的量子力学有关的原因，说明邻近的铁原子的自旋取平行的方向是有利的．这不是由于它们之间的磁相互作用．这是一个比磁相互作用更强的效应，它促使平行自旋不是像↑↑这样子就是像→→那样子排列(偶极子相互作用不是这种情况——见习题 9.26)．如果原子 A (见图 10.26) 想要使它的自旋和它的邻近原子 B、C、D 及 E 的自旋同方向，而它们中的每一个又宁愿它的自旋也和它的(包括 A 在内)邻近原子的自旋同方向，那么你会立

刻想像到，如果局部性的多数一经形成，就会有一很强的趋势“使它一致”，而且这种趋势就将很快传播开.

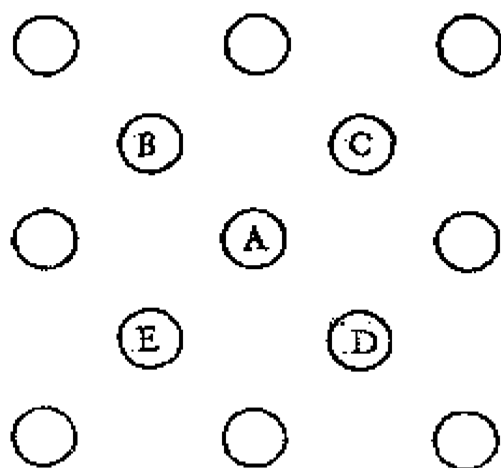


图 10.26　晶格中原子 A 和它的邻近原子（当然，晶体实际是三维的.）

答案 2　如果我们从无序态开始（例如在没有外加磁场的情况下，把铁冷到居里点以下），从晶体的各种各样的等价方向中选出哪一个方向那完全是偶然确定的. 纯铁是由体心立方体组成的. 每个原子有八个近邻. 环境的对称性对原子的每一个物理性质都起作用，包括自旋的耦合. 在铁中，立方轴正好是最易磁化的轴. 就是说，自旋喜欢指向同一方向，但它最喜欢的方向是六个方向（$\pm\hat{\mathbf{x}}$、$\pm\hat{\mathbf{y}}$、$\pm\hat{\mathbf{z}}$）中的一（图 10.27）. 这是很重要的，因为这意味着自旋不能容易地从一个易磁化方向整体地旋转到另一

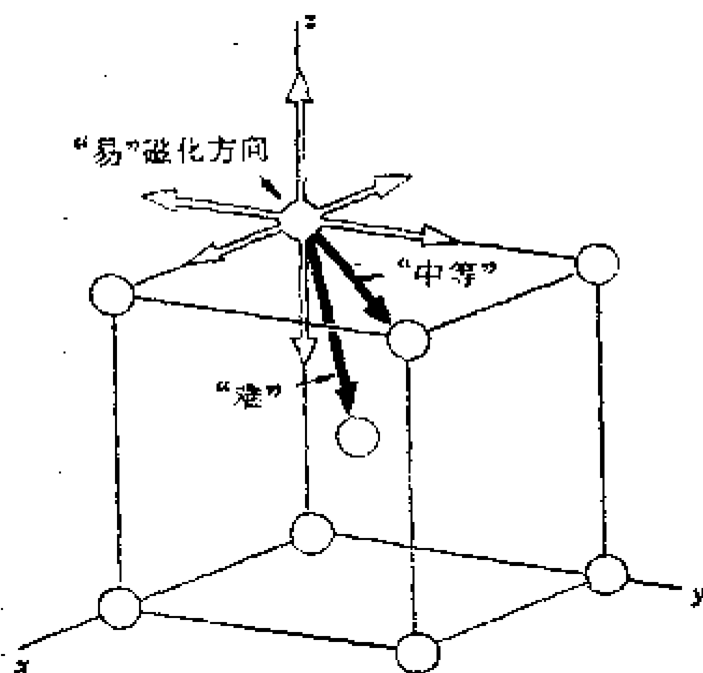


图 10.27　在铁中磁化的优选方向是沿晶体的一个立方轴.

个等价的垂直方向上去．要这样作，在这过程中它们一定得经过不那么有利方向．正是有这种障碍，才可能有永久磁体．

答案 3 一个明显地未磁化的铁片实际上是由许多磁畴组成，每一磁畴中的自旋都按同一方式排列的，但是其方向和相邻磁畴中的自旋不同．对整个“未磁化”的铁片平均地说，所有方向都是均等地出现，所以没有宏观的磁场．甚至在单晶中也有磁畴存在．按一般的字面解释，磁畴通常是微观的．但事实上在低倍显微镜下就可以看见它．当然，从原子尺度来看，这仍然是庞大的．一个典型的磁畴包括几十亿单个磁矩．图 10.28 画出了划分的磁畴．所以能够划分成磁畴是因为这样排列的能量要比所有自旋都排列成同一指向时来得低．按后者排列就是永磁体，它具有很强的扩展到它周围空间的场．其外部的场中贮存的能量比转动晶体中的某一小部分自旋所需的能量来得大，这一部分自旋就是在磁畴边界上的那些和它们的近邻方向不一致的那部分自旋．

如果我们在铁棒上绕一个线圈，给导线通以电流，就可以给材料施加一个磁场．在这个场中，指向平行于场的磁矩比反平行或指向其它方向的磁矩的能量低．这对某些磁畴有利，而对另一些磁畴不利；如果可能的话，那些正好具有有利方向的磁畴[1]将以牺牲其他磁畴为代价而扩展．磁畴的长大像是俱乐部，就是说，借扩大成员数目来发展的．这都发生在边界处．那些属于非有利磁畴，其位置紧挨着有利磁畴边界的自旋只有通过采纳有利的方向才可以简单地拨转到有利磁

---

1) 在这里的讨论中，我们所用的名词自旋和磁矩差不多是可以互换的．磁矩是自旋的实质，而且如果一个自旋排列起来、其它的也就排列起来了．为了过细，我们应提醒读者，在电子情形，磁矩和角动量矢量的指向是相反的(见图 10.14)．

畴中去．这仅仅移动了磁畴边界，磁畴边界不过就是两类自旋的分界面．在单晶中很容易发生边界移动．就是说，用一个很弱的外加磁场就可以通过边界的移动，使一个很大的磁畴长成了．并从而引起磁化强度较大的总变化．然而，由于材料中的晶粒结构，磁畴边界的移动是困难的．

如果所加外场恰巧不是沿着一个"易磁化"的方向(例如在立方晶体情况)，不利磁畴的消耗仍然不能使磁矩指向完全平行于外场的方向．我们可以用相当强的场把它们拉到平行于外场的方向上，因而最后建立最大可能的磁化强度．

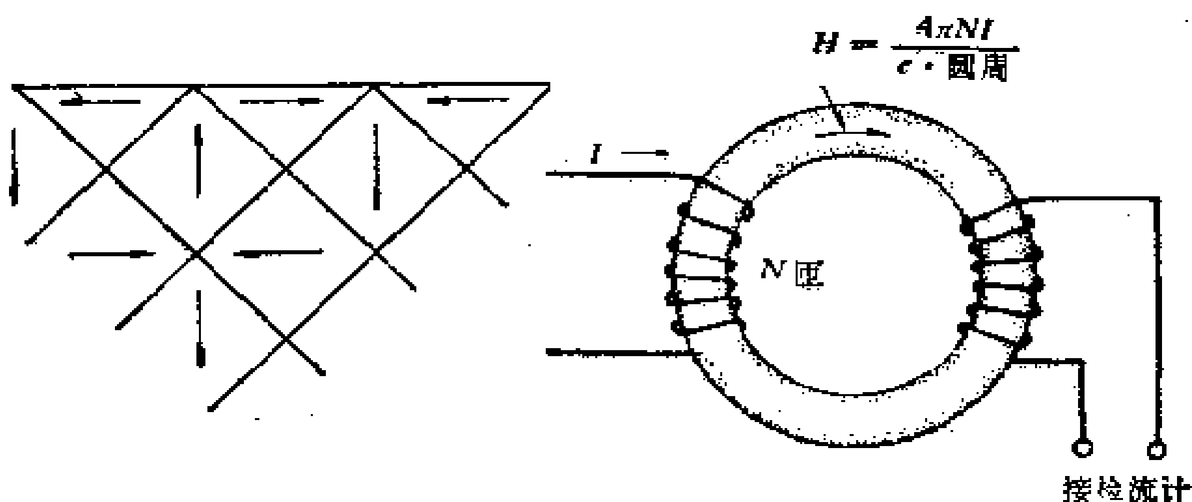


图 10.28　在均匀的铁单晶体中，磁畴的可能排列形式．

图 10.29　为研究铁磁物中 **B** 和 **M** 或 **B** 和 **H** 关系的装置．

让我们看一下在不同的外加磁场的作用下，在铁的磁性行为中，所出现的宏观结果．一个便利的实验装置是在铁环上绕两组线圈(图 10.29)．这在铁环内提供一个几乎均匀的磁场，而没有使问题复杂化的端效应．测量两个线圈中的一个的感应电压，我们就可以确定通量Φ的变化，因而也就确定了铁中 **B** 的变化．如果我们留意 **B** 的变化，从 $\mathbf{B}=0$ 开始，我们就总能知道 **B** 是多大．通过另一线圈的电流来确定 **H**，我们把它看作非独立变量．如果我们知道 **B** 和 **H**，我们就可以算出 **M**．把 **B** 作为 **H** 的函数画出的曲线要比 **M** 作为 **H**

的函数画出的曲线更常见一些。铁的典型 B-H 曲线画在图 10.30 中。注意横坐标和纵坐标的标度有很大的差别。如果线圈里没有铁，一奥斯特应当完全等于一高斯。如果线圈中有铁，当场 H 仅是几奥斯特时 B 就已经升到几千高斯了。当然在这里 B 和 H 指的是整个铁环中的平均值；在本实验中精细的磁畴结构不能显现出来。

从"未磁化"的铁开始，$B=0$ 和 $H=0$，增加 H 引起 B 以显著地非线性方式上升，先是慢，然后很快，以后又很慢，最后变平。最后真正变成常数的不是 B 而是 M。然而，在这个图里，由于 $M=(B-H)/4\pi$，并且 $H \ll B$，B 和 M 之间的差别不很明显。

B-H 曲线的下部是由磁畴边界的运动决定的，也就是说是由以消耗"错误指向"的磁畴为代价来增长"正确指向"的磁畴来决定。在曲线变平的那部分原子磁矩被"暴力"拉成和磁场的方向相一致。在这里铁是普通的多晶金属，所以只有一小部分微晶能够幸运地有一"易磁化"方向和场的方向相一致。

如果我们现在慢慢地减小线圈中电流，这样就使 H 降下来，曲线并不按原路折回，而是按图 10.31 中虚线折回。这种不可逆性称为磁滞。这主要是由于磁畴边界的运动是局部不可逆的。从我们所讲过的内容来看，其原因不是很明显的，但是研究铁磁性的物理学工作者都了解得很清楚。不可逆性是讨厌的东西，在许多铁磁材料的技术应用中它就是能量损失的原因——例如在交流变压器中。但是对永久磁化来说，它又是必需的。而且为了这种应用，人们需要加强不可逆性。图 10.31 画出一个好的永磁合金的 B-H 曲线的相应部分。注意在 B 回到零之前 H 就必须在反方向上达 600 奥斯特。如果干脆把线圈中电流断掉并把线圈移走，则 B 保持在 13,000 高

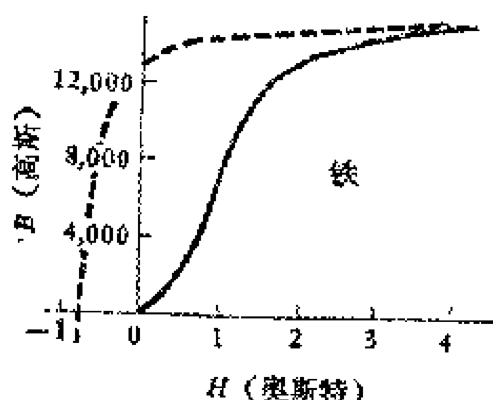


图 10.30 相当纯的铁的磁化曲线。虚线是 H 从高的正值降下时 B 的曲线。

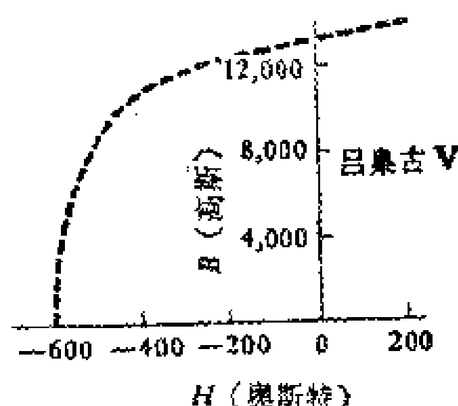


图 10.31 吕臬古 V 是铝镍钴的合金，它是作永久磁体用的，把它的这部分磁化曲线和图 10.30 中的"软"磁性材料的相对应的部分的特性相比较。

斯，称为*剩磁*。因为 H 为零，除了因子 4π 外，它和磁化强度 M 一样。这个合金已经取得永久磁化，即如果它只暴露在弱磁场中，这磁化强度将无限地持续下去。贮存在磁带里的所有信息，从音乐到计算机程序，其持久性就是由于这一物理现象。磁性计算机元件，磁芯存储器以及其他，都涉及同一物理性质。

习　　题

10.1 估计（在二到三倍以内）10.1 节中所描述的螺线管磁场中所贮存的能量。将你的估计值用焦耳表示出来。已知发电机能供给的稳定功率为 400 千瓦，如果发电机全电压突然接通，问建立这个场大概需要多长时间？

[第七章概念的应用]

10.2 假设已知物质的顺磁体磁化率正比于每立方厘米中的分子数，而反比于绝对温度，从 10.1 节表中所给的数据，计算在标准温度和压力下空气的体磁化率。空气中近似地有五分之一是氧，其分子量为 32，而且你们可以假设氧分子在气体中的磁特性和在液氧中的磁特性相同。

[空气的磁化率]

10.3 在第六章中我们计算了半径为 b 的电流环的轴线上一点的场[见方程(6.41)]. 证明 $z \gg b$ 时，这场近似的是磁偶极子的场，并求出在轴上多远的地方，这场值和具有同样偶极矩的无限小的偶极子在该点的场值相差在百分之一以内.

[将电流环的场和无限小的偶极子的场相比较]

10.4 把像在 10.1 节中所描述的螺线管置于物理实验室的地下室中. 一个物理学工作者在建筑物的顶层，比地下室高60英尺，水平距离 80 英尺，他抱怨说这个场干扰他的测量. 假设螺线管就在所描述的情形下工作，而且把它作为简单的磁偶极子对待. 试计算在发怨言的物理学工作者处的场强. 如果你见到这个工作场地，试评论一下他的抱怨是否有理.

[偶极子场的公式的应用]

10.5 在地球的北极，地球磁场和地面是垂直的，而且具有 0.62 高斯的强度. 在地球表面和更远的地方，地球的磁场近似地是一个偶极子的场. 问其偶极矩是多大，要有多少安培的电流流经赤道，才能产生与此强度相等的偶极矩？(地球磁场的实际场源大概不是接近表面的电流，而是在地心的电流分布).

[地球像一个磁偶极子]

10.6 半径为 R 的球带有电荷 Q，均匀地分布在球的表面上，其密度为 $\sigma = Q/4\pi R^2$. 这个电荷壳绕着球的轴旋转，其角速度是 ω(弧度/秒). 求它的磁矩. (把球面分成旋转电荷的窄带子；求出每个带子的等效电流，并求出其偶极矩，然后求对所有窄带子的积分.) 答案: $QR^2\omega/3c$.

[旋转的带电球的磁矩]

10.7 10.1 节表中的数字不是实际地采用所描述的螺线管作实验得到的，而是查出由实验测出的物质的磁化率并计

算在所述条件下所受的力．我们已经知道磁化率是如何定义的了，而且知道了力取决于那些因素，试把过程反回来，求表中的一对数值——即计算出磁化率，然后再在化学和物理手册这类书的表中查它．当你在这类手册中查磁化率表时，注意在有机物的长表中是一致的，并研究在无机物的表中有显著的顺磁情况或例外的抗磁情况．

[磁化率的研究]

10.8 证明把一克顺磁材料从场强为 B 的区域拉向场强小得可以忽略的区域所作的功是 $\frac{1}{2}\chi B^2$，χ 是比磁化率．然后严格计算把每克液氧从 10.1 节的表中所指的位置移开所需要的功．（当然，χ 在所涉及的场强范围内是常数时这才适用．）

10.9 从 10.1 节的表中的数据来导出（在规定的条件下）一克铁的磁矩值．这相当于大约每个原子有多少整齐排列的电子自旋？（铁的密度：7.8 克/厘米^3；原子量：56）

[在非常强的场中铁的磁矩]

10.10 计算图 10.22 中所描述的磁化圆盘的总磁矩 $\mathbf{m}$．如果 r 足够大，在轴上 r 厘米处的场近似为 $2m/r^3$，所以圆盘可以作为偶极子来对待．现在考虑两个这样的圆盘 A 和 B．A 平放在木头桌面上，其磁矩 $\mathbf{m}$ 指向上方，B 放在 A 的上面，它的磁矩指向下方，而且不让它往两边移动．试粗略地估计 B "飘浮"在 A 上的高度．用刚才讨论过的"单偶极子近似"．如果所估计的飘浮高不太小，则是正确的．

[两个磁化圆盘之间的力]

10.11 一个半径为 a 的长圆柱形棒沿轴的方向均匀磁化，强度为 M．从棒的中间部分切出一厚度为 $b \ll a$ 的切片而不扰乱其余部分的磁化．考察在间隙中心点和离间隙足够远的棒内一点的磁场．用叠加理论来计算这两处的场强差．

10.12 内径为 10 厘米外径为 12 厘米的铁环，上面绕有 20 匝导线．用图 10.30 中的 B–H 曲线估计在铁中产生 12,000 高斯场强所需的电流．

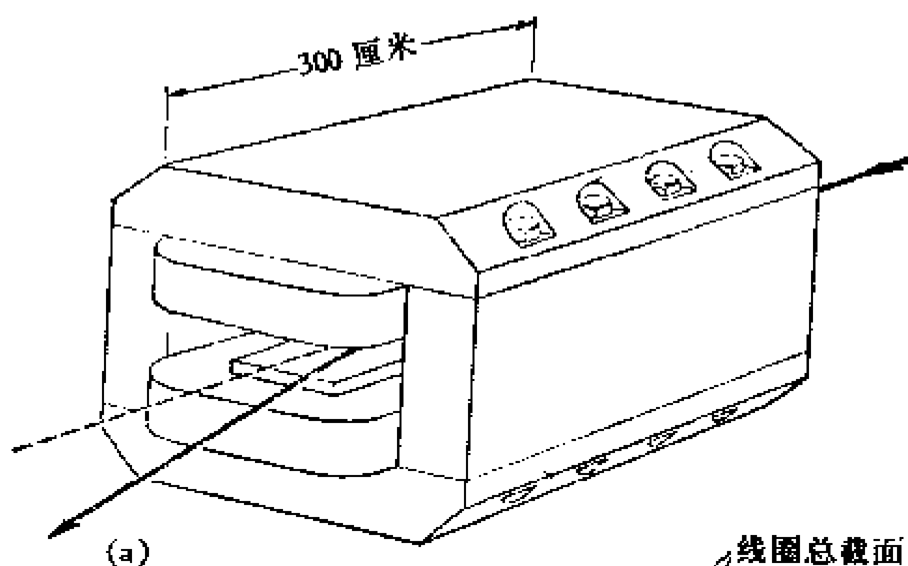
10.13 在某些实验中，为使高能粒子束偏转，需要在粒子束方向 3 米长，60 厘米宽和 20 厘米高的矩形区域保持强度为 16,000 高斯的场．可以按照图(a)和(b)中所标尺寸来设计一个适用的磁铁．按所给尺寸确定 (i) 为了在间隙处产生 16,000 高斯的场，两个线圈中所需要的安匝数；(ii) 必须供给的功率为多少千瓦；(iii)为了达到所需磁场，与 400 V 直流电源串联的每个线圈应是多少匝数，以及相应的导线截面．为了(i)中的需要，将阿姆科(Armco)磁铁的 B–H曲线的一部分画在图 (d) 中．你需要确定的就是绕一条像 $abcde$ 这样路径的 H的线积分．在间隙处 $H = B$．你们可以假设在铁中和间隙中的B的强度一样．场线看起来就像在图(c)中所画的那样．你可以粗略地估计一下在铁中路径的长度．这不是很关键性的问题，因为你将发现比起空气中的路径 ab 的贡献来说，长路径 $bcdea$ 对于线积分的贡献只是一个相当小的量．(事实上，在低场强时，忽略铁中的H并不是很坏的近似)．对于(ii)，假设铜的电阻率 $\rho = 2.0 \times 10^{-6}$ 欧姆·厘米，并令每个线圈含有N匝．你将发现对于一给定的安匝数所需的功率是和N无关的；这就是说，假设按照规定铜的总截面是一定的话，对于许多圈细线或少许几圈粗线所需功率是一样的．所以设计者选择N和导线的横截面使磁铁和计划中的功率源相适应．

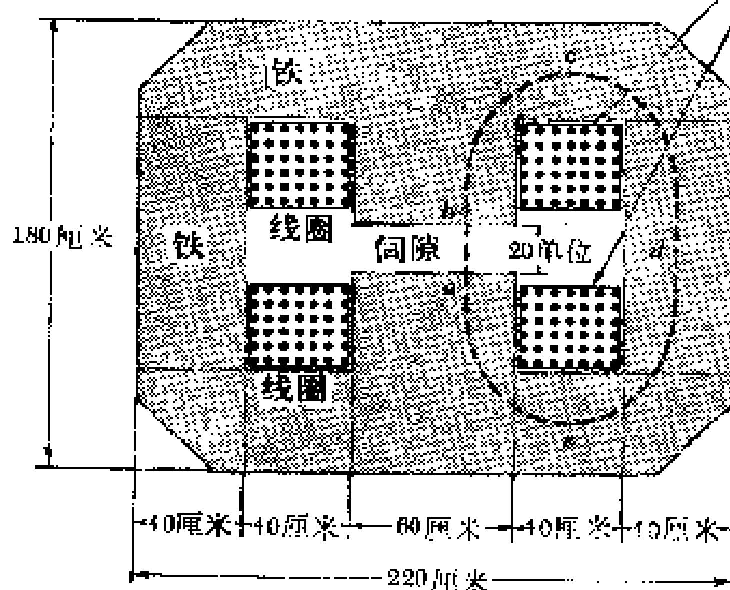
答案 (i) 270,000 安匝；

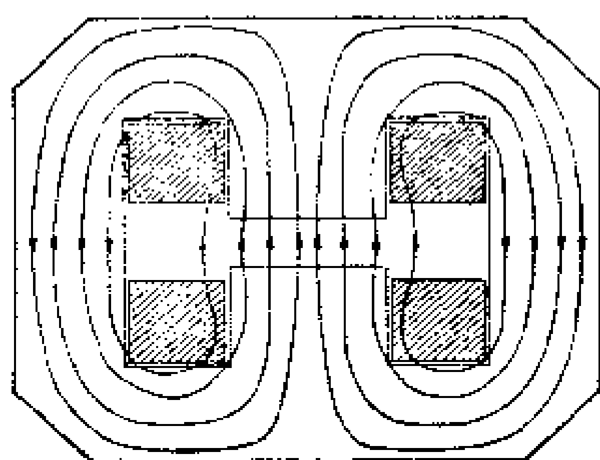
(ii) 82.5 千瓦；

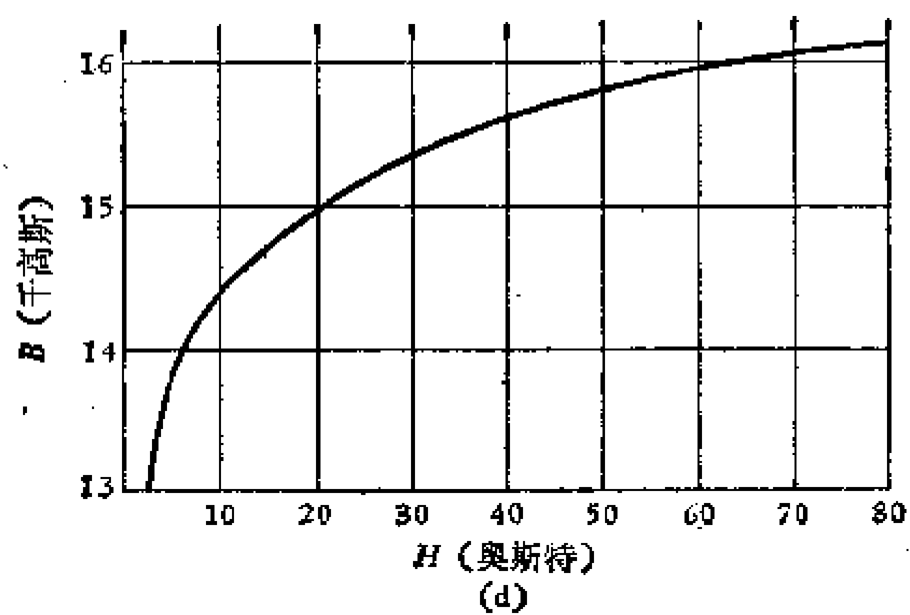
(iii) $2N = 1310$ 匝(每个线圈 655 匝)，导线横截面积 $= 1.15$ 厘米^2 (0.18 英寸^2)．

[设计一个电磁铁：用作高能粒子实验的“偏转磁铁”]


300 厘米
(a)


线圈总截面＝2500 厘米²，其中 1500 厘米²是铜导线(其余为绝缘物和冷却水)
[图中 20 单位为 20 厘米]
铁
铁
线圈
线圈
间隙
20单位
180厘米
40厘米
40厘米
60厘米
40厘米
40厘米
220厘米
(b)


(c)



习题 10.13 图

补充习题和问题

第　一　章



1.23　考虑结构如下的电荷组态：单位正电荷放在圆心，N个单位负电荷放在圆周上，间隔相同. 若在同一瞬间将它们松开，它们是飞开还是飞拢？对$N=3,4,5$的情形，试计算系统的能量以回答此问题，并至少就一种情况证明，这样得到的答案与计算作用于一个负电荷的合力而得到的答案相同.

[电荷系的能量]

1.24　半径为R的水滴其表面分布有电荷Q. 假若将其分为大小相同并完全分离的两滴，电荷也平均分配，其电势能是增加还是减少？增减多少？然后，我们来考查与液体表面相关的能量，它是把液滴拉成球形的"表面张力"的原因. 由于分子间的化学键，产生新表面需要能量. 在给定温度下，产生每一单位表面所需要的能量为一常量. 对于水，大约是50尔格/厘米^2. 假若将半径为10^{-3}厘米的一滴水分为两滴，则在分开之前，水滴必须携有多大的电荷才能使电能的变化补偿分子键的能量消耗？试判断此电量是大还是小？由求出它在液滴表面形成的电场强度来判断（就空气所能承受的而言，100静电伏特/厘米的电场是相当高的了）.

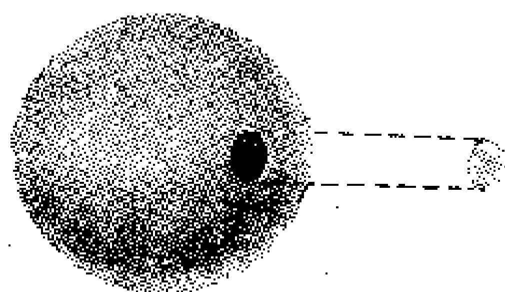
[带电液滴]

1.25　试考虑并讨论"点电荷的困难". 它可用下述方式提出：理想的点电荷具有无限大的势能或称"自能". 然而在我们将点电荷系统的能量加在一起时总是把它略去的. 略去永远保持不变的能量，不会有什么害处. 但是，说一个无限大的

量为常量，其意义是什么呢？自然界中最接近点电荷的是基本粒子，它似乎并未呈现出使人感到困惑的无限大来．但由于它有一定的大小，可以预计，其它源所产生的电场对它的结构将产生某种影响．然而，这就意味着，电荷聚集体的电自能在周围环境不同时，不会完全相同．你认为在什么情况下才真正必须考虑到它？

[供讨论的问题]

1.26 图中示出一个半径为 a，面电荷密度为 σ 的带电球壳，由其上移去了一个半径为 $b \ll a$ 的小圆片．试问在这样形成的孔的中心点，电场的大小和方向如何？有两种方法能得出解答：对剩下的电荷分布积分，从而将一切电荷元对所求点电场的贡献加在一起；或者，利用叠加原理，可想想把已移开的那一块重新放回产生的效应，那一小块本身几乎是个小圆盘．请注意这个结果与我们对面电荷受力的讨论之间的联系——或许这是可以获得解答的第三种方法．



习题　1.26

[叠加原理的应用]

1.27 对称性的叠加原理和某种类似的应用使得可以证实下述这个使人觉得奇怪的事实：一个半球形的碗，其表面带有密度均匀的电荷．可以断言：在象鼓皮那样张在这碗上的想象中的表面上每一点，电场均与该表面垂直．

1.28 想象出一些问题，能用对称性和叠加原理求解而不直接求解它们，你可以学到更多的东西．读者试编一题．

[出个题]

1.29 两块带电平面平行板，电荷密度各为 σ_A 和 σ_B，相

互分开的距离为 S. 当我们向着它看去时板 A 位于板 B 的左边. 令 $\mathbf{E}_1$ 是板 A 左方的电场，$\mathbf{E}_2$ 是二板之间的电场，$\mathbf{E}_3$ 是板 B 右方的电场. 电场不仅由平板自身的电荷产生，也包括可能存在的其它源的效应. 设另外的源离得足够远，以致在我们所考查的区域它们只提供处处均匀的电场. 再假设这两块板按某种方式从机械上讲是相连的，因而我们可以测量对这个联合体的总作用力. 试证明对此联合体每单位表面，即二板的每 1 厘米^2 平面层的力由

$$\mathbf{F} = (\sigma_A + \sigma_B)\left(\frac{\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_3}{2}\right)$$

给出. 这是电荷在“平板层”中非均匀分布的一种特殊情形.

[对带电复合板的作用力]

1.30 1.29 题所表达的和第 2.7 节所讲述的结果可以普遍地予以证明. 令平板的电荷分布由 $x = 0$ 和 $x = b$ 之间的体电荷密度函数 $\rho(x)$ 给出，b 是板的厚度. 于是将平板视为面电荷层时，总的面电荷密度由

$$\sigma = \int_0^b \rho(x)dx$$

给出. 若 E_x 为电场垂直于板的分量，则板所受总力(即指其 x 分量，对其它分量我们不感兴趣)由

$$F_x = \int_0^b \rho E_x dx$$

给出. 将 ρ 和 E_x 联系起来，并将高斯定律用于 dx 厚的小片，证明

$$F_x = \frac{1}{8\pi}(E_1^2 - E_2^2).$$

并由此证明

$$F_x = \frac{1}{2}(E_{1x} + E_{2x})\sigma$$

$\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ 分别为 $x = 0$ 及 $x = b$ 处的电场.

[对电荷层的作用力的普遍推导]

1.31 一个雪茄烟形状的静电分布位于坐标系原点处. "雪茄" 的长边沿 z 轴. "雪茄"的总电荷为 q. 在 z 轴上电荷分布之外某一点 P 之场为 E. 倘若 q 集中于原点时 P 点之场为 E'. 试问 E 较 E' 大还是小,还是相等?

1.32 读者知道,离球对称电荷分布原点 r 远处的电场,与半径为 r 的球内的全部电荷均集中于原点时的电场相同.

(a) 这个事实仅仅与球对称性有关还是尚与库仑定律的平方反比的性质有关? 对于立方反比的场,它还成立吗?

(b) 总电荷为 Q 的一给定球对称电荷分布,其全部电荷均限制在距原点小于 r_0 以内的区域. 假设两个电荷间作用力的规律是立方反比的而不是通常的平方反比的. 试将 r 处 ($r > r_0$) 之场 E 与所有电荷均集中于原点时 r 处的场 E' 相比较. E 较 E' 大还是小,还是相等? 试作粗略的定性论证而不必作数学推导.

1.33 设想一种有三类而不是两类电荷的世界. 在那里各类同性电荷相斥,异性相吸具有完全对称的关系.称此时的电荷为 A、B、C 三型.平方反比律与叠加原理与我们的世界一样仍然成立. 设同性相斥之力恰好是异性相吸之力的两倍. 这就是说,两个 A 型单位电荷相距 1 厘米时相互之斥力为 1 达因,而单位 A 型电荷与单位 B 型电荷相互之引力为1/2 达因. 试证明,一般讲,这就能说明存在一些中性物体,尽管这些物体包含多个电荷元,然而当它靠近任何类型的电荷时,所受之力总计为零,也不产生作用力.如何检知该世界与我们世界的区别? 在那个世界能用电场的概念吗?

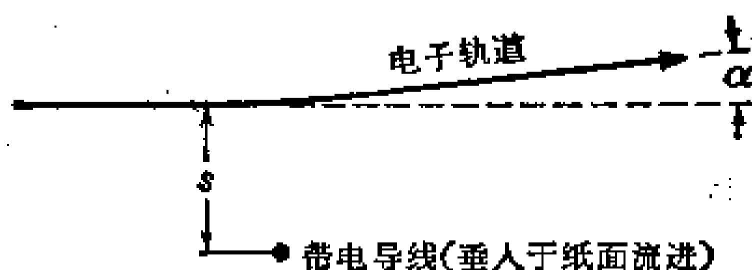
[另一个不同的世界]

1.34 在电子显微镜中,一束原先通过 U_0 静电伏特电势

 都是国际单位制

差加速的具有一定能量的电子，经过一根与电子束原来的方向垂直的绷紧的带电细金属线.该线带负电，其大小为每厘米长 λ 静电单位，此金属线的电场相对讲是弱的，故电子的轨道只稍受影响. 得知此点后，作为一级近似，假定电子仍以不变的速率循原来的直路径，可以对一给定的电子找出所受之力作为时间函数. 然后，用上述结果计算电子越过金属线时所获动量的横向分量，以及电子轨迹因此实际经受的偏角 α. 你会颇为惊异地发现，其结果是偏角与电子轨道距线的远近无关. 即金属线对电子轨道的影响就象光线通过一个弱棱镜一样. 实际上人们已经用这样的装置作过电子光学的演示实验，它是与经典光学中有名的干涉现象——菲涅尔双棱镜实验——相当的. (Möllenstedt and Düker, *Zetitschrift für Physik* **145** 377 (1956))

[涉及线电荷电场的实验]



习题 1.34

第 二 章

2.18 一个中空圆柱两端不封闭，其半径为 a，长为 b. 总电荷 Q 均匀地分布于其表面. 其轴线中点与端点间的电势差是多少？试粗略地画一些电力线以表明你认为这个圆柱的电场该是什么样的.

2.19 今有二金属球，半径各为 R_1 和 R_2，相互远远分离

(与其半径相较).在它们的电荷总量 Q 不变时,电荷须如何分配给二球才能使最终形成的电荷分布的势能最小?为了解答这个问题,首先计算在一个球上电荷为 q,另一个上为 $Q-q$ 的一种任意的电荷分配下,系统的势能.然后,将势能作为 q 的函数求极小值.可以假设放到任一球的任何电荷本身会在球上均匀地分布.因为另一个球离得足够远,以至它的影响可以忽略.确定了电荷的最佳分配后,试证明在这样分配的情况,二球的势差为零(因此可以用金属线把它们联起来而不会有电荷的重新分配.这是第三章中我们将遇到的一个十分普遍的原理的特例:在导体上,电荷自身会依照使系统的势能为极小的方式分布).

[问题:比习题 2.10 的系统更普遍的系统.

结果:例示电荷分布一个重要的普遍原理]

2.20 习题 2.1 中所规定的场,即 $E_x = 6xy$,$E_y = 3x^2 - 3y^2$;$E_z = 0$,也有与图 2.2 中的场有密切的关系.为了得出它的形式,在柱坐标 r,θ 下写出由习题 2.1 所得到的势 φ.此之 $r^2 = x^2 + y^2$,$\theta = \tan^{-1}y/x$. 粗略地画一些等位面和电力线.

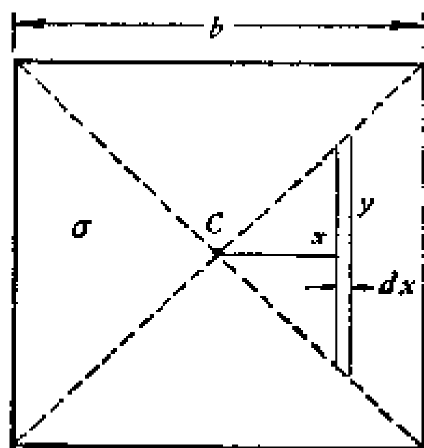
[从另一方面看习题 2.1 中的场]

2.21 考虑一球形域,其界面内非球心处有点电荷 q.球心处的势等于球面上势的平均值这点还成立吗?这与第 2.13 节中对调和函数的断言是否矛盾?

2.22 我们发现,在有均匀面电荷密度 σ 的半径为 a 的桌子的中心,电势为 $2\pi\sigma a$.已知这点后,我们想在精度为百分之几的范围估计一下边长为 b 的均匀带电正方形中心的电势.不求解正方形电势的问题,你将如何估计它?能给出你的估计的误差的可能范围吗?

[练习:以一问题的解为基础求另一问题的近似解]

2.23 精确计算2.22题讨论的均匀带电正方形平面层中心的电势之值并不困难. 进行这一积分的一个好办法由附图给出. 首先求出由 $y=-x$ 至 $y=x$ 的宽度为 dx 的窄条对 C 处电势的贡献. 然后, 易由 0 至 $b/2$ 对 x 积分, 得出正方形的四分之一对电势的贡献. 自然, 零电势在无限远处.



习题 2.23

(答: $\varphi_C = 4\sigma b \ln(1+\sqrt{2})$)

[带电正方形的准确解]

2.24 我们如何才能确信式(2.76)中定义为 $\lim\limits_{a_i\to 0}\dfrac{\Gamma_i}{a_i}$ 的数真正代表一个矢量的分量呢? 这个问题可以具体地提出如下: 对于某个给定的 $\mathbf{F}$ 和空间的某个点, 依次取 $\hat{\mathbf{n}}$ 的方向为 $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$ 可以确定三个数, 假定它们为一个矢量的分量. 由于现在还有怀疑, 我们用引号将它括起来, 以"A_x", "A_y", "A_z"来表示它们. 如果我们现在选择某个另外的方向 $\hat{\mathbf{n}}$, 并确定出沿它取向的小片的环量与其面积之比. 所得之值是否总是等于 $\hat{\mathbf{n}}\cdot(\hat{\mathbf{x}}$ "A_x" $+\hat{\mathbf{y}}$ "A_y" $+\hat{\mathbf{z}}$ "A_z") 呢? 若是, 我们就可以去掉引号, 并且说, 依上述程序的确产生了一个矢量. 试看能否由考查绕一个小四面体(例如图2.18所示的那种)四面中每一面的环量而得到证明. 这四个环量之和是什么? 这四个面积矢量之和又如何?

[证明 curl $\mathbf{A}$ 确系矢量]

2.25 如我们所知, 矢函数 $\mathbf{F}$ 的散度是个标量. 倘若我们试着这么来定义一个与旋度不同的矢量:

$$G = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial F_x}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial F_y}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

我们能证实它是，或不是矢量吗？（试查看相对于诸分量所在轴旋转坐标系时它的变化．考虑绕 z 轴旋转 90° 就足够了．这时新坐标与老坐标的关系是： $\hat{\mathbf{x}}' = \hat{\mathbf{y}}$，$\hat{\mathbf{y}}' = -\hat{\mathbf{x}}$，$F'_x = F_y$ 等等）

[“中看的未必中用”]

2.26 一条灌溉渠二边平直相距 $2b$．渠中水面上，在渠正中的水速最大，向两边渐减至零．假设流动恰好是由河面的水

$$v = v_0\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

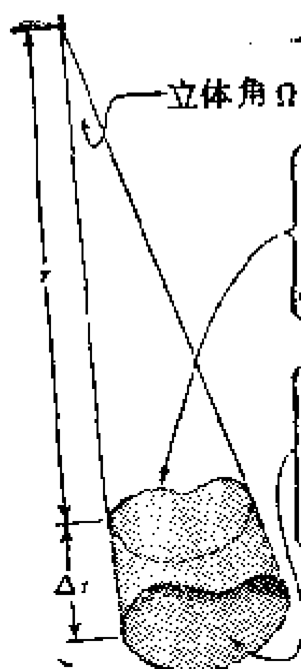
速近似地给出．其中 y 为与河心的距离，$\mathbf{v}$ 在各处均顺水流方向（实际水渠中的流动可能与此很不相同），一块木片浮在河边到中心的区间内，当它顺流漂下时，可以看到它在旋转，试解释之．它与（2.16 a）题有何关系？当木片旋转 360° 时，它顺流漂了多远？

[涉及速度场旋度的问题]

2.27 本问题将介绍拉普拉斯算符的一个特殊形式，即当函数为球对称时，它在球座标中的形式．令 V 只是 r 的函数：$V = V(r)$，则 div (grad$V$)，即 $\nabla\cdot(\nabla V)$，也就是我们说的 $\nabla^2 V$ 是怎样的呢？ 2.3 节中已经讲过，这种情形下 ∇V 就是 $\hat{\mathbf{r}}dV/dr$，所以，我们所须考虑的正是这个矢函数的散度．导出 $\nabla\cdot(\nabla V)$ 的主要步骤已概括于图中．

(a) 研究这一推导，直至你能理解各个步骤，并且，倘需向其它人解释时，你能补充上那些可能需要的论述．注意在 ∇r 中，二阶项已经略去．

(b) 证明此结果可写为



$$\begin{cases} 面积 = (-\hat{r})\Omega r^2 \\ \nabla V = \hat{r}\left(\frac{dV}{dr}\right)_r \\ 流出通量 = -\Omega r^2\left(\frac{dV}{dr}\right)_r \end{cases}$$

$$\begin{cases} 面积 = \hat{r}\Omega(r+\Delta r)^2 \approx \hat{r}\Omega(r^2+2r\Delta r) \\ \nabla V = \hat{r}\left(\frac{dV}{dr}\right)_{r+\Delta r} \approx \hat{r}\left[\left(\frac{dV}{dr}\right)_r+\left(\frac{d^2V}{dr^2}\right)\Delta r\right] \\ 流出通量 = \Omega(r^2+2r\Delta r)\left[\left(\frac{dV}{dr}\right)_r+\left(\frac{d^2V}{dr^2}\right)\Delta r\right] \end{cases}$$

$$净流出通量 = \Omega\left(2r\Delta r\frac{dV}{dr}+r^2\frac{d^2V}{dr^2}\right)$$

$$体积 = \Omega r^2\Delta r$$

$$\lim_{\Delta r\to 0}\frac{通量}{体积} = \frac{2}{r}\frac{dV}{dr}+\frac{d^2V}{dr^2} = \nabla\cdot(\nabla V(r)) = \nabla^2 V(r)$$

习题 2.27

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(rV(r))$$

(c) 对于某个 V，如果只知道其 $\nabla^2 V(r) = 0$，关于 V 我们能得出些什么结论？

(d) 证明“汤川势” $V(r) = (1/r)e^{-\lambda r}$ 满足方程

$$\nabla^2 V - \lambda^2 V = 0,$$

其中 λ 为常量.

[特殊情形：球坐标下的 ∇^2]

2.28 粒子被恒沿径向之力向一固定点吸引．该力的大小只是其径向距离 r 的函数，即 $\mathbf{F} = \hat{\mathbf{r}}f(r)$．你自己证明，在这样的场中，绕任何闭合路径的线积分为零．这意味着 $\nabla\times\mathbf{F}=0$．于是，必定可以把 $\mathbf{F}$ 表示为某个势函数 $V(r)$ 的梯度（这提醒我们，静电场可以由势导出并非由于元电荷电场的平方

反比的性质，而只是因为元电荷的场是中心场且存在叠加原理）．习题 2.27 中所提到的汤川势与一种特殊的非平方反比的场相联系，它在原子核和基本粒子物理学中颇为重要．由写作 $V = Ce^{-\lambda r}/r$ 形式的汤川势得到的力场是怎样的？这里的 C 和 λ 是常量． 取 $\lambda \to 0$ 就回到了我们熟悉的静电场的势 $1/r$．试证明对于给定的 C，在任何距离，$\lambda > 0$ 时其力均较 $\lambda = 0$ 时小． 量 $1/\lambda$ 有长度的量纲，并经常称为力的“作用域”．对于产生这类场的源，该用什么方程代替泊松方程呢？

[汤川势及其力场]

2.29 证明静电场不能使带电粒子保持稳定平衡的论述主要基于库仑力平方反比的性质．假设二带电粒子间的力随 $r^{-1.5}$ 而变，试设想出一种电荷组态能使正电荷处于稳定平衡．对于 $\sim r^{-2.5}$ 的力也作同样的讨论．

2.30 考虑两个相距为 b 厘米的质子的电场． 根据式(2.36)（我们讲了，但未证明），此系统的势能应为

$$v = \frac{1}{8\pi}\int \mathbf{E}^2 dv = \frac{1}{8\pi}\int (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^2 dv$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int E_1^2 dv + \frac{1}{8\pi}\int E_2^2 dv + \frac{1}{4\pi}\int \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 dv.$$

其中 $\mathbf{E}_1$ 是只有一个粒子的场，$\mathbf{E}_2$ 是只有另一个粒子的场．右边三个积分中的第一个可以称为质子的“电自能”，是基本粒子的一种内在性质，只依赖于质子的结构和尺度．在计算带电体系的势能时，我们总是不计这种能量，而假定它保持不变；第二个积分与此相同．第三个积分涉及二电荷的距离．在某个适当的坐标系内写出第三个积分，不实际计算而证明它必可表为 Ce^2/b 的形式，此处 C 是纯数字常数，是个只涉及无量纲量的定积分之值．如果式(2.36)正确，C 须为何值？在

我们仔细研究过的球面电荷分布的特殊情形下，我们知道式(2.36)是正确的．看看你能否反过来通过采用叠加原理的讨论由此证明式(2.36)的正确性．如果这样做，你就会附带确定出那个定积分的值(如果喜欢算困难的定积分，你可以试着去计算这一个，或若将其化为可由定积分表查出的某种形式．它不很容易)．

[储存于二等量的集中电荷体电场中的能量]．

第　三　章

3.18　(a)试证电势差的平方$(\varphi_2-\varphi_1)^2$和力的量纲相同．这告诉我们两物体间静电的力在数量级上主要由有关的电势差决定．量纲只以比的形式出现，有可能包含4π之类的常数．如果某两物体间的电势差为1静伏，你估计力的数量级多大？(b)实际上可达到的电势差，由于与物质结构有关的种种理由，是受到严重限制的．人工所能达到的最高电势差约为10^7伏，是用范德格喇夫起电机在高压下得到的．(十亿伏的加速器并不涉及这样大的电势差．)试估计兆兆伏大约相当于多少磅力？这些原因可以指出静电电动机为什么得不到广泛应用．

[静电力的基本知识]

3.19　设想xy面，xz面和yz面都是金属的，在其各个相交线上都焊接在一起．一个单独的点电荷Q置于离各面的距离都为d的地方．画出必须满足这些边界条件的那些“象电荷”的位置．作用在这电荷Q上的力多大？在什么方向上？

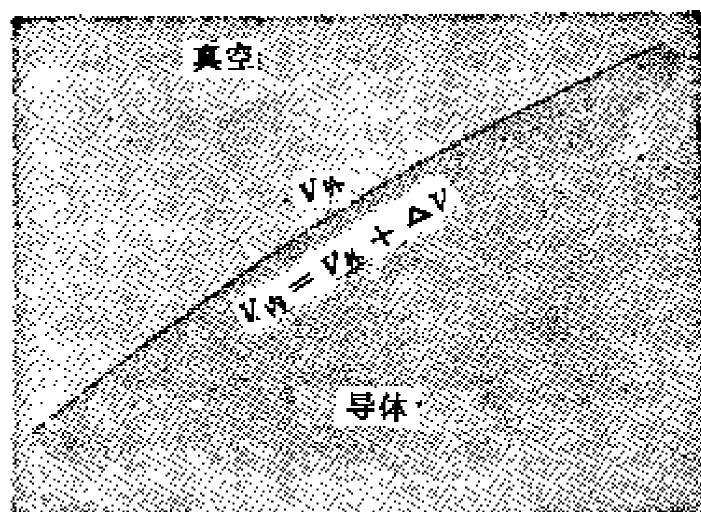
3.20　(a)求出由半径为a及b，长度为L的同轴圆筒组成的电容器的电容．假定$L\gg b-a$，因而可略去终端校正．通过如下证明来校核你的结果：如果两圆筒间的空隙$b-a$和它们的半径相比非常小，你的公式可化为平行板电容器的公式．

(b) 外径为 2.00 英寸的圆筒，轴是竖直的，挂在天平的一个臂上. 挂着的圆筒的下部置于内径为 3.00 英寸同轴的固定圆筒内. 当两圆筒间的电势差是 5 千伏时，计算出把挂着的圆筒拉向下的力.

[圆柱形电容器]

3.21 在第 3.3 节中简略地提到过在导体物质内部电势的绝对值问题. 我们只要论证在这种物质的内部不存在电场，也就是说电势是常数就足够了. 实际上如图所示，在真空和导体物质的交界面上存在着一电势的突变. 试证如果这突变各处都是相同的，则这突变 $\Delta\varphi$ 并不影响我们的结论：如在导体内部没有电场，则在靠近真空的外部，不存在 $\mathbf{E}$ 的切向分量. 你可利用沿闭路 $\mathbf{E}$ 的线积分是零这一事实来进行论证.

[在导体表面处存在电势突变的可能性. (事实上在实际的导体表面处是存在着这种情形的；就是这种电势突变才使导电电子不致飞出来.)]



习题 3.21

3.22 这习题是在讨论平面上点电荷的电场问题时阐明过的"边界条件凑合法"的一例子. 事实上你求得的结果可能

是这个相当有限的技巧的最有名的成就.

(a) 考虑二个不同符号不同大小的两个点电荷. 大的点电荷是正的,放在坐标原点上. 另一电荷在 x 轴上 $x=b$ 处. 首先决定在 x 轴上电势 φ 为零的二个位置, 在 $x=+\infty$ 及 $x=-\infty$ 处不算. 再考虑一中心在 x 轴上并通过这两点的球. 试证在这球面上各点的电势也都是零. 还有其它等电势的球面吗? 我们现在求得的解的问题是关于一点荷和一导体球的什么问题?

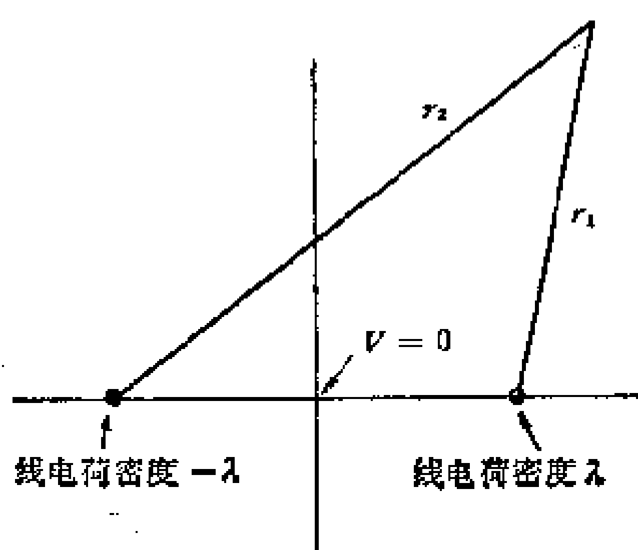
(b) 我们还没有着手解决任何"点电荷和导体球"的问题, 因为点电荷的带电量, 球的带电量和半径对球与点电荷间的距离之比可能和我们这样的电场并不适合. 例如你将怎样求得离带总电荷为零的球一定距离的点电荷 q 的电场? 如果你想到利用叠加原理,你就可从前面的工作,再加上一个简单的步骤,来求得这个场. 用一特殊例子来全面试一下: 10 静电单位的点电荷离半径为 10 厘米的金属球的中心 20 厘米, 这球不带电, 也就是它的总电荷是零. 在球面上的离点电荷最近的一点处的电场强度是多大? 在沿直径的对面的一点的场强是多少? 如你求得了正确的答案,并能理解是怎样求得的, 就可以认为你已善于应用"球内反演法"了.

答: 1/4 静伏/厘米; 7/180 静伏/厘米.

[分析导体球和点电荷组成的系统的方法]

3.23 二个处于不同电势的无限长平行的金属管, 即平行的导电的圆筒,是一典型的二维边界值问题.这种二维问题在数学上比三维问题较易于处理. 实际上两根符号相反, 线密度相同的带电平行线周围的场是解决"二管"类型的所有问题的关键. 在这种场中所有的等势面都是圆柱形的; 所有的场线也都是圆形的. 试证明之. 通过电势来证明是很容易的, 但你必须注意在二维的系统内不能把无限远处的电势定

为零．要让零电势在两个线电荷的中间线上，即在这截面图的原点上．任一点上电势是从每一线电荷分别计算出的电势之和．这样就很快地使你发现电势很简单地和 $\ln(r_2/r_1)$ 成比例，因此一个点离这二点的距离之比是常数的轨迹的曲线上的电势是常数．画一表示这些等势面的简明图．



习题 3.23

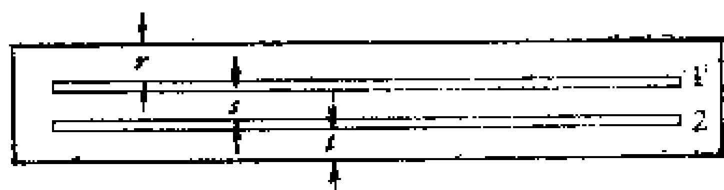
[平行圆柱体；一类可解的二维静电问题]

3.24 图 2.2 中的电场对于带电粒子束的聚焦有重要的实际应用．它叫四极场．等势面的方程式是怎样的？等势面的形状如何？并说明你怎样能利用不同电势的导体得到一个与这个场十分近似的场（当然在有限的区域内）．

[四极场问题的研究]

3.25 这图表示一扁平金属匣的截面，其中有二块的平板 1 和 2，面积均为 A．图中注明的两板之间，板和匣盖匣底之间的距离 r, s, t 等和板的长宽相比假定都是很小的，因此在计算板的电荷时可略去边缘效应．在这近似下算出电容系数 C_{11}，C_{22} 及 C_{12}．你也可以直接算出 C_{21} 来验证习题 3.27 中的讨论中所要求的 C_{21} 等于 C_{12} 的一般定理．

[电容系数的一个例子]



习题 3.25

3.26 有可能把一些导体排列或制成某种形状使一个或多个"相互"电容系数 C_{jk} 是正值吗？这就是说：当所有其它导体，包括导体 k 都接地时，在导体 j 上的正电势使导体 k 上产生净的正电荷．你是否可以 (a) 举出一种排列能满足如上的要求；或 (b) 给出有说服力的证明，它在不可能的"自"电容系数 C_{jj} 中可能有一个是负的吗？

[电容系数的一般性质]

3.27 这里的一些提示，使你能证明 C_{12} 总是等于 C_{21}．我们知道，当一电荷元 dQ 从零电势移到电势为 φ 的导体上，则必须有外力对它提供 φdQ 的能量．考虑两个导体的系统，它们分别被充电到电势 φ_{1f} 和 φ_{2f}（f 表示"最后的"）．从所有导体都在零电势零电荷的状态开始，可以通过不同的途径，达到这一条件．有两个可能的途径是有特别意义的：

(a) 保持 φ_2 为零，逐步把 φ_1 从零升到 φ_{1f}，然后保持 φ_1 为 φ_{1f}，把 φ_2 从零升到 φ_{2f}．

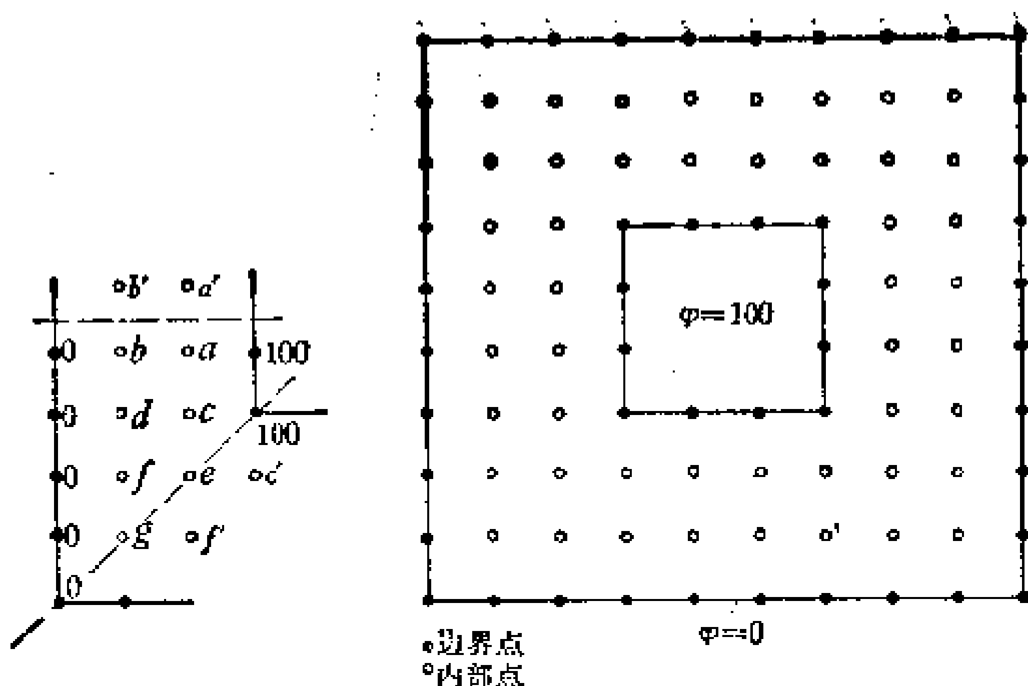
(b) 把 1 和 2 倒过来进行，即先把 φ_2 从零升到 φ_{2f}，然后再把 φ_1 从零升到 φ_{1f}．

对上述每一充电过程，计算外力提供的总能量．然后完成这一论证．

[根据能量守恒证明 C_{12} 必等于 C_{21}]

3.28 设 $\varphi(x, y, z)$ 是任一函数，它可以在一个点 (x_0, y_0, z_0) 附近展成幂级数．在六个点 $(x_0+\delta, y_0, z_0)$，$(x_0-\delta, y_0, z_0)$，$(x_0, y_0+\delta, z_0)$，$(x_0, y_0-\delta, z_0)$，$(x_0, y_0, z_0+\delta)$，$(x_0, y_0, z_0-\delta)$ 把 φ 展成泰勒级数，这六点是对于点 (x_0, y_0, z_0) 是对称的，距该点的距离都是 δ．证明如 φ 满足拉普拉斯方程，则这六个点上的 φ 的平均值等于 $\varphi(x_0, y_0, z_0)$ 的值，精确到 δ 的三次项．

[对称的六点上调和函数的平均]



把一内点的值代为 1/4× 它的四个傍点之和：$c\to 1/4\,(100+a+d+e)$；
取 $a'=a$，$b'=b$，$c'=c$，$f'=f$。建议从下列各值开始：
$a=60$ $b=30$ $c=50$ $d=25$ $e=40$ $f=20$ $g=10$

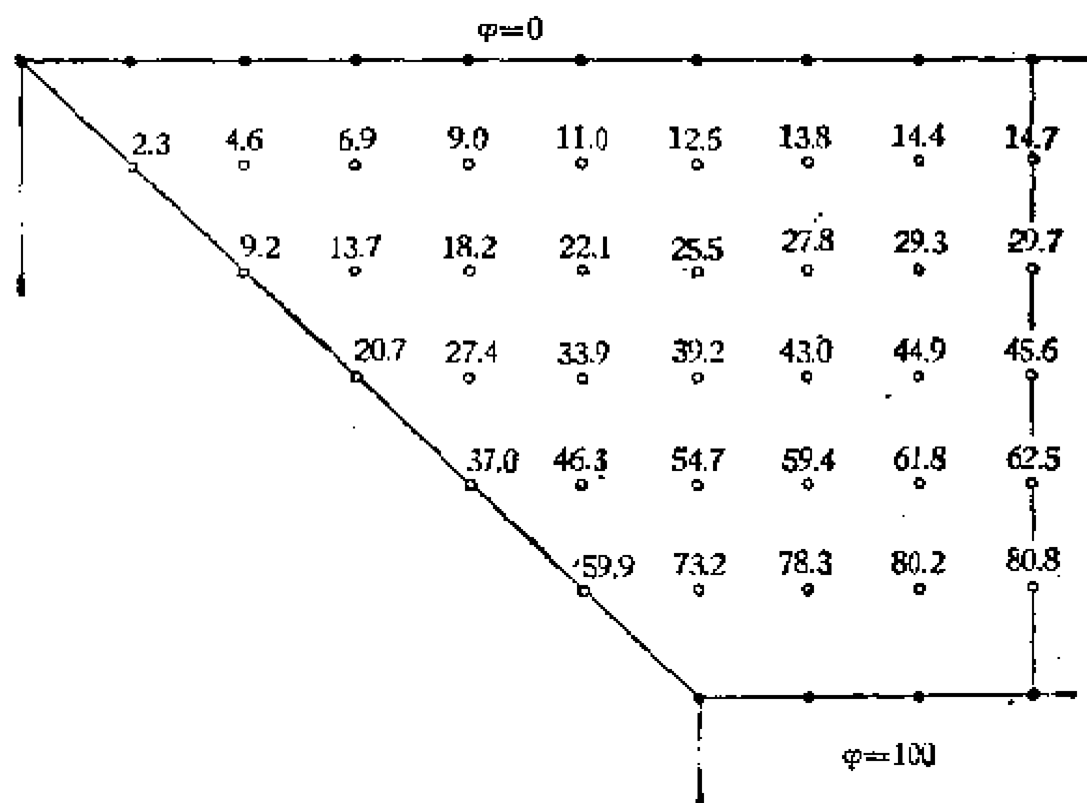
习题 3.29

3.29 我们这里要说明只用算术方法对已给的边界条件如何能近似地解拉普拉斯方程．这方法即是在第 3.8 节中介绍过的松弛法，它是以习题 3.28 的结果为根据的．为了简单起见，我们取二维的例子．在这图中是二个等位面的方块，一个在另一个之中．这可能是由两个不同大小的方形金属管组成的电容器的截面．这问题是要求出一个阵列上的点的值，这些值就是在这些点上的确实的势函数 $\varphi(x,y)$的很好近似值．为了不使工作过于繁重，我们取相当稀疏的点列．任意地把内部边界的势规定为 100，外部为 0，这些边界上的所有的点都保持在这些值上．原则上我们可以从内部的任一点开始；但为了节省时间我们可以通过一些技巧推断出来．在图中提供了一组开始计算的值．可能你会提出更好的一组数值．显然你应当利用对称性；只需要计算七个内点的值．你现在可以在格子内有规则地算出四个傍点的平均值作为每一内点

的值．当你感到疲倦了就停下来，或者当你在计算各点几遍后其间误差足够小的话，也可以不要计算了．当误差不大于1个单位时，就该停下来了．附带讲一下，“松弛”，就是从一个分布值改变到下一个分布值，它与和“扩散”这个物理现象有密切联系．如果你在某一点上开始取一过高的值，就会“扩散”到最邻近的点上去，再从这些最邻近的点到次邻近点上去，直到突出部分被抹平到边界条件能容许的程度．

[例子：求拉普拉斯方程的近似解的松弛法．]

3.30 在你求得你自己的解后，把它与用电子计算机计算对于半空间栅极的相同问题所求得的解作比较，你会感到



习题 3.30

是有意义的(参阅这图)．计算机是被指定当在进行一次新运算所得的差值不大于0.1时就停止工作．它在这些点阵上来回作41次运算，全部计算只需要3秒钟．把一张描图纸盖在

这图上，在这些点间用线性内插法，描出一个或两个等势曲线．你能从这图中的数据求出具有这截面的电容器的每单位长度的电容吗？

[用计算机求出的拉普拉斯方程的解]

3.31 两个带电的圆柱体中间的空间的电势变化方式与另一不同的物理现象，即弹性膜的形状，完全类似．设想习题3.29中的点阵(包括边界上的点)用橡皮带以相同的张力联结着．现在设想它的内部边界，如这习题所画的图那样，被提起来，提升到代表电位差φ_0的高度．假定所有的斜度都是足够小的，于是角度≈正切函数，这对每一平衡点(即节点)的高度都等于它们的四个傍点高度的平均值．为什么？

如果用一连续的橡皮膜代替网络，那末它的表面高度是满足拉普拉斯方程的，提高内部的构架使表面形成如图(b)的样子．这正是在两个方形柱体间静电电势的解$\varphi(x, y)$，它也是如图(c)那样在两方框之间所形成的肥皂膜的形状．肥皂膜或橡皮带网络的设想有时能帮助我们预知物理学中一些其它领域中边界值问题的解的性质．这就是在松弛计算中怎样帮助我们猜想初始值的．比较图中(a)及(b)两部分，表明为什么我们不能期望这种点阵的解给出全部细致的情况．在一内部角的直接近邻处电势的陡落并不能表示出来，那里电场事实上趋于无限大．

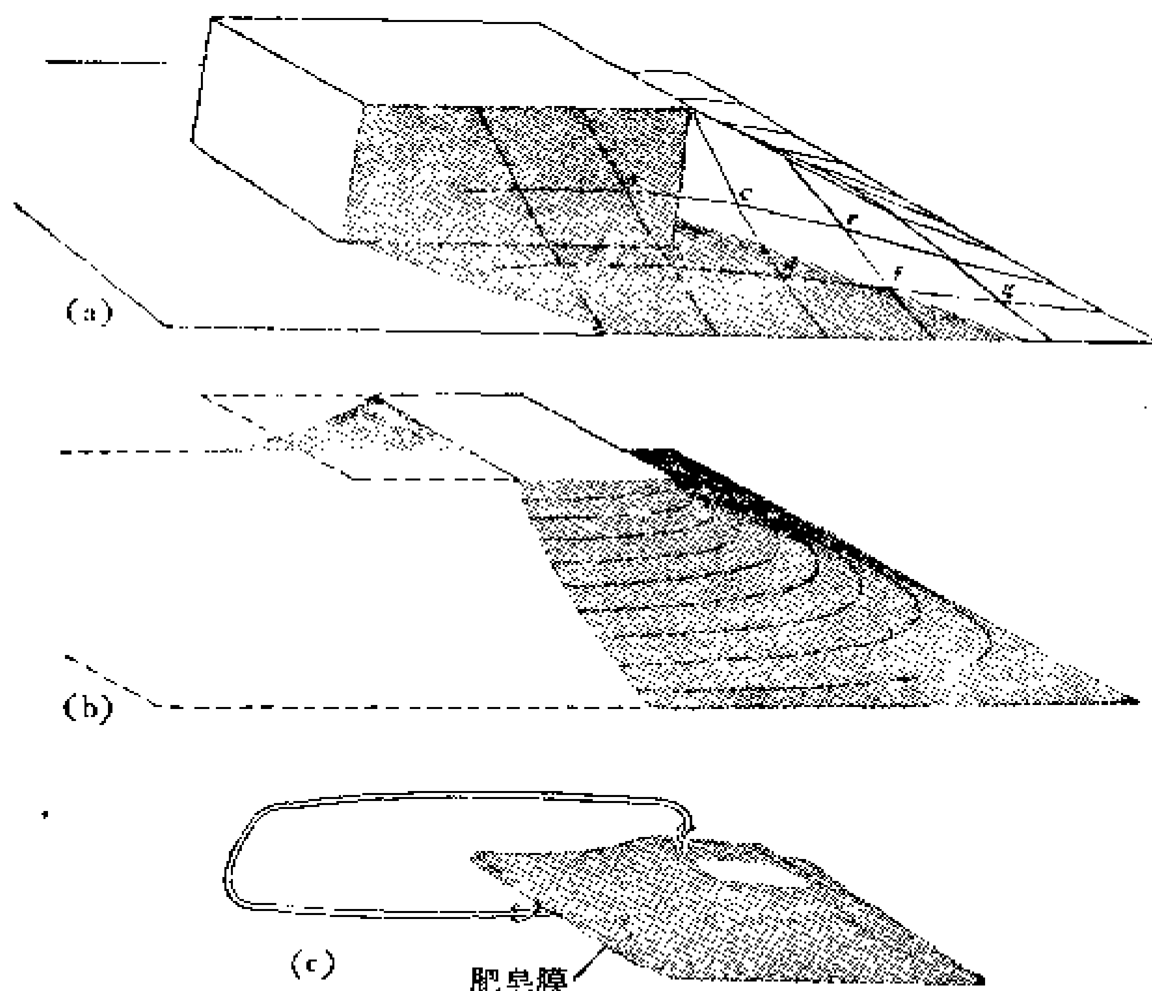
想到变分原理可以看到弹性系统(膜和带)会自行调整，使弹性能取极小值．在弹性膜或肥皂膜的情形，这意味着它的表面面积为最小．它的形状就是连接给定边界的具有最小面积的形状．

在静电系统中，与弹性系统中作用在内部框架上的向下的总力相对应的是什么量？

从力学的观点理解松弛计算法的意义，设想从开始我们

就在每个格子点上竖起竿子，把网络的每个节点在任选的高度上拴在竿子上．在松弛计算中我们是在进行什么程序？

［讨论题：松弛法的物理意义］



习题 3.31

3.32 习题3.29中的方形管问题是变分法的很好的题目．假设我们要计算这种电容器的每单位长度的电容．在电势差已经给定时，这就是计算存储在每单位长度内的能量，因为

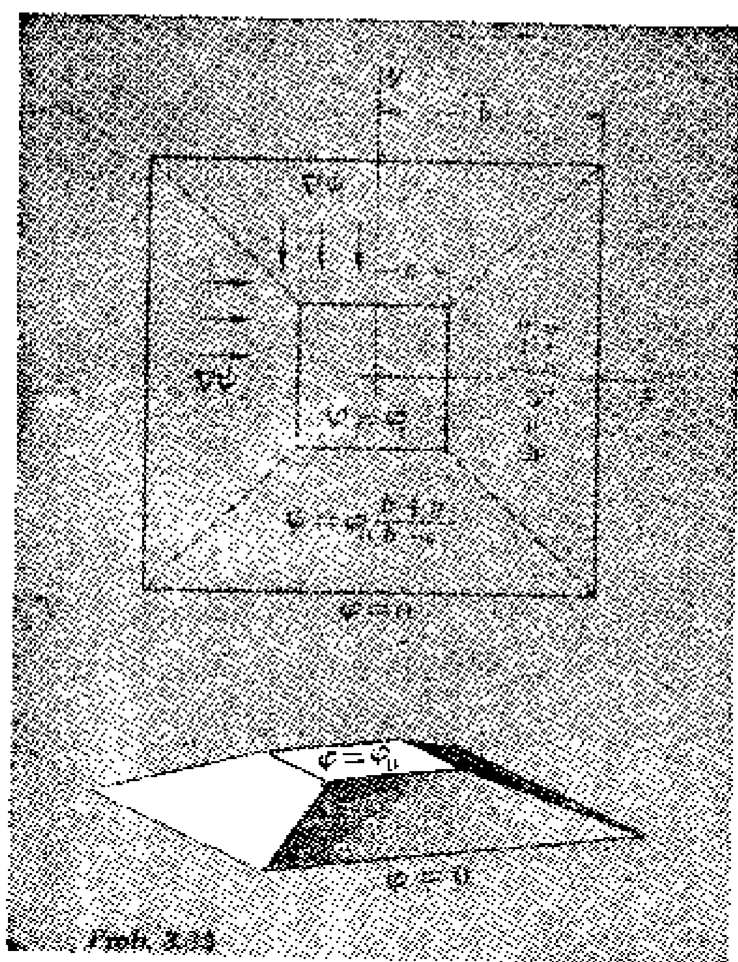
$$U=\frac{1}{2}C\varphi_{12}^{2}=\frac{1}{8\pi}\int|\nabla\varphi|^{2}dv$$

这问题要用试验函数 $\psi(x,y)$ 来代替实在的势函数 φ（它是未知的）进行积分，ψ 必须适合规定的边界条件；这就是：它

必须在小方框上化成 φ_0，在大方框上化成 0． 其它地点我们可以任意选择． 我们的战略是要选择一个容易积分的函数，而它在性质上又必须和我们的实在的解一样．第一步先把内部用对角线分成四部分，在每一部分中假定一简单的线性函数．图中的小方框的每边边长是 $2a$，大方框的是 $2b$，在右边部分取：

$$\phi = \varphi_0 \frac{b - x}{b - a}$$

等等．ϕ 的图形是截断的棱椎体．现在虽然几乎各处都满足 $\nabla^2\phi = 0$，但 ϕ 并不满足拉普拉斯方程． 为什么？算出 U 的值，从而得到电容的估计值． 实在的电容是小于还是大于你的估计值？你认为 $a \ll b$ 时，还是 $(b - a) \ll b$ 时你的估计



习题 3.32

值更接近于正确的值？如果需要更好的近似，你能提出一个仍可使用的更好的试验函数吗？

[例子：　对已给边界值求拉普拉斯方程式的近似解的变分法.]

第　四　章

4.20　由于第 4.5 节中讨论过的理由，欧姆定律失效. 在这种条件下，你认为电场增加 10% 将使电流密度的增加量大于还是小于 10%？

[讨论题]

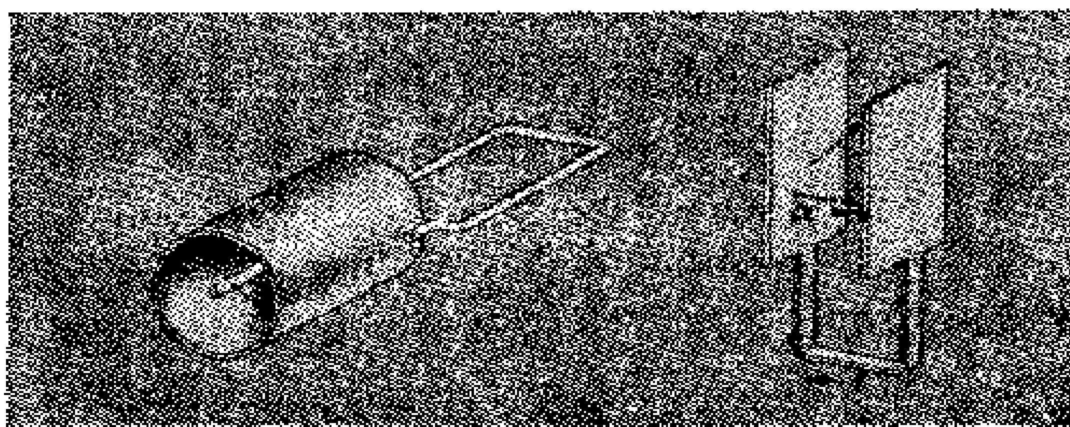
4.21　一单个离子对电导率的贡献可用这个离子的迁移率来表示. 根据这个定义，它的量纲是速度除以电场强度. 它是在单位电场强度作用下离子的平均速度，我们把迁移率记作 μ，用第 4.4 节的符号则是 $\mu = \bar{\mathbf{u}}/\mathbf{E}$. 你怎样能得到气体中一正离子的迁移率和在恒温下的气体密度的关系呢？我们有很多关于离子迁移率的实验文献. 迁移率的单位是厘米/(秒·每伏/厘米)，或写作厘米²/伏·秒. 在 1 大气压下极纯的氦气体中观测到的 He^+ 离子的迁移率是 5.1 厘米²/伏·秒，在这同一气体中负离子（我们可以假定它是电子）的迁移率是 500 厘米²/伏·秒. 试计算由这些数值推得的 τ_+ 及 τ_- 的值. 如果我们能把走过一个"自由程"所需的时间和 τ 联系起来，电子的路程与正离子的路程相比，哪个更长些？电离的氦气的导电率有多大部分是由正离子引起的？(在多数气体中自由电子很快附着到原子上. 这样质量就重了，电子的行动不再是轻巧的，这些负离子的和正离子的迁移率几乎相等. 有几种气体，其中也包括氦，电子不会附着在原子上而形成负离子，因此这些气体用于测定正确的电子迁移率的实验是很理想的.)

[引进离子迁移率的概念]

4.22 一离子在一电场的作用下穿过中性原子气体和弹球滚进弹子机的情形很相似．我们来说明这个类比．它们之间有什么不同处，有什么相似处？写出弹子机中弹球的情况中与欧姆定律的类似的定律．设想你将为科学博物馆设计一表演模型．你怎样设计钉着许多钉子的板使它能最现实地演示出二维离子导电的图象？要考虑这样一些问题：这些钉子的位置，钉子的弹性，激发起热能的可能性以及在相同背景下正负离子两者都能表示出来的可能性等问题．

［讨论题］

4.23 习题 3.17 的结果可以帮助我们理解在电路中电流的流动，其中一部分是由通过两电极之间空间运动的带电粒子所组成．我们的问题是：只有一个粒子通过空间所形成的电流是什么性质的？（如果我们能知道的话，我们就能很容易说明按时到达的大量粒子所形成的任何电流．）考虑这图中的简单电路，即由真空中的两电极用短线连接起来所构成的电路．假定两电极相距 2 毫米．一个很慢的电荷为 $+2e$ 的 α 粒子，从左侧板中的放射性原子核发射出来．它以 10^8 厘米/秒的恒速向右板行动，停止在右板上．把流过联接线中的电流对时间作出一条曲线图．对于与法线成 45° 角以同样的速度运动的 α 粒子作类似的曲线图．（我们这里并不考虑联接线的电



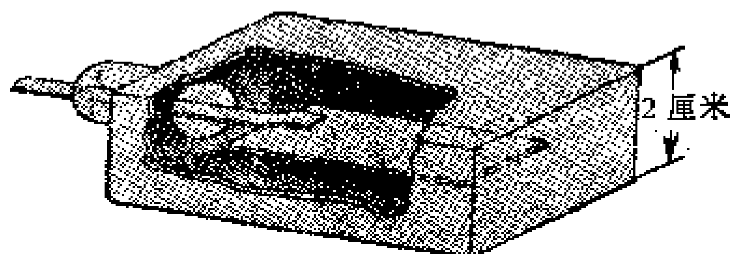
习题 4.23

感，实际上对如此短的脉冲来说，这种电感对脉冲波形是有影响的.）假定电极都是圆柱形的，α 粒子从一个小圆柱电极轴上的一条细线射出，电流脉冲的形状是否相同？

[研究单个带电粒子所形成的电流脉冲. 对于了解近代物理中许多检测粒子的仪器来说，这是不可缺少的知识. 先复习一下习题 3.17.]

4.24 如图，一个电离室由金属匣制成，其中充满氩气. 在一个大气压下，正氩离子和电子的迁移率分别是 1.6 及 800 厘米²/伏·秒. 用作中心电极的金属板用绝缘体架起，并通过一高电阻和 500 伏电压联接. 它同时和放大器联接，假定它的输出是和导线里从中心电极来的电流成比例的，并且可用示波器显示出来. 当一高能粒子通过这室时，在它的路径上产生离子的径迹，你将在示波器上看到什么样的脉冲.（你可假定已经有了一些办法使这示波器正好在这粒子通过之前触发它的扫描动作.）为研究这种脉冲需要多么快的扫描速度？

[习题 4.21 及 4.23 中的概念的应用]



习题 4.24

4.25 如你还没有作过习题 4.4，参阅图 4.2，你最好先作出它. 我们现在来研究真空二极管中的电子流动问题. 同习题 4.4 一样，假定电子离开阴极时的初始速度是零，阴极电位是零，阳极电位是 V_0. 但现在阳极和阴极之间的电场由于电子

的存在已受到显著影响，即存在着负的空间电荷. 也就是在阳极和阳极间某处的电位 $V(x)$ 必须要与所有其它条件相适应，这些条件就与离阴极距离 x 处的空间电荷密度 $\rho(x)$ 和电子速度 $v(x)$ 有关，而两者又和 V 有关. 必须要满足如下的一些条件:

(i) 固定的电位降: $V(x)=0$, 在 $x=0$ 处; $V(x)=V_0$, 在 $x=s$ 处.

(ii) 泊松方程: $d^2V/dx^2=-4\pi\rho$

(iii) 电流的连续性: $\rho v=J=-I/A$ (常数)

(iv) 电子动力学: $1/2mv^2=eV(x)$

试证后三项条件将导出 V 和 x 相关的微分方程 $d^2V/dx^2=K/V^{1/2}$, 这里 K 是由这问题里其它各个常数所构成的一个常数. 我们要找出这方程适合于 $V(x)$ 的边界条件 (i) 的解. 实际上它有一族解能适合条件(i). 我们必须用物理的论证来加上另一限制条件. 我们要求的是极限的情形，对已给的 V_0, 空间电荷的排斥力是这样的大，以至没有更多的电子可以穿过，即使从阴极还放出更多的电子也不行. 判定这一条件的特点是: 在阴极处的电场为零. 请思考一下，为什么? 当该电场不是零而是正时将发生什么样情形? 当该电场不是零而是负时又是怎样? 因此我们要求，在 $x=0$ 处，有 $dV/dx=0$. 为了求解这一微分方程，在两边乘上 $2(dV/dx)$, 那末左边的项可写作 $(d/dx)(dV/dx)^2$. 从而得到这解. 你应当能证明"在空间电荷极限的"情形下电流 I 与 $V_0^{3/2}$ 成正比. 这是不服从欧姆定律的系统的一个很突出的重要例子! 在实际的二极管中从阴极发射出的电子的速度并不是严格为零，而和阴极温度相关的. 它差不多相当于十分之一电子伏的动能. 只要我们问题中有关的电压都比它大得多，假定初速为零就是很好的近似.

[空间电荷极限情形下的二极管： 泊松方程的一个重要的应用；“3/2 定律”的推导.]

4.26 1917 年托尔曼和斯蒂尔特的实验[†]已经直接证明，电子在金属中起导电作用的事实．它是以如下简单概念为基础的，如电子在金属是相对自由的，那末当金属的晶格在加速运动时，电子的惯性阻止它紧跟着晶格运动．当你振动一块金属时，其中电子将落在后面．这就形成正的和负的电荷间的相对运动，因而形成电流．在这问题中我们依照这实验的思路发展这个概念．我们研究一铜环，以极高的恒速绕它的主轴旋转．它是电中性的；因为在晶格中的铜离子和电子以同速旋转，因此没有电流．现在让这环突然停止．电子倾向于维持运动状态，晶格只能有一种力施加在电子身上，使它们静止下来的，这个力就是当它们被一电场驱动时限制它们速度的“摩擦力”．在这实验中电子的加速度和在静止导体中使电子和晶体间产生同一的相对运动的电场 **E** 之间必定存在着简单关系．这样你将发现这环的停止将使一定数量的电子流动．这就是说，积分 $\int I dt$，决定于停止前的速度、铜的电导率和自由电子的电荷和质量之比．试推导这公式．这实验同时还决定载流子的符号．托尔曼等不用单个的环，而用很多圈的细导线，因而很容易把这个电流联到一个外电路中，从而进行测量．

[托尔曼-斯蒂尔特实验]

4.27 如果采用通常的方法用例如 ⌒ 表示“跨过，并不接触”所有的各种电路，都可画在平面的图上．设有一立方体，每边都有一电阻．在每一角上将三个电阻导线焊在一起．把这电路压平成为电路图．求出这立方体的对角线上节点间的等效

[†] R. C. Tolman and T. D. Stewart. *Phys. Rev.* **9**, 164, (1917). 这实验是在加州大学化学实验室中完成的．

电阻，其中所有电阻都是相等的，是 R_0. 对这情形，你不必解出这些联立方程，可用对称性来论证. 再求出这立方体一个面上对角线两端的等效电阻. 仍可用对称性使问题非常简单. 在这些计算中，不要用扁平图，用立方体的立体图可以帮助你看出各部分电流间必要的对称性.

[有关对称性的电路网络问题]

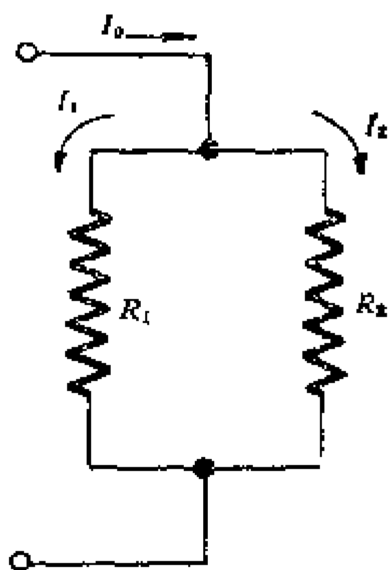
4.28 有些重要类型的网络是无限的. 这图表示一条由并联和串联电阻组成的无限长链，无止境地向右扩展.底线是没有电阻的回路.它有时被称为衰减链或梯形网络.我们的问题要求出它的“输入电阻”，即是 A 与 B 二端之间的等效电阻. 我们对此问题关心的主要是求解的方法，它有很特别的性质，可应用到物理的其它领域中具有相同结构的重叠组合的问题（甚至可用在光学中许多透镜组成的透镜链.）它的特点是当在链的前端上增加另一新的单元电阻使链增长时并不改变我们还没有求出的输入电阻 R. 但是加上这新的单元时，它的输入电阻等于串联 R_1 加上 R 和 R_2 并联的电阻. 这样我们就得到一个方程，可以求解 R. 试证当电压 V_0 加上这种链的输入端时，在相继的各节点上的电压成几何级数地逐节衰减.怎样的电阻比值可使这梯形网络成为每节衰减一半电压的衰减器？显然一个真正无限长的梯形网络并不是实际的. 你能想出一个办法使它只取几节就结束而使衰减值几乎没有什么误差吗？

[梯形网络]



习题 4.28

4.29 这图表示二个并联的电阻 R_1 及 R_2. 电流 I_0 分配在这两电阻上. 试证: 条件 $I_0=I_1+I_2$ 加上最小耗散功率的要求, 所得出的电流值与用普通电路公式计算出的电流值相同. 这是一个例子说明对直流网络适用的一般变分原理: 给定输入电流 I_0, 在网络中的电流分配总是要使总功率耗散达到最小值.



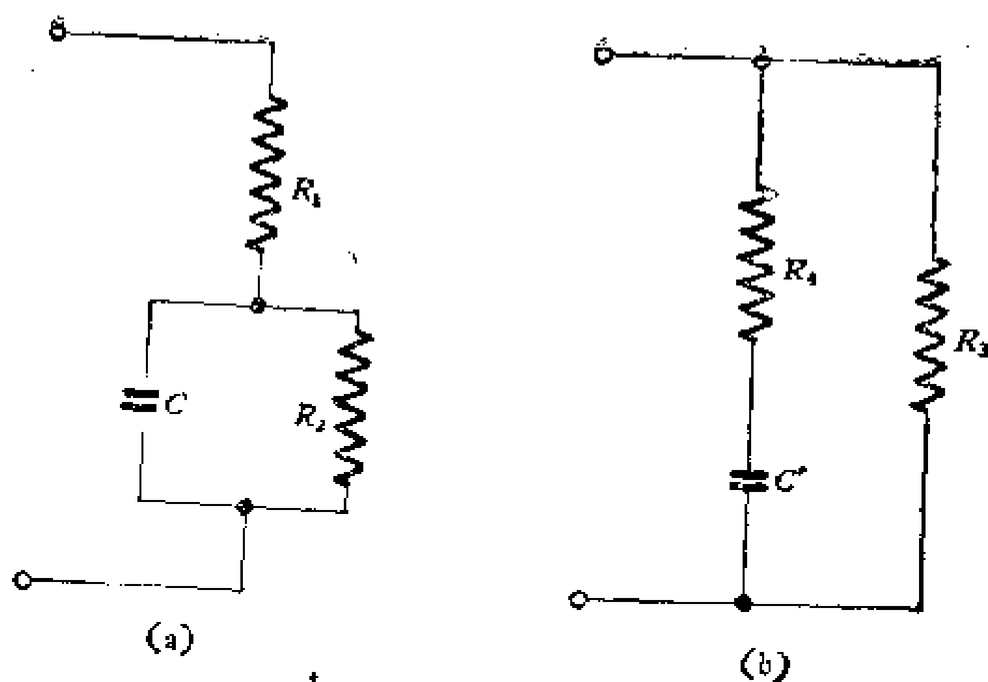
习题 4.29

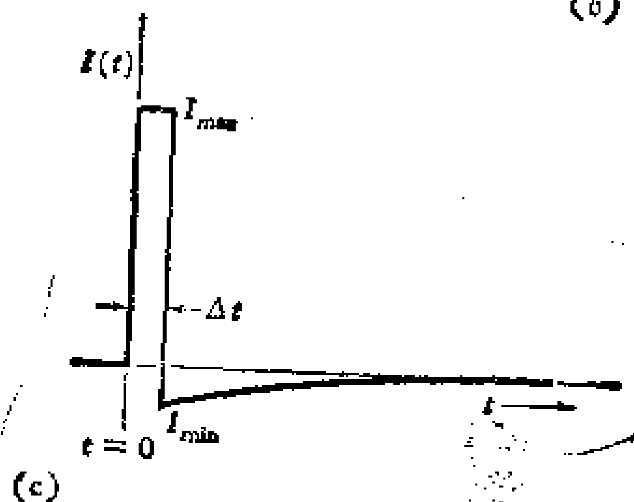
[一简单线路, 以新的观点举例说明变分原理.]

4.30 几年前流行在电气工程师中的一个"难题"是: 无数的 1 欧电阻以方形网络联接成二维的无限大网络, 这就是每一节点是由四个电阻联结起来的. 两邻近的结点间的等效电阻是多少? 解这问题时显示出对称性和叠加法的巨大能力, 如巧妙地运用叠加法你几乎可在头脑里很快地解出来. 你可以用别的方法试验一下, 会看到前法的巧妙. 答案是 0.5 欧, 但是我们不打算告诉你用什么样的电流进行叠加来解出这难题.

[叠加法和对称性的一个巧妙的应用]

4.31 在这习题里要研究二个电路的效能, 在这电路上加上随时间改变的电压. 每一电路都是用二只电阻和一只电容, 但接法不同(参阅图). 最终的目的在于证明一比较奇特的事实, 如果电阻 R_3 及 R_4 和电容 C' 给以适当的值, 那末从外部测量时这两电路完全没有区别. 这就是说: 如果任何随时间改变的电压 $V(t)$ 加到接头上, 在这两电路内的电流 $I(t)$ 是相同的. 这个证明向你介绍了一个普遍的有力的方法, 它是以叠加原理为根据的. 首先研究当左边电路的两端点上加上





习题 4.31

一短脉冲：

$V=0,\ t<0;\ V=V_0,\ 0<t<\Delta t;\ V=0,\ t>\Delta t$

将发生什么情形．这就是在 $t=0$ 以前把终端短路，然后断开，把终端在短时间 Δt 内接上电池，其后再短路．我们使时间 Δt 这样短，使跨在电容上的电压只达到 V_0 的一小部分的值．在计算在这时间内流入这电容的电流时可以假定跨于 R_1 的电压是全部电压．在时间 Δt 内这电容器上留有一定的电量，它通过并联的 R_1 及 R_2 放电．其中一部分电流流到外接

导线上. 因此相应于 $V(t)$ 的总电流看起来一定如这图的(c)部分那样的电流. 你必须求出 $I_{最大}$ 和 $I_{最小}$ 和尾部的时间常数. 现在以同样的方式来研究这图的(b)电路. 证明观测到的对这脉冲反应的电流 $I(t)$ 是相似的. 证明当调整 R_3, R_4 和 C' 的值, 可使这两反应电流完全相同. 这实际上已充分证明这两电路的那些参数如相互适当配合的话, 对任一 $V(t)$ 的响应是相同的. 对任一 $V(t)$ 可看作很多脉冲的叠加; 如电路是线性的, 那么它们的响应也同样可以看作许多各个响应的叠加, 事实上一电路对一复杂驱动函数 $V(t)$ 的响应可通过对一狭的脉冲分析很容易求得. 你可以对这两电路之一作试验. 假定作用电压是与 RC 时间常数相比, 并不是太短的方头脉冲. 这问题告诉我们一条规则: 等效的电路并不总是唯一的.

[介绍受变电压和变电流作用的等效电路的概念, 用短脉冲的叠加进行分析.]

第 五 章

5.11 如果电荷真的按照因子 $(1-v^2/c^2)^{-1/2}$ 随带电粒子的速度而变化, 那将会有什么结果呢? 估计(只考虑数量级)氢分子和氦原子之间的净电荷的差值. 当质子从 H_2 分子变成 He 的原子核, 假定它的动能从可忽略不计的很小的量增加到 1 兆电子伏, 而它们的两个电子从 H_2 进入 He 时电子的动能增加几十伏. 如果在这种情形下, H_2 实际上正好是中性的, 你估计在正常温度和压强下一公升的氦有多少超额电荷? 这样引起的电场有多大的数量级?

5.12 在图 5.20 中假定在实验室参考系中正电荷是静止的, 只有负电荷在运动. 试推导在这样情况下, 作用在运动着的试验电荷上的力的公式.

5.13 在一"碰撞束"粒子加速器中, 一负电子和一正电

子，各有 2 千兆电子伏的能量，以相反的方向互相飞过．它们相遇时很靠近，以至每一个粒子从原来飞行方向上偏转 10^{-2} 弧度角．利用习题 5.9 的结果估计它们最接近的距离．

［习题 5.9 的概念的应用］

5.14 如图 6.3，每一铜线上有多大的未补偿电荷密度可产生等于我们所计算的磁作用力那样大小的静电作用力？估计 1 毫米直径铜线带有这种电荷在表面处的场强．把以静伏/厘米计算的这场强的大小和在这例子中铜线表面处以高斯计算的磁场大小相比．我们的结果是偶然的吗？或者你证明它必定总是那样的．

5.15 我们要研究含有多种载流子各自以不同的速度运动所构成的一个复合的线形电荷．从实验室参考系来看，第 k 分量有每厘米 n_k 个电荷，每一电荷带有 q_k 电量，以速度 $v_k=\beta_k c$ 运动．在这参考系中总电流是 I，线电荷密度是 λ，则有：

$$I = c\sum_k n_k q_k \beta_k, \qquad \lambda = \sum_k n_k q_k$$

现在把它变换到以速度 βc 运动的参考系中． 如我们根据图 5.20 证明过的方式，有如下的速度变换和电荷密度的变换：

$$\beta_k' = \frac{\beta_k + \beta}{1 + \beta\beta_k}, \qquad n_k' = \frac{n_k \gamma_k'}{\gamma_k}, \qquad q_k' = q_k$$

试证在这新的参考系中

$$I' = \gamma(I + c\beta\lambda), \quad \lambda' = \gamma\left(\lambda + \frac{\beta I}{c}\right).$$

这说明我们以前的结果和所取的模型是无关的．它也表示如果在某一参考系中总电流是零，总电荷是零，那末在一切参考系中不管是怎样的电流分量和电荷的种类，也同样都是零．这可能是并不明显易见但非常简单的事实．

[说明在多种带电体的情形下电流和线电荷密度怎样变换的。]

第　六　章

6.16　近似计算罗兰特实验中转盘正上方所产生的磁场. 取复印在图 6.27 中的他的原文中注明的有关数据. 你还需要知道在他的几次实验中转盘相对于它接地的上下板的电压，约为 10 千伏. 这资料是在他其后说明仪器的主要部件那个在左边垂直管中的"非定向的"磁强计的论文中发表的. 它由相反方向的二支磁针固定在一起而组成的；它在悬挂起来时抵消了地磁的作用力矩. 旋盘产生的场主要作用在靠近的一支磁针上，它可以通过更强得多的场检测出来. 这当然不是罗兰特所必须注意的唯一的一方面.

[研究罗兰特实验]

6.17　用叠加法可以发现关于螺线管的场的很多简单事实.我们的想法是用二只同直径的同长度 L 的螺线管,对接着，制成长度为 $2L$ 的螺丝管. 也可以用二只半无限长螺线管对接起来成一个无限长的螺线管,等等. (一个半无限长螺线管即是一端在本地，另一端在无限远处的螺线管.) 这里有一些事实可用这方法来证明:

(a) 这图的 (a) 部分表示一有限长的螺线管，轴线上一端 P_2 点的磁场约等于在中心处 P_1 点的磁场的一半. (它比一半略大些还是略小些?)

(b) 如图的 (b) 部分一半无限长螺线管中通过绕线端头处的场线 FGH 从 G 点处一直到无穷远处是一根直线.

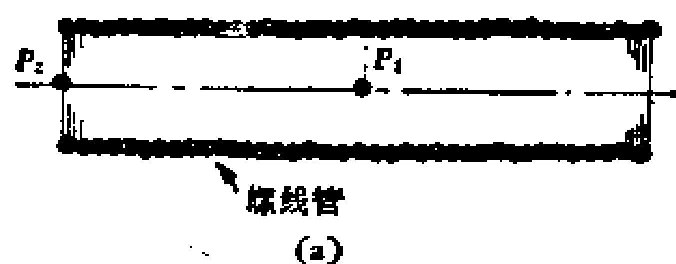
(c) 通过半无限长螺线管的端面的磁通量正好等于远离端面的线圈内部磁通量的一半.

(d) 在螺线管远处内部离轴 r_0 厘米的任一场线在端面

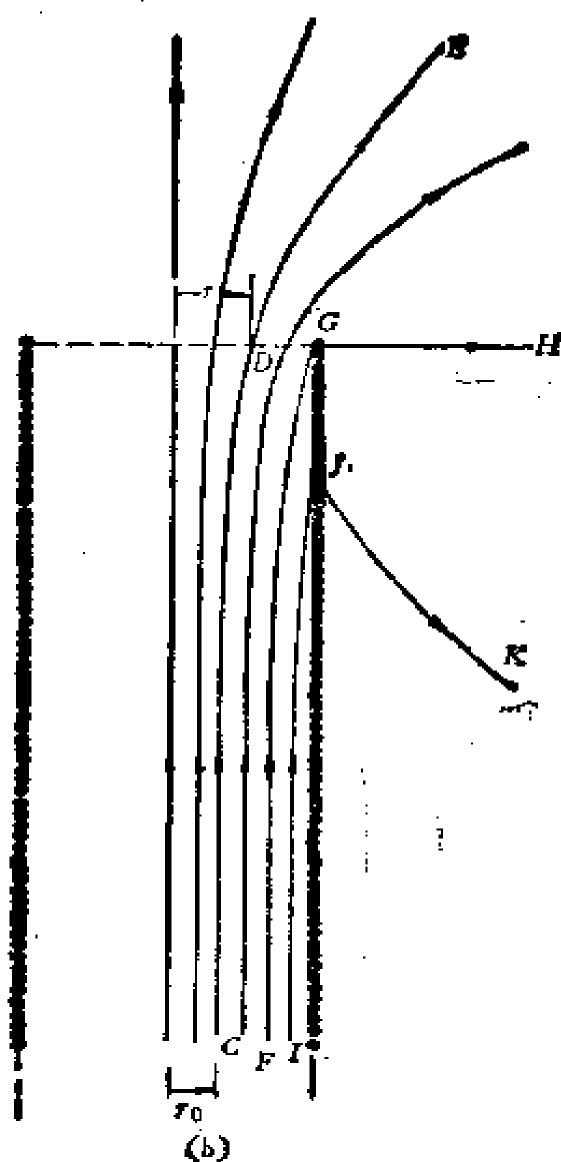
处处于离轴的距离为 r_1，则有 $r_1 = \sqrt{2}\, r_0$。

试证上述命题都是正确的．你还能举出其它的一些事实吗？

[应用叠加法的习题]



(a)



(b)

习题 6.17

6.18 要产生极均匀磁场的一种方法是采用一极长的螺线管，而只能用中间截面的内部的场．你能提出采用几只线圈或短螺线管来取得均匀磁场的方法吗？（在作出这习题后，你可查找一般的电磁学书籍的索引中"赫姆霍尔兹线圈"，核对你的发明与上述书中描述的安排有什么相象吗？）

【发明创造的尝试】

6.19 线圈均匀地绕在截面为长方形的环上，共有N圈．在这图中只画出了一部分．有了这么多圈数，我们将假定，在环面上的电流都是准确地为径向的，而在内外的圆柱面上的电流是准确地为纵向的．首先通过这种对称性的假定证明磁场到处都是在"圆周"的方向上，也就是场线都是以环的轴为中心的一些圆．其次证明：外部包括中心的孔在内，场都是零．最后你求出环内部磁场的大小表示为半径的函数．



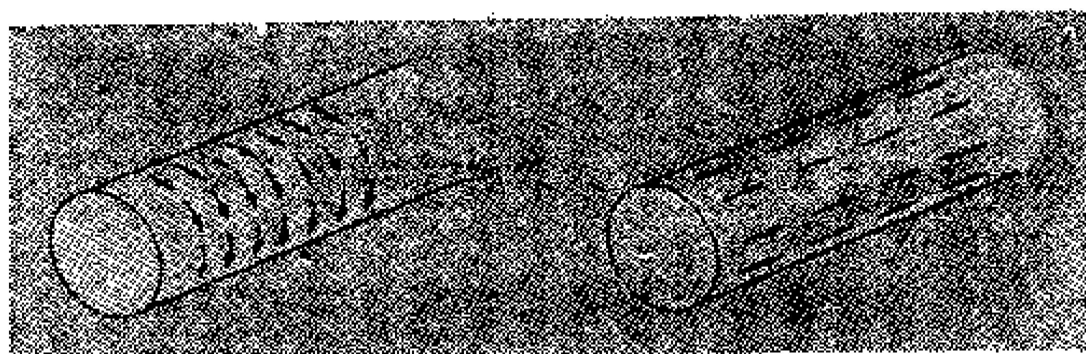
习题 6.19

6.20 一实验人员要在一精密的磁性实验中去除在30厘米×30厘米×30厘米范围内的地磁，使在任一点上剩余磁场不超过10毫高斯．地磁强度在这区域内约为0.55高斯，与铅直线成30°度角．假定在所讨论的范围内它的强度为常数，误差为1毫高斯左右．（地磁一般在1英尺见方的范围内没有多大变化，但在实验室中常受到局部的干扰．）设计一套满

足上述要求的线圈，估计这补偿系统的安匝数.

6.21 任一通常的螺线管实际上是螺旋形的. 除主要的圆周上的电流外还存在着一定的纵向的电流分量，这是因为线圈必须是一圈挨着一圈绕过去的. 假定我们把它看作为圆周电流层和纵向电流层叠加起来的，如图所示. 试描述合起来的磁场，包括柱内的与柱外的.（假定这圆柱是无限长的.）你能求出这圆柱体内外的磁场强度之比与表示这种电流分布的螺线形绕组的线距的关系吗?

[讨论题]



习题 6.21

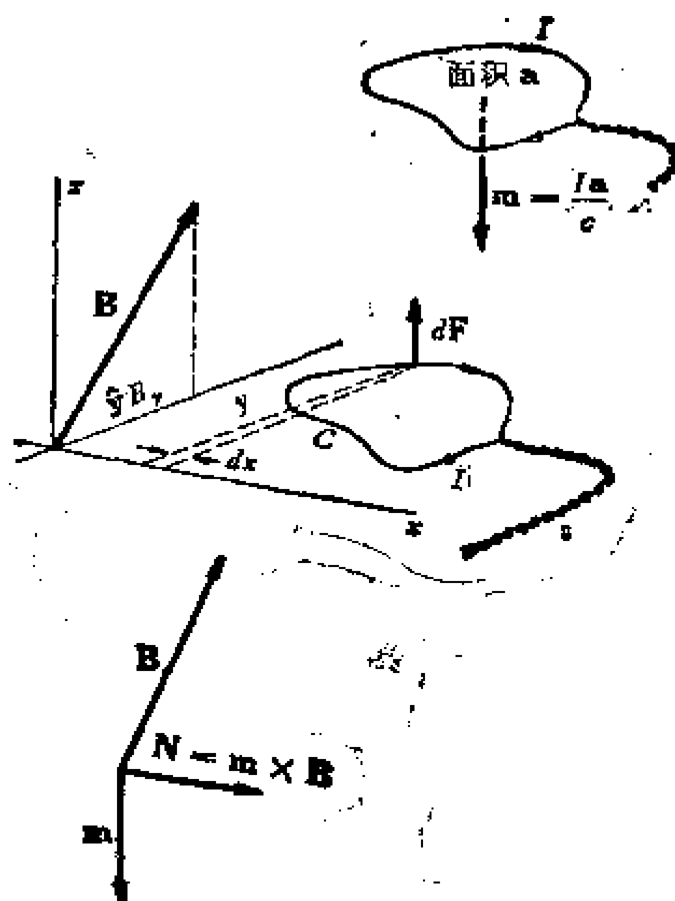
6.22 这习题主要目的是要求出在恒磁场中作用在一电流迴路上的力矩. 这恒磁场 **B** 指向空间的某一方向上. 我们把坐标置于使 **B** 垂直于 x 轴，使电流迴路在 xy 面内，如图所示. 这迴路的形状和大小是任意的；可以认为这电流是通过绞在一起的导线引入的，使作用在这导线上的净力是零. 考虑这迴路的一电流元，求出作用在这电流元上相对于 x 轴的力矩. 只有力的 z 分量是有贡献的，因此只与磁场 B 的 y 分量有关，图中把它记作 $\hat{y}B_y$. 进行积分，得到总力矩. 试证积分的结果除一系数外就是这迴路的面积. 电流迴路的磁矩定义为一矢量 **m**，其大小是 Ia/c，这里 I 是以静电单位/秒为单位的电流，a 是迴路面积，平方厘米；其方向如图示，是在电流以右手线绕的迴路的法线上.（我们在第十章还要讲到电流迴路和它

的磁矩等问题.)试证明你所得的结果为矢量方程式如下:

$$N = \mathbf{m} \times \mathbf{B},$$

它表示作用在电流迴路上的力矩；作用在这迴路上的净力是多少?

[电流迴路的力矩]



习题 6.22

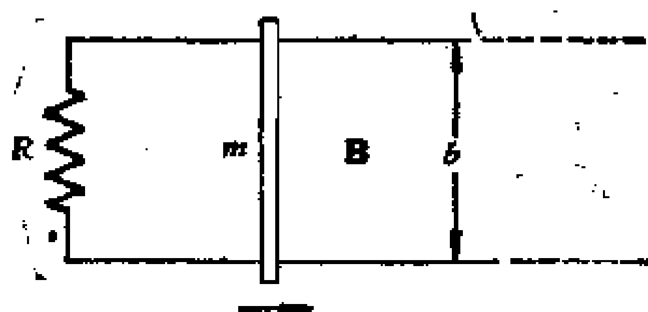
6.23 为了某些目的要在迴旋加速器中把负氢离子加速.一负氢离子 H^- 即是有一额外的电子附着在氢原子上. 这种附着是很弱的. 只要有 15×10^4 静伏/厘米(在原子的尺度上是很弱的电场)的电场即可把这电子拉开，剩下一个氢原子.如果我们需要把离子 H^- 加速到 1 千兆电子伏的动能，我们能用多大的高磁场在圆轨道上把它加速到所要求的能量?(为求出这问题中的 r 值，只须用到 H^- 离子的静质量，当然，它

几乎就是质子的质量，约为 1 千兆电子伏.）

6.24 一发明者要制造根据“感应”电场 $(\mathbf{v}/c)\times\mathbf{B}$ 来测量的飞机速率计. 讨论这种设想的优点. 有一些气象上的事实与这个讨论有关，地球大气中常存在一些静电场，它的大小和方向是变化的，不可预测的，大小约为 10^{-2} 静伏/厘米. 有一时期有一种关于放鸽子回家的说法，按此说法，鸽子能以某种方式知道自己的速率，感觉到“感应”场 $(\mathbf{v}/c)\times\mathbf{B}$，从而测出了 $\mathbf{B}$，因而也就知道它在地球上的位置. 这种说法还有更多的意义吗？在开动着的车辆里测量 $\mathbf{B}'$ 本身又如何呢？由于在广大范围内有未知的大气电场（其数量级如上述），对所说的 $\mathbf{B}$ 值引起的不确定性有多大？

[讨论题]

6.25 一质量为 m 的金属棒横跨在没有摩擦力的相距为 b 的两平行的长轨道上滑动. 一电阻 R 跨接于轨道终端上；轨道和棒之间的电阻和 R 相比可忽略不计. 有一均匀磁场 $\mathbf{B}$ 垂直于这图面. 在时刻 $t=0$，横跨的棒有一向右的速度 V_0. 其后它将怎样？(a) 这棒会停下来吗？在什么时刻？(b) 它走了多远？(c)能量守恒是怎样的？



习题 6.25

6.26 在推导方程式 (58) 时在定义参考系 F 及 F' 沿 x 方向的相对运动时没有忽略了什么. 如我们已取定沿 y 方向的速度，那变换将是什么样的(注意这负的符号)？如你愿意的

话，你可推导出 $E_{\parallel}$ 及 $E_{\perp}$ 的一般公式. 这里的下角标表示平行或垂直于 $\mathbf{v}$ 的分量.

6.27 设想有一 y 方向的均匀电场 E_y，z 方向的均匀磁场 B_z，假定 $E_y < B_z$，求出一洛仑兹参考系，其中的电场是零. 计算在这参考系中 B 的值. 假定 $E_y > B_z$，你能找出其中电场为零的参考系吗？你能找出其中磁场为零的参考系吗？

6.28 一学生说："你已使我相信在两电流之间的力(我本来认为是磁力)可解释为运动电荷的电场. 但如确是这样，为什么在图 5.1c 中的金属板可屏蔽一根导线使之不受另一根导线的影响？"你能解释吗？

[佯谬？]

6.29 有一状态，其中在平面电流层两侧，平行这电流层平面的磁场分量的大小相同，而这两分量的方向相差 90° 角. 这是怎样的？这里有力作用在这电流层上吗？我们关于作用在电流层上的力的公式能应用到这类情形上吗？

[沿一电流层的场]

6.30 假定我们用习题 6.7 中的螺线管，接通一下高压电源，通过极大电流，来产生很短时间内的极强的磁场. 不考虑其它所有的限制，只考虑导线抗张力强度所加的限制. 这磁性的压力象消防水管中的压力一样，会把螺线管胀裂开. 如果导线张力强度是 2×10^9 达因/厘米^2，这螺线管能承受多大的最大磁场？

答：35 千高斯

[由磁压引起的应力]

6.31 在测量钠金属中的霍尔效应中，10^4 高斯的磁场中，钠导体中的电流密度是 1000 安/厘米^2，测得的横向电场是 25 微伏/厘米. 从这些数据计算每立方厘米的导电电子数，把它和 1 厘米^3 中的原子数相比. (钠的密度是0.97克/厘米^3).

[霍尔效应]

第　七　章

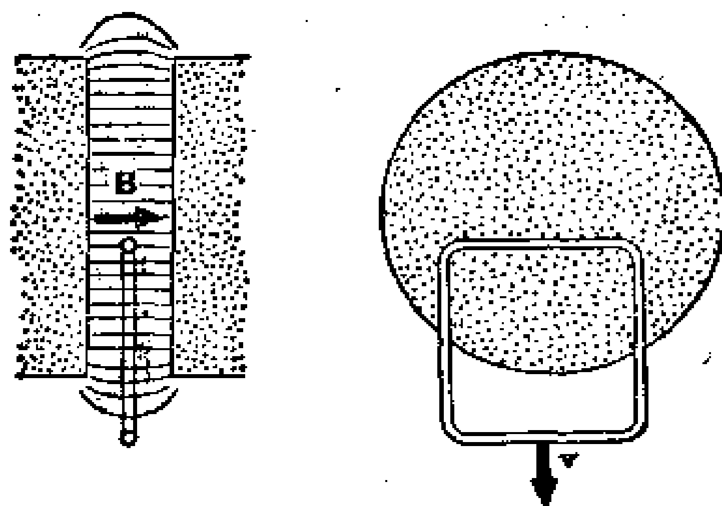
7.16　法拉第曾试图探测当电路中有一部分是由流过地球磁场的水构成时，电路的感应电流，但未获成功．他对该实验叙述如下：

"因而我在滑铁炉桥（Waterloo Bridge）作了实验（出于兴趣）．把九百六十英尺长的铜线张在桥栏杆上，由这线两端垂下另外两根导线，每根导线上都绑着一块大金属板使导线浸在水里，保持完善的接触．这样一来，导线与水形成了一个传导电路．随着潮水的涨落流动，我希望得到类似于黄铜球上的那种电流．在电流计上不断地获得偏转，但它们完全没有规律．后来知道，这是由于其它原因而不是我们所探究的原因引起的．不同条件下的水，如河岸两边洁净程度不同时的水；不同的温度；稍微不同的板：焊上的，拧在一起以接触得更完善的，或其它的；所有这些都依次产生了影响．并且尽管我还实验过只通过中央桥拱的水；用铂板代替铜板；以及采取其它一切措施．经过三天的实验我都未获得任何满意的结果．"（"电的实验研究" I，p.55．伦敦，1839 年出版）

假设地磁场的竖直分量为 0.5 高斯，再对泰晤士河上潮流的速度作一个有根据的推测，然后估计一下法拉第试图检测的感应电压的大小．

7.17　一金属方框放在电磁铁的两个极间，如图所示．框架的上边处于相当均匀的强度为 B 的水平磁场区中．框架的下边在磁隙外，那里的磁场尽管非零，但在研究这个问题时可以忽略．若松开框架，它由于其自身的重量下落，对于给定的框架材料，试证明其所获得的下落速度只依赖于 B 而与制作框架的金属线或金属杆的形状和截面无关．若 B 为 15 千高

斯，框由铝制成(密度 2.7 克/厘米^3，电阻率为 2.8×10^{-6} 欧姆——厘米)，则下落速度是多少厘米/秒？此框在达到其极限速度之前下落了多少？



习题 7.17

7.18 设通过由图 7.6 中的线圈产生的磁场 **B** 而运动的迴路由电阻极低的导线制成，电动势 ε 会引起极大的电流绕迴路流动吗？设 I_2 表示迴路中产生的电流，$\mathbf{B}_2$ 是这个电流产生的磁场。$\mathbf{B}_2$ 和 **B** 的关系如何？如果迴路由电阻严格为零的超导导线制成，能够估计出那会怎样吗？

[讨论题]

7.19 试讨论在图 7.20 中两个大、小同心圆环的情形下，定理 $\Phi_{12} = \Phi_{21}$ 的含义。让外环之电流 I_1 固定，显然，若 R_1 增加时，通过内环的磁通量 Φ_{21} 将减小。这是由于中心的磁场减弱。再固定内环的电流，在 R_1 增加而 R_2 不变时，通过外环的磁通量 Φ_{12} 为什么应当减小？它必定减少才能适合上述定理。

[弄清通过电路的磁通量的含意的问题]

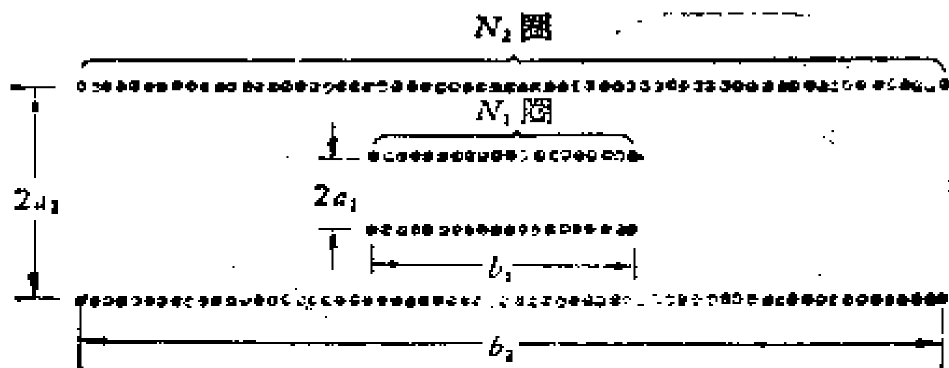
7.20 你能提出一种方法利用定理 $\Phi_{21} = \Phi_{12}$ 来求环形电流在环所在的平面上，距环远大于环半径的点的磁感强度吗？(提示：考虑图 7.20 外环的半径作一微小变化 ΔR_1 时所产生

的效应，对 Φ_{12} 和对 Φ_{21} 必有相同的效应）

[互感互易定理的应用]

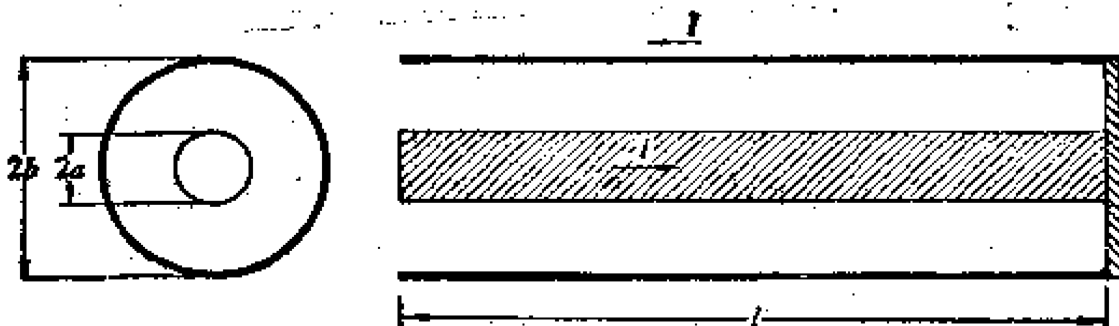
7.21 下图表明长 b_1 半径为 a_1 的螺线管放在长 b_2 半径为 a_2 的更大的螺线管内. 里边那个线圈的总匝数为 N_1，外边线圈的匝数为 N_2，求互感 M 的公式.

[同心螺线管的互感]



习题 7.21

7.22 图中同轴传输线的内导体是半径为 a 的实心金属杆. 外导体是半径为 b 的薄金属管，在其一端有个金属圆盘把两个导体焊在一起. 我们想得到一段长为 l 的同轴线的自感 L. 设流过内导体的电流在杆的截面上均匀分布，对给定的电流 I，试问导体杆内和环状空间中，作为半径函数的磁感强度 B 是怎样的？



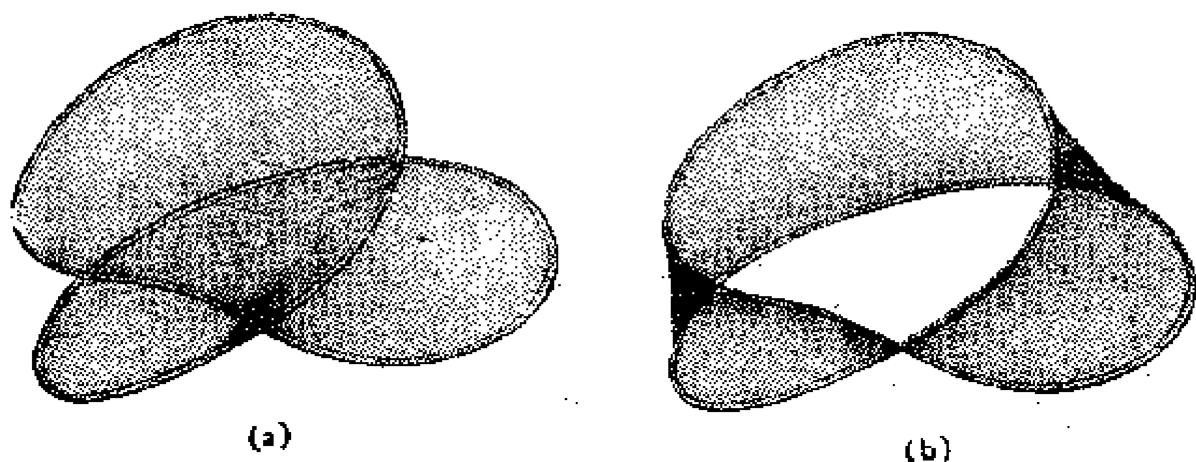
习题 7.22

计算贮存于磁场的总能量. 再用贮存能 $=\frac{1}{2}LI^2$ 这个一般公式求出 L. 注意，这种计算方法避免了由于内导体上

不同的细电流线包围不同的磁通量一事所引起的问题．然而这个结果只对缓变电流有效．为什么？

［用能量关系计算自感］

7.23 考虑图中所示的迴路．若我们想要计算 **B** 通过这个迴路的通量．图 (a) 和 (b) 示出了以此迴路为边的两个表面，它们的主要区别何在？这两者中如果有的话，哪一个是计算面积分 $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$ 以求出磁通量时应选的正确曲面？试描述一个三匝线圈的与此相应的曲面．试证明它符合于我们先前所断言的，对于一个 N 匝的密绕线圈，其电动势恰为同样形状



习题 7.23

同样尺寸单迴路的电动势的 N 倍．

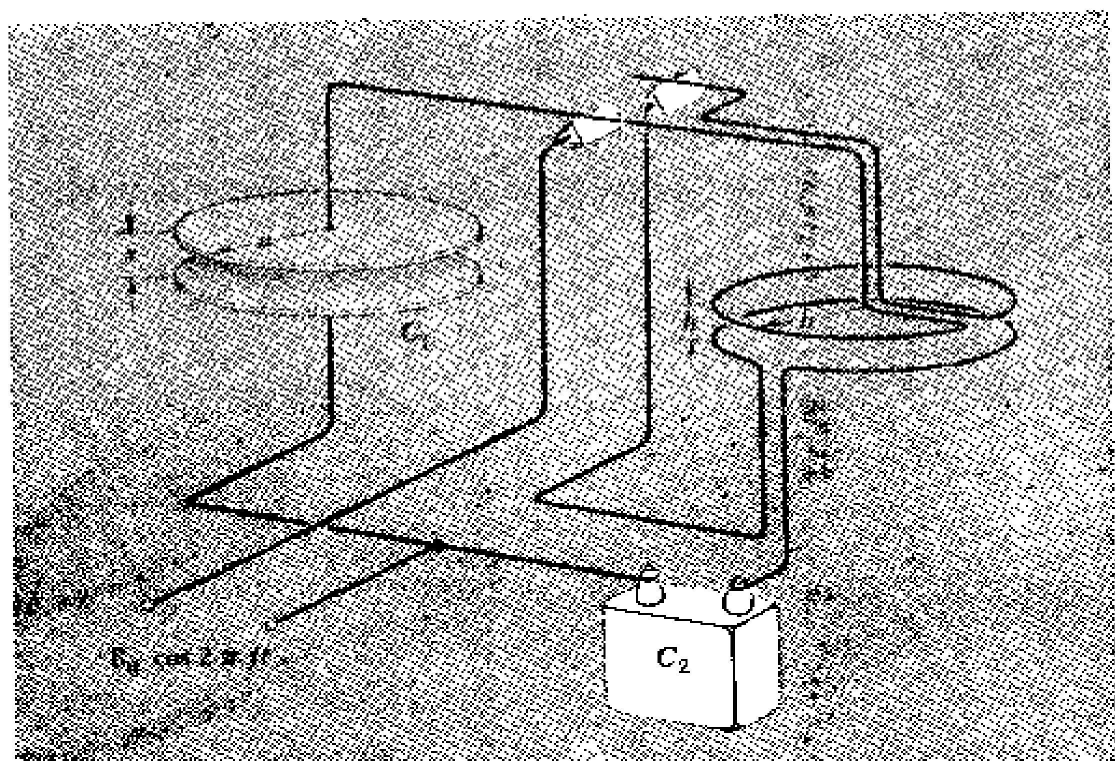
7.24 在第七章开始处所引的第二段话中，法拉第提到了“阿喇果的特别实验”，稍后，在叫做“阿喇果磁现象注释”一节中，法拉第将其描述为这样：

“如果一个铜盘紧靠着一根磁针或一个磁铁转动，后者被支撑得使它可以在平行于铜盘的平面内转动，则此磁铁趋于跟随铜盘运动；或者，如果磁铁转动，则铜盘趋于跟随其运动．并且，此效应如此之强，以致重达数磅的磁铁或铜盘都可以这

样转动起来．若磁铁和圆盘相对静止，则在它们之间观察不出哪怕是最细致的吸引、排斥或其它任何效应．这就是M·阿喇果所发现的现象”．

试给出你自己对阿喇果现象的“注释”．

[“阿喇果现象”]



习题 7.25

7.25 在麦克斯韦方程中出现的常数 c 可以用只涉及低频场的电学实验来确定．考虑图示的安排．电容器二板间的作用力为载有同向电流的平行导线间的作用力所平衡．f 周/秒频率的正弦交流电压施于平行板电容器 C_1 和电容器 C_2．流进流出 C_2 的电荷在圆环中形成电流．假设 C_2 以及这里所涉及的各种距离已经调整得使对 C_1 上板的向下的作用力与上圆环所受的向下之力恰好平衡（当然，在未加电压的时候就应当调整得使两边的重量相互平衡）．试证明在这种条件下，常量 c 可以由测得的下述诸量算得：

$$c=(2\pi)^{3/2}\left(\frac{ab}{h}\right)\left(\frac{C_2}{C_1}\right)f\ \text{厘米/秒}$$

注意，除了测量 C_1、C_2 两电容之外，只需测量距离和时间（或频率）．此结果自然不会包含电学单位（如果使 C_2 为 C_1 的 10^4 倍，且将电流环制成好几圈以增强小电流下的效应，则即使使用 60 周/秒这样低的频率，这个实验都还是容易办到的）．

［由电学实验的结果预测光速］

7.26 试讨论用电磁感应效应向远方发送信号的可能性．只依靠法拉第感应定律，无线电报是否可行？

第 八 章

8.8 对于图 8.2 中的 RLC 阻尼电路，求出任一时刻 t 贮存于电路中的总能量，亦即电容器中的能量加上电感器中的能量．证明"临界阻尼"条件 $R=2\sqrt{L/C}$ 是总能量耗散最快的条件．

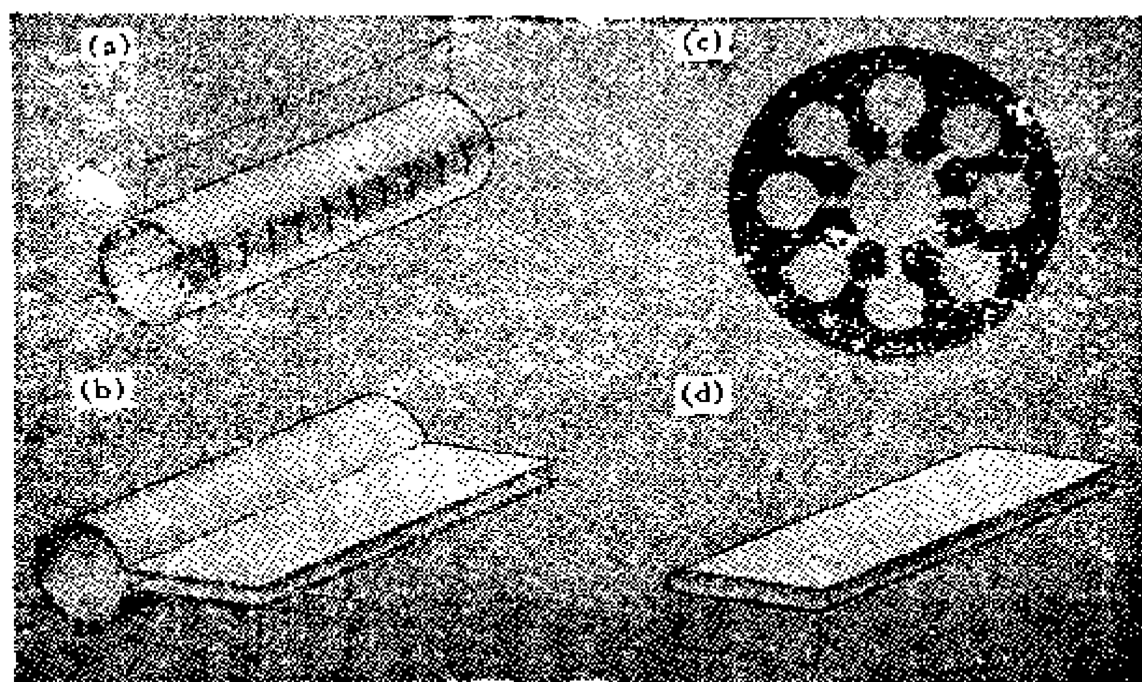
［说明临界阻尼的特点］

8.9 用式（10）和式（13）表出 RLC 串联电路中阻尼对频率的影响．令 $\omega_0=1/\sqrt{LC}$ 为无阻尼电路的频率．设加足够的电阻使 Q 由 ∞ 减至 1000，试问频率 ω 因此而由 ω_0 移动的百分比是多少？

［阻尼对共振频率的影响］

8.10 利用习题 7.7 的结果写出图（a）所示的两端开启的导体圆柱的自感公式．所考虑的电流路径是围绕圆周的．如在习题 7.7 中一样，我们仍采用这样的近似，认为圆柱内的场直至两端为止都是均匀的．现将此电路断开，插进一个电容器，如图（b）所示．计算此串联系统的共振频率．注意它与长度

b 无关．第二次世界大战中使微波雷达得以实现的第一只谐振腔磁控管就包含 8 个这样的共振电路，通过这类管子铜阳极的一个横截面依正确的实物尺寸绘于图(c)．试估计其发出的辐射频率（这个频率不大会因为有 8 个腔而不是一个腔而有所变化）．设 ω 与 s 固定，我们试用缩小圆柱体的尺寸直至最终 $a=\frac{1}{2}s$ 为止的办法把共振频率提得尽可能的高，此时它看来就象图 (d) 了．在这种情况下，你作出的公式还适用吗？实际频率比这公式所预定的高，还是低？



习题 8.10

第　九　章

9.16　一组由一只铜螺线管和一只金属板电容器组成的"高Q"共振线路置于可抽成真空的钟罩内，在标准大气压下测得的共振频率是 41.405±0.002 兆周/秒．钟罩被抽空后测得的频率是 41.418±0.002 兆周/秒．从这二个数据你能求得空气的电介常数吗？你考虑到有其它效应会对频率产生影响吗？

9.17 水合作用在水溶液化学中是一重要现象.它所指的事实是在溶液中一个离子在其周围聚集了成堆的水分子，紧密地附着在这离子上.［参阅例如：G. C. Pimental, ed., *Chemistry, an Experimental Science*, 314 页；或 L.Panling, *General chemistry*, 205 页］在其间起着作用的是一偶极子和一点电荷之间的吸引力. 试估计一带着单电荷 e 的离子从一水分子分离开所需的能量；假定离子和 H_2O 偶极子间的有效距离是1.5埃. （这距离实际上是一个不很确切的量，因为这种水分子当我们仔细观察时是一电荷的分布，而不是一很微小的偶极子.）水分子的那一部分最紧靠着一负离子？

9.18 在观察了图 9.29 中的力线以后，就可能推出这物质的电介常数. 这些力线画得相当正确. 我们很容易测量出场的分布状态，并和理论作比较；看看你能否找出这电场状态的一些特征，能不能近似地找出制作这图时所用的 ϵ 值.

［电介质球体在均匀场中］

9.19 在一巨大的变电所电容器的油介质中在满载时最大电场强度是 90 千伏/厘米. 这油的电介常数是 2.24. 假如在油中有一气泡，在这气泡中的电场强度是多少？（这是把电介质球体的问题从内部反转到外部的问题，你可引用介质球体的问题中所求得的结果）. 在电容器的油中这种气泡是否有很大害处？

（在介质中的球形空穴）

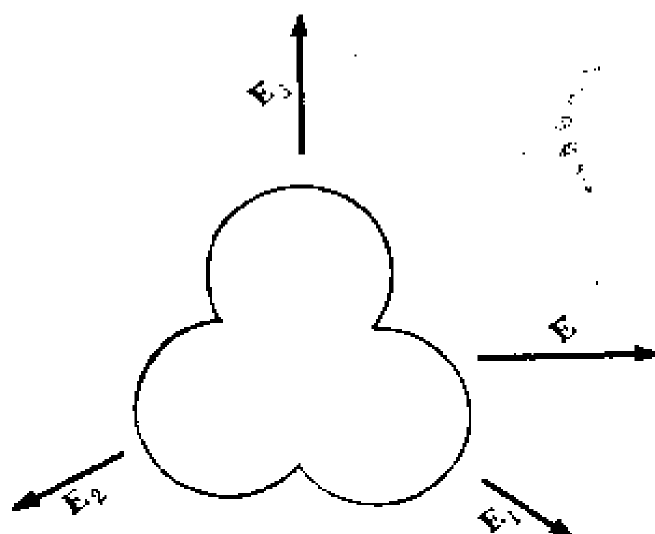
9.20 负极化是什么意思？你认为它能出现吗？

（讨论题）

9.21 设想三个原子的分子是由处于等边三角形上相同的原子构成的.（实际上尚未发现过这种分子，但不管这一点.）我们要研究在这三角形平面中施加一个电场使这分子产生的极化.显然从这分子的对称性来看，对于如图中电场 $\mathbf{E}_1$，$\mathbf{E}_2$ 及

$\mathbf{E}_3$ 方向上所形成的极化是相同的．采用场的分量和叠加法，你就可从这一点证明在这平面上电场 $\mathbf{E}$ 在任何方向上所形成的极化是相同的．你可证明如只考虑在这平面上的极化率，则具有三重对称性的分子与完全圆对称分子是不可区分的．这样的三重对称的理论指引我们作出关于如图 9.13 中四面体甲烷分子必定具有一球对称的极化的论证．

（在某些场合下三重对称和完全的圆对称的意义相同）．



习题 9.21

9.22 这习题是通过提示要证明极化张量的对称性．为简单计，我们只用二维的，但将清楚地表明我们的论证的实质，加上第三维并不会带来任何新的内容．有某个不具有任何对称性的可极化物体，给定了它们的 xy 座标．一电场 $\mathbf{E}$ 感生一偶极矩 $\mathbf{p}$，它和 $\mathbf{E}$ 有如下的线性关系：

$$
\begin{aligned}
p_x &= \alpha_{xx}E_x + \alpha_{xy}E_y \\
p_y &= \alpha_{yx}E_x + \alpha_{yy}E_y
\end{aligned}
\tag{1}
$$

我们要证明 α_{xy} 和 α_{yx} 必定相等．

证明的根据是能量守恒定理．如果有外加电场 $\mathbf{E}$ 时，这系统的偶极矩 $\mathbf{p}$ 改变为 $\mathbf{p}+d\mathbf{p}$，则电场所作的功是 $dW=$

$\mathbf{E}\cdot d\mathbf{p}$. 如第 9.14 节中阐述的，这是因为在这变动中 $d\mathbf{p}$ 正是电荷位移量，而 $d\mathbf{p}$ 在 $\mathbf{E}$ 上的投影是在电场方向上电荷的位移量. 假定这系统是在电场 $\mathbf{E}_1$ 中，相应的偶极矩 $\mathbf{p}_1$ 当然可由式(1)表示. 这称为状态 I. 现在我们通过改变这场的源把加上的电场变为 $\mathbf{E}_2$. 偶极矩将变为 $\mathbf{p}_2$，并作了一定量的功 W_{12}，而形成状态 II. 我们的要点是在于可以通过很多途径来造成这种改变. 如果能量是守恒的，对于所有这些情形所作的功必相等，因为这系统的最后的状态是相同的，都极化成为具有偶极矩 $\mathbf{p}_2$ 的状态. 设取 $\mathbf{E}_1=0$，$\mathbf{p}_1=0$ 作为状态 I. 今采取如下的两种方法使电场从零变为 $\mathbf{E}_2$，它的分量是 E_{2x} 及 E_{2y}：

方法 I

保持 $E_y=0$，变 E_x 为 E_{2x}

作功 =

保持 $E_x=E_{2x}$，变 E_y 为 E_{2y}

作功 =

———————

总计

方法 II

保持 $E_x=0$，变 E_y 为 E_{2y}

作功 =

保持 $E_y=E_{2y}$，变 E_x 为 E_{2x}

作功 =

———————

总计

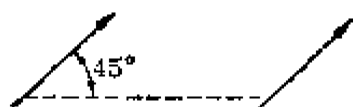
方法 I 中第一步作的功是 $\int_{E_x=0}^{E_x=E_{2x}} E_x dp_x$，由式 1 把 dp_x 表示为 dE_x. 试用上述两法求出总功，并使它们相等.

（证明极化张量必对称）

9.23 我们要研究一张量的元在座标转动下是怎样变换的．为简单计，只考虑二维的情形．假定两个二维的矢量 **A** 及 **B**，在一特定的 xy 座标中，有如下的线性关系：$B_x = \alpha_{xx}A_x + \alpha_{xy}A_y$；$B_y = \alpha_{yx}A_x + \alpha_{yy}A_y$． 系数 α 构成一张量． 今考虑一组坐标轴 x'，y' 对坐标轴 x，y 按反时针方向转过一角度 θ．矢量 **A** 和 **B** 在空间中仍保持不动，但在新的坐标中有不同的 $A_{x'}$ $\cdots$ 等等． 新的分量怎样用旧分量表示？ 当这张量 α 作用于 **A** 时必须得到同样的矢量 **B**． 如果这要求是正确的，则新的张量元和旧的张量元之间就应有什么样的关系呢？ 假定 $\alpha_{xy} = \alpha_{yx}$． 试证这张量的对称性在坐标的转动下保持不变；并且能找出一角度 θ，能使这些交叉系数变为零． 只要不怕麻烦，可以同样进行三维的分析，这样便可求得如极化张量之类的张量变换规则．

（张量在转动变换下的特性）

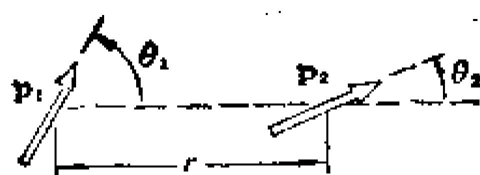
9.24 研究二偶极矩之间的力． 两偶极矩在 → → 排列时互相吸引；在 ↑ ↑ 排列时互相排斥． 为什么？ 试求在每一情形中相互作用力的大小． 你可用相距极短的两个点电荷代表一偶极矩． 这力随距离的几次乘方而变化？ 现在考虑以



排列的两偶极矩上的力是在哪一方向上？ （这是一非中心力的很好例子． 有些非中心力，来源于电力以外的，在原子核中起着重要作用． 氘原子核并非是完全球形而略带雪茄烟形，这一事实就是由这种力造成的；发现这一事实首先揭示核子之间有这样的力存在．）

（两偶极矩之间的力）

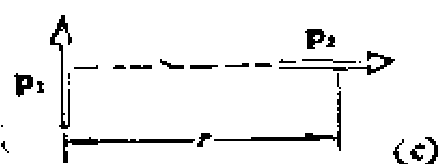
9.25 两不变的偶极子具有偶极矩 $\mathbf{p}_1$ 及 $\mathbf{p}_2$，如图(a)所示排列着，相距 r 厘米，和它们之间的连结线分别成 θ_1 及 θ_2 角．



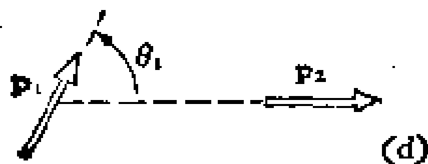
(a)



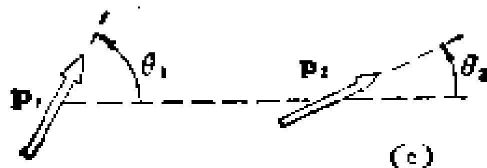
(b)



(c)



(d)



(e)

习题 9.25

问题就是要计算这系统的能量，也就是把相距无穷远的两个偶极子移到如图那样位置所需的能量．这并不包括构成这样一个偶极子的能量．假定这两偶极子的大小在固定后就不再改变，但可转动到指向各种方向．有很多途径可以把这两偶极子从无穷远处移到最后的位置上，在每一情形下所作的功必定是相同的．有一个使计算工作相当容易的方案如下：从如图 (b) 开始，$\mathbf{p}_1$ 和 $\mathbf{p}_2$ 取 (b) 图的方向，相距非常远．维持它们所取的方向不变，把 $\mathbf{p}_2$ 移到离 $\mathbf{p}_1$ 距离为 r 的位置上．这并不需要作功．为什么？转动 $\mathbf{p}_1$ 成最后的取向．这时 $\mathbf{p}_2$ 仍指向 $\theta = 0$ 的方向，计算在 $\mathbf{p}_2$ 场中转动 $\mathbf{p}_1$ 所需的功．然后再转动 $\mathbf{p}_2$，使指向 $\theta = \theta_2$．在计算 $\mathbf{p}_1$ 场中转动 $\mathbf{p}_2$ 所需的功

时可把 $\mathbf{p}_1$ 分解成纵向的 $p_1\cos\theta_1$ 和横向的 $p_1\sin\theta_1$ 的场，可视为 $\mathbf{p}_2$ 分别处于这二电场中．把所有这些功加起来可得：

$$W=\frac{p_1p_2}{r^3}[\cos(\theta_1-\theta_2)-3\cos\theta_1\cos\theta_2]$$

（一对偶极矩的能量）

9.26 用习题 9.25 的结果求解这题和下题关于一些极简单排列的偶极子对的问题．先研究从负无穷远到正无穷远处等距排列的偶极子的线性列阵．假定偶极子的位置是固定的，每一偶极子具有偶极矩 $\mathbf{p}$，可自由指向任一方向上，好象是架在可迴转的支架上似的．问题是在怎样的排列下能量才是最小？当然无限列阵的总能量大概是无限大，但我们要研究的是每单位长的能量．比较如下几种排列中每一偶极子的平均能量．哪一种最大，哪一种最小？

(a) $\cdots\cdots\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\cdots\cdots$

(b) $\cdots\cdots\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\cdots\cdots$

(c) $\cdots\cdots\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\cdots\cdots$

(d) $\cdots\cdots\rightarrow\leftarrow\rightarrow\leftarrow\rightarrow\leftarrow\cdots\cdots$

（偶极子链的能量）

9.27 求出如 $\cdots\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\cdots$ 列阵和如下列阵

$$\cdots\rightarrow\rightarrow\rightarrow_b\leftarrow\leftarrow\leftarrow\cdots$$

之间的能量差，后者的列阵在 b 点的右边所有偶极子的方向都转了向．

$$\left[\text{附注：}\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2}=\frac{\pi^2}{6}\right]$$

这能量差即是与这两区域之间的边界 b 相联系的能量．

近似地比较具有相隔相当远的两个边界的如下列阵

$$\cdots\cdots\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow_b\leftarrow\leftarrow\leftarrow\leftarrow_b\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\cdots\cdots$$

和具有极相近的几乎起着并不相互“抵销”作用的两边界的如

下列阵

$$\cdots\cdots\to\to\to\to\to_b\leftarrow_b\to\to\to\to\cdots\cdots$$

之间的能量．从它们之间的能量差来看，你认为这两边界是趋于相互排斥，或是吸引？

有没有办法使这种倒置比突然倒置所需能量更少？我们来比较如下的一些倒置图式．你也许可能想出一个需要更少能量的边界状态．

(a)　(突然) $\cdots\to\to\to\to\leftarrow\leftarrow\leftarrow\cdots$

(b)　$\cdots\to\to\to\to\uparrow\leftarrow\leftarrow\cdots$

(c)　$\cdots\to\to\to\to\searrow\uparrow\swarrow\leftarrow\leftarrow\leftarrow\cdots$

9.28　式(72)表示的关系称为克劳修斯-莫索提公式．它通常表示为电介常数 ϵ 的函数．试证等同的公式是

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right)=4\pi\alpha.$$

下列的表是从 *Physica* **1**, 627 (1934), Michels, Jaspers 和 Sanders 的文章中摘抄来的，他们测量了在不同的压强和温度下纯氮的电介常数．

温度(℃)	23.8	23.8	23.8	23.8
压强(大气压)	1.02	57.5	221.6	1011.6
密度(克/厘米^3)	0.00118	0.06604	0.2361	0.5780
电介常数	1.00052	1.03109	1.11413	1.29633

这些结果符合克劳修斯-莫索提公式到怎样的程度？

(克劳修斯-莫索提公式实验验证)

9.29　由式(72)提示的当 $4\pi N\alpha/3\geqslant1$ 的条件出现时将发生剧烈变化，这种变化是否确实能出现？我们来看这种事件有什么意义，先考虑只由二个相距 d 厘米的相同的原子 A 及 B 组成的"晶体"．试证如果 A 被极化在平行于 AB 联线的方向上，那末它在 B 处的场把 B 极化在相同的方向上．可不可以

设想，这系统可以自己把自己置于一极化的状态上，其中 A 维持着 B 的极化状态，而 B 维持着 A 的极化? 从以下两个观点来讨论这问题. 如果每一原子的极化率是 α 厘米^3，计算这两原子 A，B 在这状态上相离的距离. 这距离能否和我们能设想的大小相比? 其次再从这假想的系统的能量来讨论.

（讨论题: $4\pi N\alpha/3$ 剧变）

9.30 为了把短无线电波聚焦，制造一人工的电介质，在泡沫塑料基体中埋进一些小的金属球体，这些球体就像是晶格上的原子. 泡沫塑料本身只用作把这些球固定在其位置上，泡沫塑料的电效应可以忽略不计. 一金属球的极化率可由习题 9.9 那样算出. 试计算用 1 英寸直径的金属球，球心间的间隔为 2 英寸所构成的立方体阵列的电介常数. 这样的结构有可能达到 $4\pi N\alpha/3>1$ 的条件吗? 最大可能的机会是面中心立方形阵列，这是球体最紧密排列的阵列. 如果要这金属球阵列显示出自发的极化就会违背哪一定理?

（"人工"电介质）

第　十　章

10.14 在讨论图 10.9 时，为简单计，我们假定磁场 $\mathbf{B}$ 是轴对称的，这即是说围绕这个环 B_r 的大小是不变的. 试证这一假定并不真正必要，也就是要证明，当围绕这环的 B_r 并不是常数时也可推导出式（18）的关系.

10.15 一圆柱形螺线管上有半径为 r_0 的单层绕组. 这螺管是很长，以至在一端附近的磁场可看作半-无限长螺管的磁场. 试证如果小的顺磁性样品在这螺管轴上的一点处受到最大的力，则所在位置是在螺管内离螺管端 $r_0/\sqrt{15}$ 处.

10.16 一电偶极子由相距为 s 的两电荷 Q 及 $-Q$ 构成. 在一定的附近空间里的场和理想的偶极子的场根本不同，这

个附近空间的体积和 s^3 成正比。当 s 变动时这区域的场强和 Q/s^3 成比例。这偶极矩 $p = Qs$，因此如果 p 保持不变，而 s 减小，则体积和场强的乘积将是怎样？试同样讨论电流环的磁场。要记住：如果我们在讨论具有偶极子任一体积的空间平均场时，即令我们在别的方面可把偶极子当成无限小的，也不能忽视电偶极子和磁偶极子之间的差别。

[一有限电偶极子和一电流环附近区域里的平均场]

10.17 一铁壳潜水艇使地磁场引起局部变动，这使我们有可能使用对磁场极小改变也很灵敏的仪器来侦察潜水艇。设想用飞机后拖挂一地磁仪（排除了飞机本身的干扰），假定这仪器对它周围的场能测出 10^5 分之一的变动。假定这潜艇的铁壳已去磁，去除了任何残余的磁化，它对地磁仍是一异常的磁性介质，我们可能期望这艇身感生一磁偶极矩，足以干扰艇长距离内的地磁磁场，大小约等于未受干扰的磁场的大小。如果是这样情况，有希望能侦察到的最大距离是多少？假如改进地磁仪的设计，增加二倍的灵敏度，在侦察一定的海面时在多少航空英里内有效？（实际上问题并不这样简单．磁场的自然涨落产生一定的"噪声水平"，不管地磁仪怎样灵敏，将有可能掩蔽由潜艇引起的变异．这种涨落之中的一种来源是非常简单的，即是：在地磁场中由海洋的波动驱动海水而造成的；海水是一导体；有电流流动，而造成磁场．）

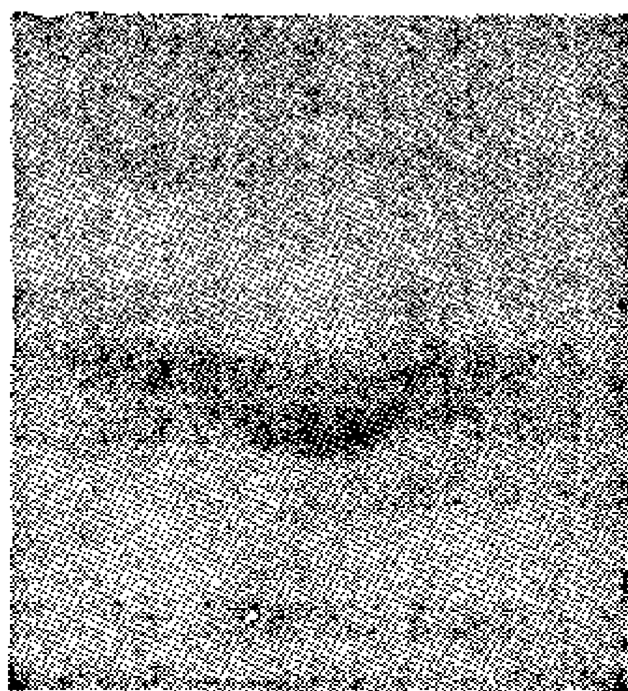
（潜艇的磁侦察法）

10.18 有两个直径为 1/2 英寸的空心玻璃球．一个装着约 1 厘米长的小磁棒．另一个装着一个驻极体——具有永久电极化的棒．它可被视为极佳的绝缘体棒，一端载着一正电荷，另一端一负电荷．小磁棒的磁极距的大小约等于驻极体的电极矩．当我们把它们握在拳中，象猜谜游戏那样，你将怎样测知哪一个是小磁棒，哪一个是驻极体？你将怎样向尚未学习

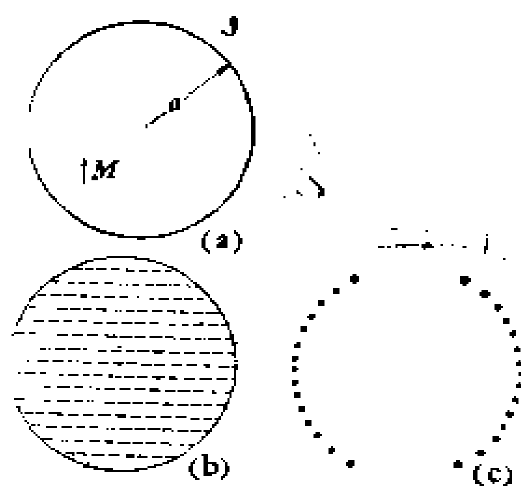
这门课的人解释它们之间的差异？

（讨论题）

10.19 磁强为m的一磁偶极子置于一场强为 B_0 的均匀磁场中，这磁偶极矩的方向和场的方向相反．试论证在这叠加的场中存在着以该磁矩为球心的球面，其中没有场线通过．我们可以说，外部的场是从这球体中“排挤”出来的．这图表示这球表面外部的场线的分布．球内的场线是怎样的？在赤道处靠近球面外部的场强是多少？对外场的分布情况来说可由流动在这球面上的电流来代替磁偶极子，只要我们能供给恰当的电流分布．这时球内部的场是怎样的？为什么你能断定？（这是在研究超导体时的一个重要组态．一超导的球事实上把全部的场都从内部排挤出来了．）



习题 10.19



习题 10.20

10.20 考虑图中所示的均匀磁化的球．把此球切成同样厚度的薄片层，你就能证明，它等效于图（c）表示的载有电流的线圈．用这样的等效性，讨论这样的一个线圈引起的磁场的

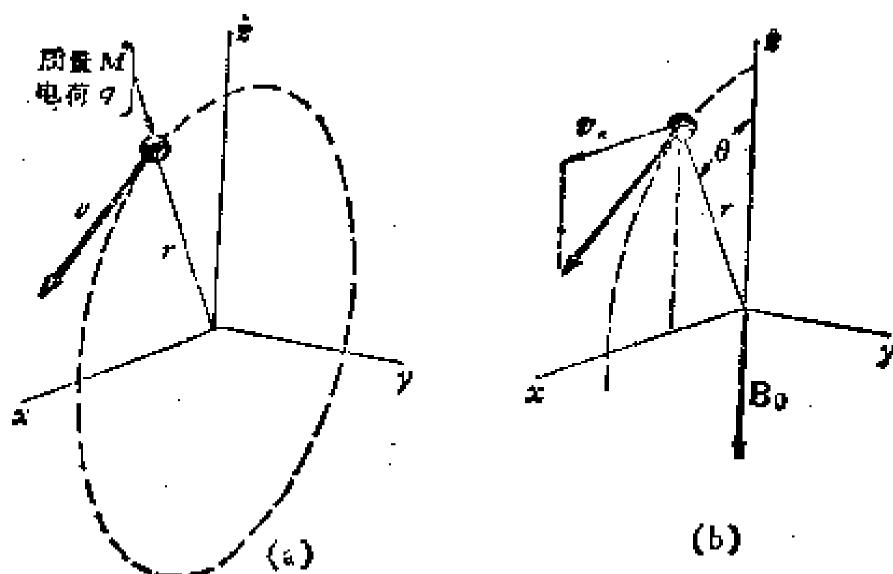
形式，包括内部的与外部的．并把此线圈与习题 10.6 中的带电壳层相比较．

10.21 试写出除存在磁荷及磁流之外，还有电荷及电流时的麦克斯韦方程会怎样呢？建立一些新的符号，并给出它们确切的定义．特别注意＋及－的符号．

10.22 在第 10.5 节中用图 10.12 为例，我们讨论了磁场垂直作用于带电粒子轨道所产生的效应；这粒子受其它力的作用，在一圆轨道上转动．这里的问题是要研究在轨道平面中的磁场所产生的效应．你只要把如下各项分析中的空白在仔细考虑后逐一填上：

质量为 M 电荷为 q 的质点在 xz 平面内以速率 v 在圆轨道上转动．有一中心力使它保持在这轨道上，（见这图的 (a) 部分）此中心力的来源和我们的问题无关．这运动的角动量 $\mathbf{L}$ 是一矢量，方向是____，大小是 $L=$________．（把它绘在图上）现在把磁场 $\mathbf{B}=\hat{\mathbf{z}}B$ 加上，见图 (b)．当质点仍在 xz 平面内运动时，这就会产生一新力作用在这质点上，大小是____，方向是____（在图上标出来）．假定这力是很弱的，以致质点的运动只有极慢的改变．这样我们就该把这力的效应在全圆周上进行平均．力的平均值是零，但是由此引起的平均力矩并不是零．沿____轴上的瞬时力矩的大小是____，在全圆周上的平均值是____．因此平均力矩是一矢量 $\mathbf{N}$，它的大小 N 等于____，方向是____．因为力矩等于角动量的时间变率，所以上述结果就是：角动量矢量 $\mathbf{L}$ 在时间的过程中将________．把这结果和磁场垂直于轨道平面的情形（图 10.12）相比较，我们发现：________．这里的情形是：当我们在 z 轴方向上从上向下观察时所看到的质点运动是这样的：（画图）

[这一题使第 10.5 节的讨论完全了，它表明与外加磁场平行的平面上的电子轨道是怎样的]．

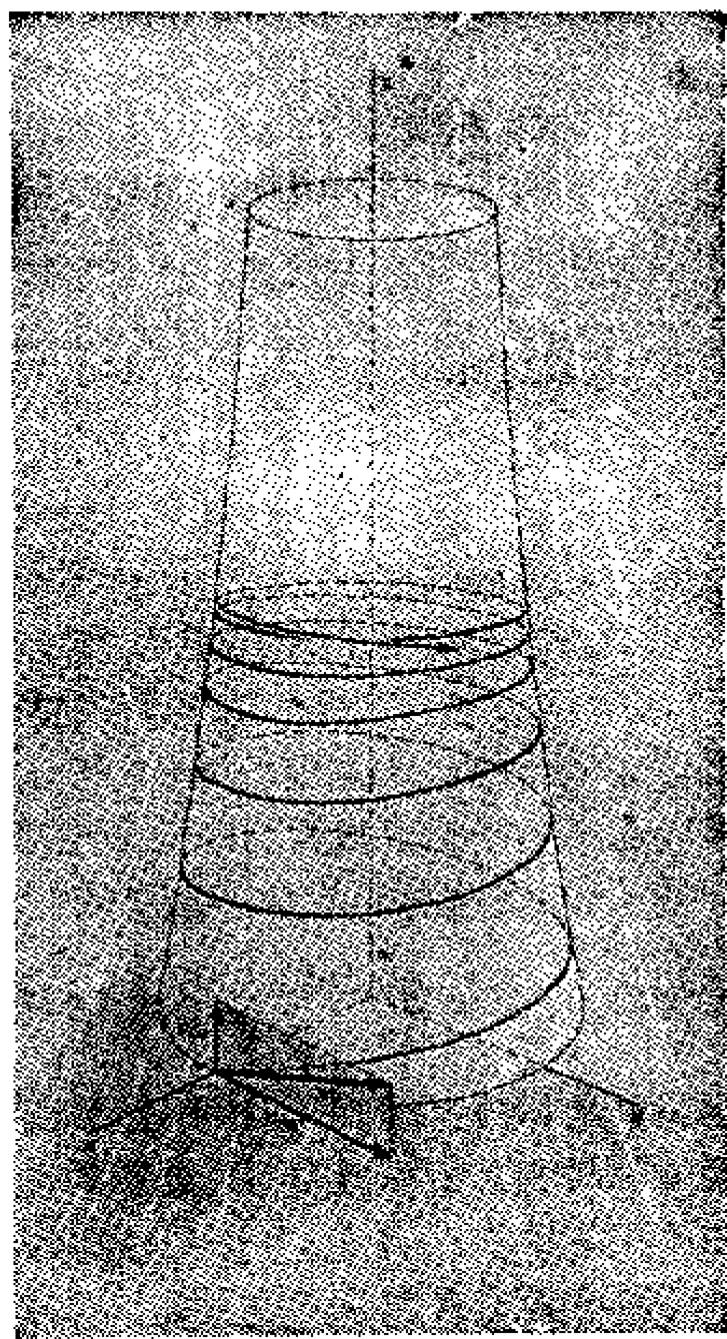


习题 10.22

10.23 在第 10.5 节中我们看到当均匀外场 **B** 加上时带电粒子的轨道半径并不改变，而只改变它的轨道速度。但这只在$\Delta v \ll v_0$的情形才是正确的，这也就是说磁的作用力 qvB/c 远小于束缚粒子向着某一吸引中心作圆运动的力 F_0. 一自由电子的情况并不是这样，上述的假定显然并不成立，电子并不是束缚于任何中心的. 这情形将是怎样的？我们研究这问题，开始先研究这样的一个粒子，它的电荷是 q，质量是 M，在均匀的磁场 **B** 中作圆运动. 这是老的"迴旋加速器"的情况，由条件 $Mv^2/r = qvB/c$ 所控制. 假定 **B** 的减变很慢. 一感应的电场使粒子在运动方向上加速；它有这样的关系：$dv = (qr/2Mc)\,dB$，这正如另一情形中出现的情况相同. 试指出这关系式和迴旋加速器的条件可推导出 B 和 r 之间的关系式. 试证明：(1) 当 B 改变时轨道的磁矩将保持不变；(2) 当 B 改变时轨道所包含的外场 **B** 的磁通量将保持不变. (当我们说 B 的改变是很慢的，是说在迴转一个周期内它的大小只改变很小一部分. 因此粒子的轨道接近于圆，每一迴转是接近于闭合的，从而所谓轨道矩和轨道包含的通量才有意义.)

(在变磁场中的自由电子)

10.24 习题 10.23 第(1)及(2)的结论对于预测电子或离子在磁场(该磁场不随时间变化而随空间各点有渐变)中的运动轨道特别有用，电子被地球周围的文阿仑(Van Allen)带所俘获的问题就是一例. 相应于习题 10.23 中 B 的变化要很慢的规定，我们这里的场的空间变化在所研究的粒子的迴旋



习题 10.24

半径的长度范围内要相对地小. 我们考虑一特殊情形，磁场都指向着一z方向，但它强度的大小向正z方向增加，正如这图中场线表示的. 如图所示一正电荷粒以速度v_0在稍斜向上方穿过xy平面. 如果从以速率v_{0z}在z方向上运动的参考系来观察，可检测到一外场，它的B_z分量穿过这轨道，不断增加. 现在可运用习题10.23的结论来讨论并阐明如图所画出的这粒子在此后的运动. 要注意这情形中有一不同点：似乎有一向下作用力作用在这粒子上. 你怎样解释这现象？要记住一静磁场不能对带电粒子作功，试讨论在实验室坐标系中所观察到的各个速度分量的改变. 为要预计这粒子向上迴旋并返回来以前在喇叭形面上要达到多高，你必须要知道什么条件？

[在会聚磁场中的电子轨道]

10.25 对于原子的量子理论知道一点的人，对我们在第10.5节中所分析的磁场会影响原子中电子的轨道速度这一点会感到难于理解. 当速度改变而半径r保持不变时则角动量mvr要改变. 但是我们假定电子的轨道角动量精确地为常数$h/2\pi$的整倍数，这里h是普适量子常数，即普朗克常数. 怎样mvr可以变化而不违背这条基本量子规则呢？这佯谬的解释对于带电粒子的量子力学是很重要的，但是它并非是专属于量子理论的问题. 当我在考虑带电q，运动在外静电场$\mathbf{E}$中的粒子的能量守恒时，总是包括粒子在这位置上的动能$\frac{1}{2}mv^2$和势能$q\varphi$，这里φ是标势. 我们不应对下述情况感到奇怪，当我们考虑动量守恒时我必须不但要考虑通常的动量$M\mathbf{v}$，还要考虑涉及磁场矢量$\mathbf{A}$的一个量，事实上是，动量必须取作$M\mathbf{v}+(q/c)\mathbf{A}$，这里$\mathbf{A}$是在粒子的位置处计算出的外场的矢势. 可以把$M\mathbf{v}$称作"运动动量"，$(q/c)\mathbf{A}$称作"势动量"，

（在相对论中需要包括 $q\mathbf{A}/c$ 这一项是显然的，就象能量及动量构成一个“4 维矢量”一样，φ 及 $\mathbf{A}/c$ 即是场的标势和矢势也构成一个“4 维矢量”．）这里要考虑的角动量必定不是：

$$\mathbf{r} \times (M\mathbf{v})$$

而是：

$$\mathbf{r} \times \left(M\mathbf{v} + \frac{q}{c}\mathbf{A}\right).$$

再回到图 10.12 中的电荷在线端上旋转的情形． 先验证在负 z 方向上场 $\mathbf{B}$ 的相应矢势是 $A = (B/2)(-\hat{x}y + \hat{y}x)$．然后求出，当这场加上时角动量 $\mathbf{r} \times [M\mathbf{v} + (q/c)\mathbf{A}]$ 将怎样变化？

[一个深刻的注释，及一个说明它的例题]

附　　录

关于 MKS 制电磁单位的注解

大多数电气工程及初等物理学的教科书中用称为合理化 MKS 制的电磁单位制. 这系统采用以米、公斤和秒为基本的 MKS 力学单位. 力的 MKS 单位是牛顿，定义为 1 公斤质量的物体获得 1 米/秒^2 的加速度所需的力. 所以 1 牛顿恰好等于 10^5 达因. 相应的能量单位是牛顿·米，或叫作焦耳，等于 10^7 尔格.

MKS 制中的电磁单位包括我们熟悉的“实用”单位——库仑，伏，安及欧——以及一些新的单位. 有人注意到有可能把常用的实用单位融合到如下规定的完整系统中去. 象我们写出式(1.1)那样把库仑定律写作:

$$\mathbf{F}_2 = k\frac{q_1 q_2 \hat{\mathbf{r}}_{21}}{r_{21}^2} \tag{1}$$

这里 k 不定为 1，而是给它一个值，这样使得如果 q_1，q_2 用库仑表示，r_{21} 用米表示，则 F_2 以牛顿表示. 我们知道了牛顿与达因，库仑与静电单位电量，米与厘米之间的关系，很容易就能算出 k 必须是 0.8988×10^{10}. (两个 1 库仑的电荷相距 1 米远产生大约为 1 兆吨的力)用 $1/(4\pi\epsilon_0)$ 代替 k 是一样的，这里的常数 ϵ_0 是由 $1/4\pi\epsilon_0 = k = 0.8988 \times 10^{10}$ 定出的. 库仑定律写为

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{2}$$

常数 ϵ_0 规定为

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{库仑}^2/\text{牛顿}\cdot\text{米}^2. \qquad (3)$$

可以把因子 $1/4\pi$ 移去，这样在许多电学公式里要出现 4π 的地方都可以除去，但是其代价是在另外一些公式里都引进了 4π，正象我们现在在库仑定律中引入了 4π 一样。这就是所谓"合理化"的意义。常数 ϵ_0 叫作在自由空间中的介电常数(或"介电率")。

电势用伏计量，电场强度 E 用伏/米。在电场 $\mathbf{E}$ 中，作用在电荷 q 上的力是

$$\mathbf{F}\,(\text{牛顿}) = q\mathbf{E}\,(\text{库仑}\times\text{伏/米}). \qquad (4)$$

1 安当然是 1 库仑/秒，带电流 I 安，相距 r 米的平行导线每米长度上的作用力是

$$f\,(\text{牛顿/米}) = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\frac{2I^2(\text{安}^2)}{r\,(\text{米})}. \qquad (5)$$

CGS 制公式在同一情形下是

$$f\,(\text{达因/厘米}) = \frac{2I^2(\text{静电单位/秒})^2}{rc^2\,(\text{厘米}^2/\text{秒}^2)}. \qquad (6)$$

计算 $\mu_0/4\pi$ 的值，它的值一定是 10^{-7}。此常数 μ_0 称作自由空间的导磁率，必定是

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,(\text{牛顿/安}^2). \qquad (7)$$

磁场 $\mathbf{B}$ 由洛仑兹力的定律定义如下：

$$\mathbf{F}\,(\text{牛顿}) = q\mathbf{E} + q\mathbf{v}\times\mathbf{B}, \qquad (8)$$

这里 $\mathbf{v}$ 是粒子的速度，以米/秒为单位，q 是它的电量，以库仑为单位。这就需要给 $\mathbf{B}$ 一个新单位。这单位称作忒斯拉(tesla)或韦伯/米^2。1 忒斯拉恰等于 10^4 高斯。在这系统里辅助场 $\mathbf{H}$ 用不同的单位来表示，在自由空间中以如下关系和 $\mathbf{B}$ 联系起来：

$$\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H} \quad (\text{在自由空间中}) \qquad (9)$$

$\mathbf{H}$ 与自由电流的关系是

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = I_{自由}. \qquad (10)$$

$I_{自由}$是以安计算的自由电流，它被左侧所沿着的线积分迴路所包围。由于 $d\mathbf{s}$ 是以米量度，H 的单位是安/米.

自由空间中的麦克斯韦场方程在合理化的 MKS 制中是这样的，

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= \rho, \qquad & \operatorname{curl} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \qquad & \operatorname{curl} \mathbf{B} &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{J} \end{aligned} \qquad (11)$$

如果和高斯 CGS 制比较，在高斯 CGS 制中，c 在式中明显地出现，可以看出式（11）包涵着波速 $1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$（单位当然是米/秒)的意义．即是，

$$\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}. \qquad (12)$$

在我们的高斯 CGS 制中，电荷单位(静电单位)是根据库仑定律建立起来的，其中 $k \equiv 1$. 在 MKS 制中单位库仑不是由式(1)，而是由式(5)定义的，这就是说由两电流之间的力，而不是由两电荷之间的力来定义的．因为在式(5)中我们有 $\mu_0 \equiv 4\pi \times 10^{-7}$. 换句话说，如果有一新的光速测量值要改变已经采用了的 c 的值时；我们应该修正常数 ε_0 的值，而不是 μ_0 的值.

下表给出一部分 MKS 单位的表和相对应的高斯 CGS 单位.

这 MKS 制在工程学方面是方便的． 但对于处理场及物质的基础物理方面有根本的缺点． 在这单位制中，真空场的麦克斯韦方程组只有当 $\mathbf{H}$，而不是 $\mathbf{B}$，作为磁场出现时，电场和磁场才是对称的．(请注意上面式(11)即使没有 $\mathbf{J}$ 存在也不是对称的)． 另一方面，在第十章中所指出的是 $\mathbf{B}$ 而不是

物理量	符　号	合理化MKS制单位	相等的高斯 CGS 制单位
距离	s	米	10^2 厘米
力	$\mathbf{F}$	牛顿	10^5 达因
功，能量	W	焦耳	10^7 尔格
电荷	q	库仑	2.998×10^9 静电单位
电流	I	安	2.998×10^9 静电单位/秒
电势	φ	伏	(1/299.8) 静伏
电场	$\mathbf{E}$	伏/米	(1/2998) 静伏/厘米
电阻	R	欧	1.139×10^{-12} 秒/厘米
磁场	$\mathbf{B}$	忒斯拉	10^4 高斯
磁通量	Φ	韦伯	10^8 高斯·厘米^2
辅助场 H	$\mathbf{H}$	安/米	$4\pi\times10^{-3}$ 奥斯特

H，是物质内部的基本磁场．这不是定义或单位问题，而是本质的东西，反映出不存在磁荷．因此 MKS 制，按其结构来说，不是趋向于掩盖真空中的基本电磁对称性，就是趋向于掩盖场源的根本不对称性．这就是本书采用高斯 CGS 制的理由之一．还有一个理由是，高斯 CGS 制，有时再加上一些实用单位，仍是大多数的实际物理学工作者乐于采用的单位．

数值表

物理量	符号	数值
真空中的光速	c	2.998×10^{10} 厘米/秒
基本电荷	e	4.803×10^{-10} 静电单位
普朗克常数	h	6.626×10^{-27} 尔格-秒
万有引力常数	G	6.670×10^{-8} 达因-厘米^2/克^2
电子静止质量	m	0.911×10^{-27} 克
质子静止质量	M_p	1.672×10^{-24} 克
阿佛加德罗常数	N_0	6.022×10^{23} 摩$^{-1}$
标准状态下的摩尔体积	V_0	22.4×10^{3} 厘米^3/摩
波尔兹曼常数	k	1.38×10^{-16} 尔格/开
电子伏特(能量单位)	ev	1.602×10^{-12} 尔格
电子静止能量	mc^2	0.511×10^{6} 电子伏
质子静止能量	M_pc^2	0.938×10^{9} 电子伏
玻尔半径	a_0	0.529×10^{-8} 厘米

高斯 CGS 单位

物理量	符号	单位	定义关系式
距离	s	厘米	基本单位
质量	m	克	基本单位
时间	t	秒	基本单位
速度	$\mathbf{v}$	厘米/秒	$\mathbf{v}=d\mathbf{s}/dt$
动量	$\mathbf{p}$	克·厘米/秒	$\mathbf{p}=m\mathbf{v}$
力	$\mathbf{F}$	达因[=克·厘米/秒^2]	$\mathbf{F}=d\mathbf{p}/dt$
功,能	$\mathbf{W}$	尔格[=克·厘米^2/秒^2]	$W=\int\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$

功率	P	尔格/秒	$P = dW/dt$
电荷	q	静电单位	$F = q^2/r^2$[库仑定律]
电荷密度	ρ	静电单位/厘米^3	$q = \int \rho dV$[V=体积]
电流	I	静电单位/秒	$I = dq/dt$
电流密度	$\mathbf{J}$	(静电单位/秒)/厘米^2	$I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$[$\mathbf{a}$=面积]
电势	φ	静伏 [=尔格/静电单位]	$W = q(\varphi_2 - \varphi_1)$
电动势	$\mathscr{E}$	静伏	$W = q\mathscr{E}$
电场	$\mathbf{E}$	静伏/厘米 [=达因/静电单位]	$\mathbf{F} = q\mathbf{E}$
磁场	$\mathbf{B}$	高斯 [=达因/静电单位]	$\mathbf{F} = q(\mathbf{v}/c) \times \mathbf{B}$
电导率	σ	秒$^{-1}$	$\mathbf{J} = \mathbf{E}\sigma$
电阻率	ρ	秒	$\mathbf{J} = \mathbf{E}/\rho$
电阻	R	秒/厘米	$I = \mathscr{E}/R$[欧姆定律]
磁通量	Φ	高斯·厘米^2	$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$[$\mathbf{a}$=面积]
电容	C	厘米	$q = C(\varphi_2 - \varphi_1)$
电感	L, M	秒^2/厘米	$\mathscr{E} = L dI/dt$
电偶极矩	$\mathbf{p}$	静电单位·厘米 [=尔格/(静伏/厘米)]	$\mathbf{p} = q\mathbf{s}$
磁偶极矩	$\mathbf{m}$	静电单位·厘米 [=尔格/高斯]	$\mathbf{m} = I\mathbf{a}/c$[$\mathbf{a}$=面积]
辅助场$\mathbf{H}$	$\mathbf{H}$	奥[=高斯]	$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi I/c$

在这个单位制中，相应的电和磁的量，如电偶极矩和磁偶极矩都具有相同的量纲，就是说，是由相同的基本单位组成的。遗憾的是，从名称上有隐藏此点的倾向，由于在电的方面，电势的单位用了一个特殊的名称(静伏)，在磁的方面，场的单位用了一个特殊名词(高斯)。没有特殊名称的单位常常是和“CGS”单位一样的。例如：“ρ 是以 CGS 单位为单位的电阻率。”

常用的实用单位

单位	和 CGS 单位的关系
焦耳	1 焦耳 $=10^7$ 尔格
瓦特	1 瓦特 $=10^7$ 尔格/秒
库仑	1 库仑 $=2.998\times10^9$ 静电单位
安培	1 安培 $=2.998\times10^9$ 静电单位/秒
伏特	1 伏特 $=(1/299.8)$ 静伏
伏特	
伏特/厘米	
欧姆·厘米	
欧姆	1 欧姆 $=1.139\times10^{-12}$ 秒/厘米
法拉	1 法拉 $=0.975\times10^{12}$ 厘米
亨利	1 亨利 $=0.975\times10^{12}$ 秒²/厘米

含有实用单位表示的量的一些公式:

$$W\text{(焦耳)} = q\mathscr{E}\text{(库仑}\times\text{伏特)}$$

$$P\text{(瓦特)} = I^2R\text{(安培}^2\times\text{欧姆)}$$

$$\mathscr{E}\text{(伏特)} = 10^{-8}\frac{d\Phi}{dt}\text{(高斯·厘米}^2\text{/秒)}$$

$$\mathscr{E}\text{(伏特)} = L\frac{dI}{dt}\text{(亨利·安培/秒)}$$

$$\int \mathbf{H}\cdot d\mathbf{s}\text{(奥斯特-厘米)} = \frac{4\pi}{10}I\text{(安培)}$$

$$q\text{(库仑)} = C(\varphi_2-\varphi_1)\text{(法拉·伏特)}$$

在场 **B** 中单位长度导线上所受的力:

$$f\text{(达因/厘米)} = \frac{1}{10}IB\text{(安培}\times\text{高斯)}$$

常用的实用单位

单位	和 CGS 单位的关系
焦耳	1 焦耳＝10^7 尔格
瓦特	1 瓦特＝10^7尔格/秒
库仑	1 库仑＝2.998×10^9静电单位
安培	1 安培＝2.998×10^9静电单位/秒
伏特	1 伏特＝(1/299.8)静伏
伏特	
伏特/厘米	
欧姆・厘米	
欧姆	1 欧姆＝1.139×10^{-12} 秒/厘米
法拉	1 法拉＝0.975×10^{12} 厘米
亨利	1 亨利＝0.975×10^{12} 秒²/厘米

含有实用单位表示的量的一些公式：

$$W\text{(焦耳)} = q\mathscr{E}\text{(库仑}\times\text{伏特)}$$

$$P\text{(瓦特)} = I^2R\text{(安培}^2\times\text{欧姆)}$$

$$\mathscr{E}\text{(伏特)} = 10^{-8}\frac{d\Phi}{dt}\text{(高斯・厘米}^2\text{/秒)}$$

$$\mathscr{E}\text{(伏特)} = L\frac{dI}{dt}\text{(亨利・安培/秒)}$$

$$\int \mathbf{H}\cdot d\mathbf{s}\text{(奥斯特-厘米)} = \frac{4\pi}{10}I\text{(安培)}$$

$$q\text{(库仑)} = C(\varphi_2-\varphi_1)\text{(法拉・伏特)}$$

在场**B**中单位长度导线上所受的力：

$$f\text{(达因/厘米)} = \frac{1}{10}IB\text{(安培}\times\text{高斯)}$$

常用的实用单位

单位	和 CGS 单位的关系
焦耳	1 焦耳 $=10^7$ 尔格
瓦特	1 瓦特 $=10^7$ 尔格/秒
库仑	1 库仑 $=2.998\times10^9$ 静电单位
安培	1 安培 $=2.998\times10^9$ 静电单位/秒
伏特	1 伏特 $=(1/299.8)$ 静伏
伏特	
伏特/厘米	
欧姆·厘米	
欧姆	1 欧姆 $=1.139\times10^{-12}$ 秒/厘米
法拉	1 法拉 $=0.975\times10^{12}$ 厘米
亨利	1 亨利 $=0.975\times10^{12}$ 秒²/厘米

含有实用单位表示的量的一些公式:

$$W\,(\text{焦耳}) = q\mathscr{E}\,(\text{库仑}\times\text{伏特})$$

$$P\,(\text{瓦特}) = I^2R\,(\text{安培}^2\times\text{欧姆})$$

$$\mathscr{E}\,(\text{伏特}) = 10^{-8}\frac{d\Phi}{dt}\,(\text{高斯}\cdot\text{厘米}^2/\text{秒})$$

$$\mathscr{E}\,(\text{伏特}) = L\frac{dI}{dt}\,(\text{亨利}\cdot\text{安培}/\text{秒})$$

$$\int \mathbf{H}\cdot d\mathbf{s}\,(\text{奥斯特-厘米}) = \frac{4\pi}{10}I\,(\text{安培})$$

$$q\,(\text{库仑}) = C(\varphi_2-\varphi_1)\,(\text{法拉}\cdot\text{伏特})$$

在场 **B** 中单位长度导线上所受的力:

$$f\,(\text{达因/厘米}) = \frac{1}{10}IB\,(\text{安培}\times\text{高斯})$$